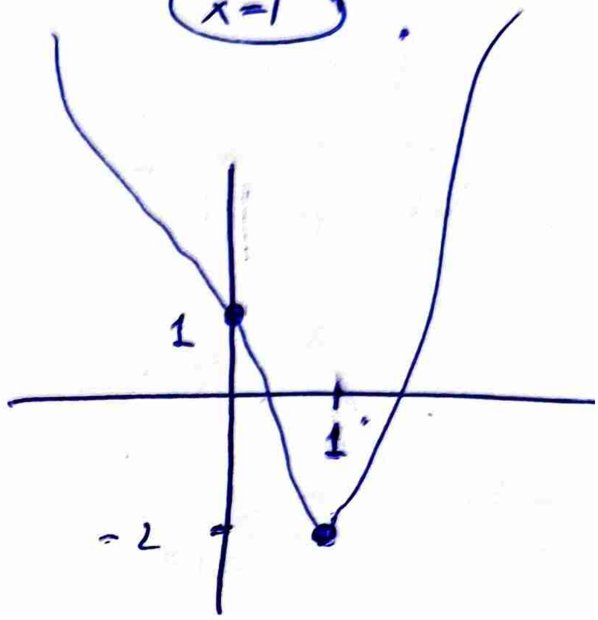
9. $f(x) = x^4 - 4x + 1 \quad , x \in R$

(α) $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1$

$\boxed{x = 1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$



$f(x) \geq f(1)$

$\underline{f(x) \geq -2}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$$

(β) ΝΔΟ η εξίσωση $\dfrac{4x}{x^4+1} = 1$ έχει δύο ρίζες ακριβώς.

$4x = x^4 + 1 \Rightarrow x^4 - 4x + 1 = 0$

$f(x) = 0$.

Πρεπει να δειξω οτι η C_f τεμνει τον $x'x$ 2 φορες.

$x < 1$

- f συνεχης
- $f \searrow$
- $\Sigma T_f = [-2, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

αρα $\exists!\ \xi_1 < 1$

τ.ω

$f(\xi_1) = 0$

$x \geq 1$

- f συνεχης
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = [-2, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

αρα $\exists!\ \xi_2 > 1$

τ.ω

$f(\xi_2) = 0$

10. (B) Νδο $2x^3-3x^2-12x+1=0$

έχει 2 θετικές και 1 αρνητική ρίζα.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$f'(x)=6(x^2-x-2)$

$\longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$x=2$ $x=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

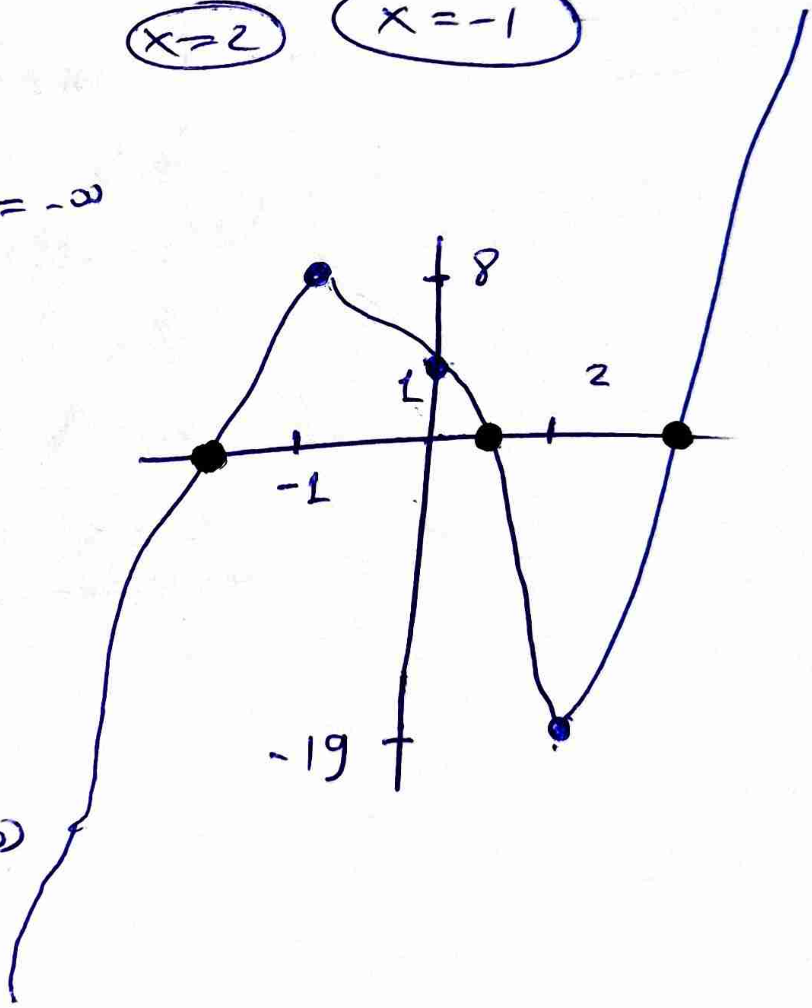
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$

$f(-1)=8$

$f(2)=-19$

$f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$



$x<-1$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 8]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα

$\exists! \xi_1$ τ.ω

$f(\xi_1)=0$

$\underline{\xi_1<0}$

$-1 \le x \le 2$

- f συνεχής
- $f \searrow$
- $\Sigma T_f = [-19, 8]$

Το $0 \in \Sigma T_f$.

άρα

$\exists! \xi_2 \in (-1, 2)$

τ.ω $f(\xi_2)=0$

Έστω $\xi_2<0$

$f \searrow$

$f(\xi_2) > f(0)$

$0>1$

Άτοπο

$\Rightarrow \underline{\xi_2>0}$

$x>2$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = [-19, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists! \xi_3>0$

τ.ω $f(\xi_3)=0$

$\underline{\xi_3>2}$

13. (B) Νδο η εξίσωση

$(x-1)\ln x = x e^{-1} - x + 2$ έχει

μοναδική ρίζα στο $(2,e)$.

$$\boxed{f(x) = (x-1)\ln x - x \cdot e^{-1} + x - 2}$$

$$f'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x} - e^{-1} + 1$$

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{e} + 1$$

$$f'(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2 - \frac{1}{e}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

x	2		e
f''		$+$	
f'	$+$	$\nearrow$	$+$
f		$\nearrow$	

$x > 2$

$f'(x) > f'(2)$

$f'(x) > \ln 2 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{e}$

$$f(2) = \ln 2 - 2e^{-1} = \ln 2 - \frac{2}{e} < 0$$

• $\ln x \leq x - 1$

$\ln \frac{2}{e} \leq \frac{2}{e} - 1$

$\ln 2 - \ln e \leq \frac{2}{e} - 1$

$\ln 2 - 1 \leq \frac{2}{e} - 1$

$\ln 2 \leq \frac{2}{e}$

$f(e) = e - 1 - e e^{-1} + e - 2$

$f(e) = e - \cancel{1} - \cancel{1} + e - \cancel{2}$

$= 2e > 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (2,e)$

τ.ω $\underline{f(\xi) = 0}$

$$f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{e}$$

$$f'(2) = \ln 2 + \overbrace{2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{e}}^{\oplus}$$

$\oplus$

- $\ln x \leq x - 1$

$$\ln \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - 1$$

$$\ln 1 - \ln 2 \leq -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\ln 2 - \frac{1}{2} > 0}}$$

$$\underline{\underline{f'(2) > 0}}$$

16. $f(x) = 2x\ln x - 2x + 1 \quad , x>0$

(a) $f'(x) = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} - 2$

$f'(x) = 2\ln x$

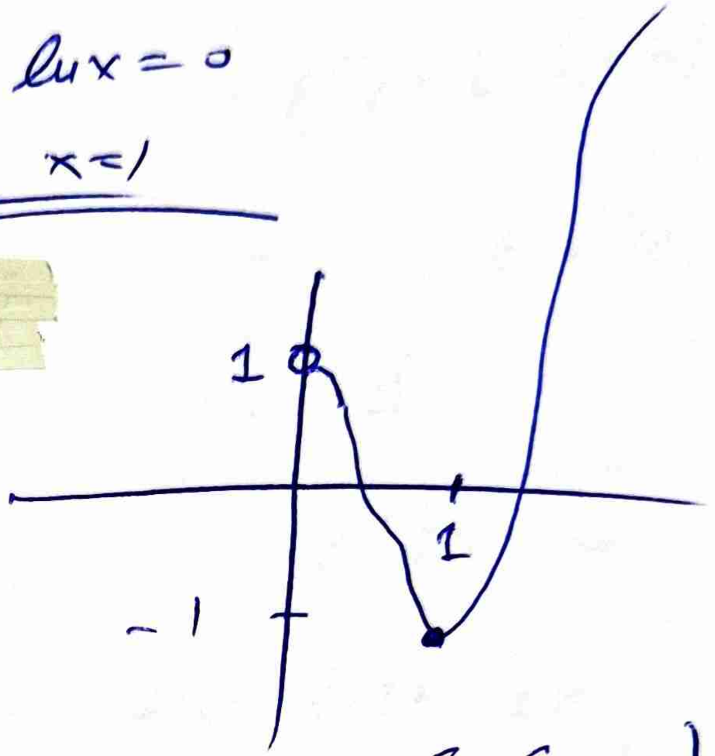
$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0$

$x = 1$

x	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$1 \searrow$		$\nearrow +\infty$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq -1$



$\Sigma T_f = [-1, +\infty)$.

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\cancel{2x\ln x} - 2x + 1) = 1$

$\longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$

• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (2x\ln x - 2x + 1) = \lim_{x\to +\infty} 2x\underbrace{\left(\ln x - 1 + \frac{1}{2x}\right)}_{+\infty}$

ii) Πλήθος ριζών $f(x)=0$

$0<x<1$

- f συνεχής
- $f \downarrow$
- $\Sigma T_f = (-1,+\infty)$

το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\ \xi_1$ τ.ω

$f(\xi_1)=0$

$x \geq 1$

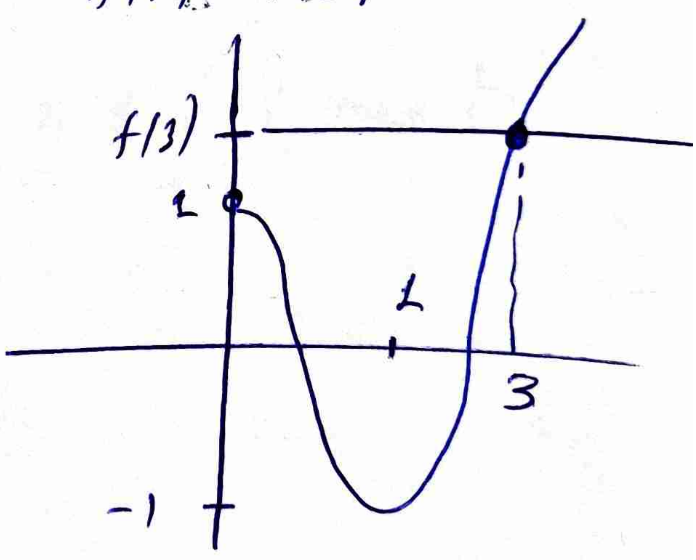
- f συνεχής
- $f \uparrow$
- $\Sigma T_f = [-1,+\infty)$.

το $0 \in \Sigma T_f$.

άρα $\exists!\ \xi_2$ τ.ω

$f(\xi_2)=0$

(γ). ΝΔΟ η εξίσωση $f(x)=f(3)$ έχει μοναδική ρίζα.



$f(3) = 6\ln 3 - 6 + 1$

$f(3) = 6\ln 3 - 5$

$3 > e$

$\ln 3 > \ln e$

$\ln 3 > 1$

$6\ln 3 > 6$

$6\ln 3 - 5 > 1$

$f(3) > 1$

$0<x<1$

- f συνεχής
- $f \downarrow$
- $\Sigma T_f = [-1, 1)$

το $f(3) \notin \Sigma T_f$

όχι ρίζα εδώ.

$x > 1$

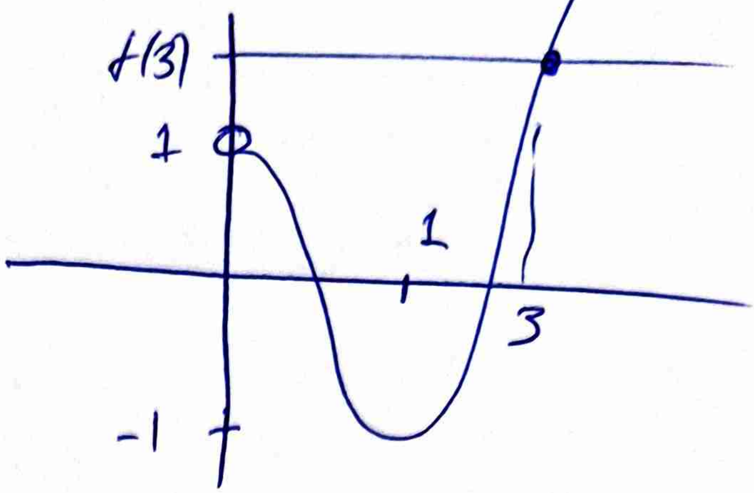
$f(x) = f(3)$

$f \nearrow$

f 1-1

$x = 3$

(δ) Ανίσωση $f(x) > f(3)$.



$\forall x < 1$

$-1 \leq f(x) < 1$

Το $f(3) \notin \Sigma T f$.

όχι λύση

εδώ

$\forall x > 3$

$f \nearrow$

$f(x) > f(3)$

$x \in (3, +\infty)$

52. $f(x)=e^{x-1}-\ln x\,,\quad x>0\,.$

(a) $f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}\qquad f'(1)=0$

$$f''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$$

x	0		1		$+\infty$
f''		$+$		$+$	
f'		$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$x<1 \Rightarrow f(x)<f(1)$

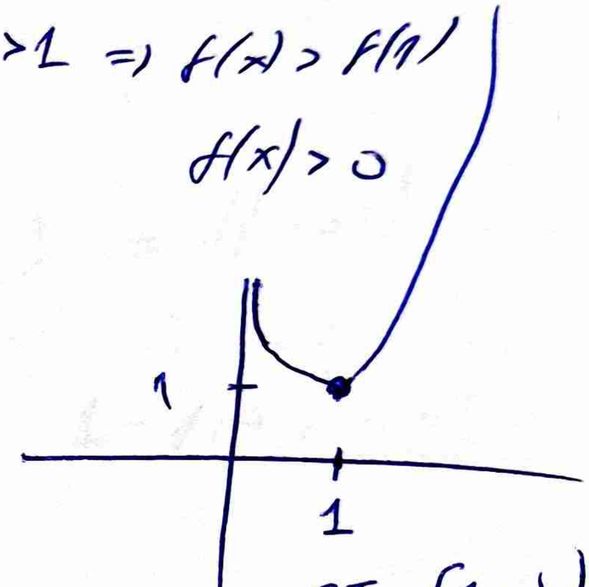
$f(x)<0$

$x>1 \Rightarrow f(x)>f(1)$

$f(x)>0$

$f(x)\geq f(1)$

$f(x)\geq 1$



$\Sigma T_f=[1,+\infty)$

(B) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x-1}-\ln x=+\infty$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{x-1}\left(1-\cancel{\frac{\ln x}{e^{x-1}}}^{\,0}\right)$$

$$\rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{x-1}}=0$$

(γ) Νδο η εξισωση $\quad a, \beta \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

$$\frac{f(\alpha)-1}{x} + \frac{f(e^{\beta-1} - \ln\beta) - 1}{x-1} = 0$$

εχει μοναδικη ριζα στο $(0,1)$

$$\underbrace{(x-1)(f(\alpha)-1) + x\left(f(e^{\beta-1} - \ln\beta) - 1\right)}_{g(x)} = 0$$

$g(1) = f(e^{\beta-1} - \ln\beta) - 1 = f(f(\beta)) - 1 > 0$

$g(0) = -1\,(f(\alpha)-1) = 1 - f(\alpha) < 0$

• $f(\alpha) > 1 \Rightarrow 1 - f(\alpha) < 0$

• $f(\beta) > 1 \underset{\forall x > 1}{\overset{f \nearrow}{\Rightarrow}} f(f(\beta)) > f(1)$

$f(f(\beta)) > 1$

Αρα $g(1)g(0) < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (0,1)$

τ.ω $g(\xi) = 0$.

$$g(x) = (x-1)\underbrace{(f(\alpha)-1)}_{\text{νουμερο}} + x\,\underbrace{(f(e^{\beta-1}-\ln\beta)-1)}_{\text{νουμερο}}$$

Ειναι πολυωνυμο 1ου

βαθμου αρα εχει

το πολυ 1 λυση.

Εδειξα οτι εχει τουλαχιστον

1 λυση αρα εχει 1 λυση

⑧ $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)(f(x)-1)} =$$

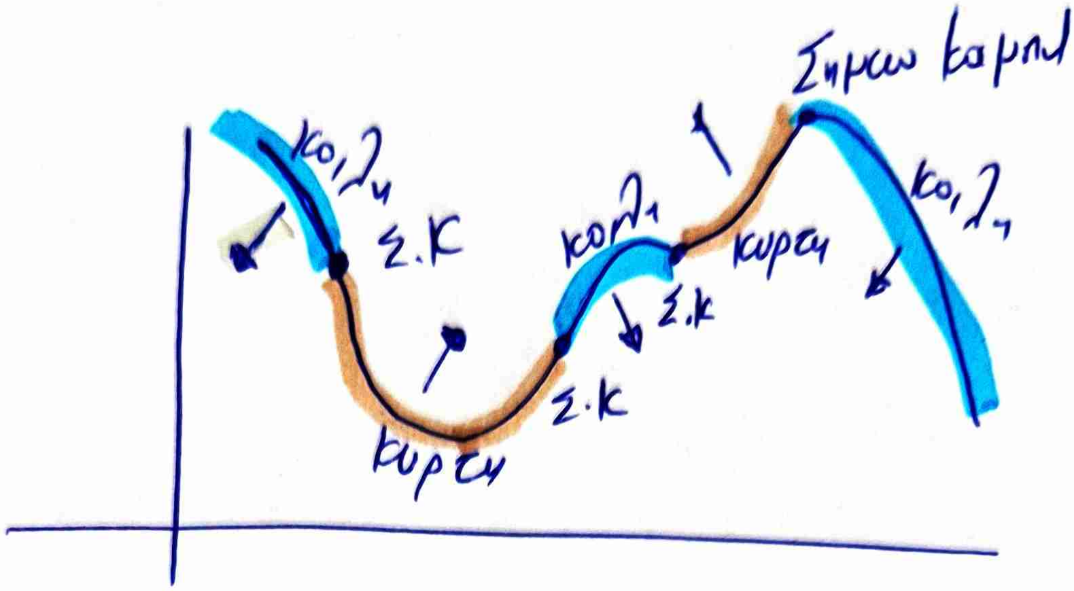
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{1}{\underset{+}{f(x)-1}} = 1 \cdot (+\infty)$$

$$\underline{\underline{= +\infty}}$$

$$\to \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) - 1 \geq 0$$

1.

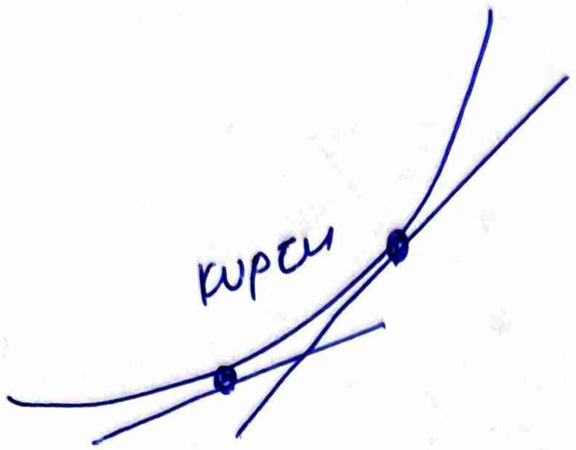


2. $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ κυρτη.

$f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ κοιλη

3. f κυρτη $\Leftrightarrow f' \nearrow$

f κοιλη $\Leftrightarrow f' \searrow$



Αν f κυρτη

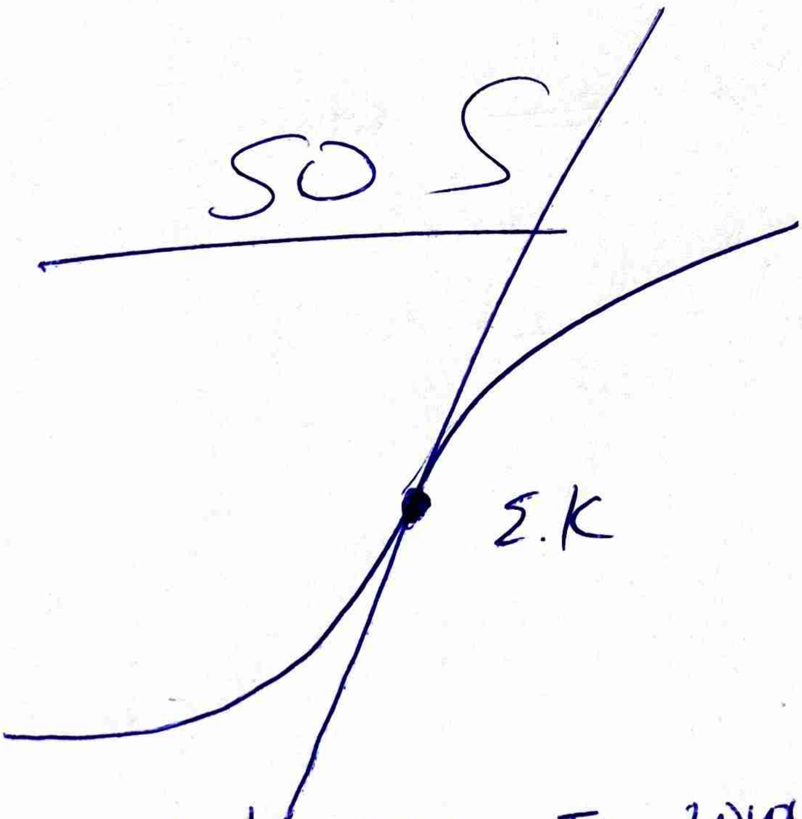
$f(x) \geq \alpha x + \beta$

$\downarrow$

εφαπτομενη

Αν f κοιλη

$f(x) \leq \alpha x + \beta$.



Το Σ.Κ ειναι το μοναδικο σημειο

που η εφαπτομενη διαπερνα τη C_f.

2. β $f(x) = \ln x - x^3 \quad , x>0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 3x^2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 6x < 0$$

f κοίλη.

δ $f(x) = x - x^4$

$$f'(x) = 1 - 4x^3$$

$$f''(x) = -12x^2 \leq 0$$

f κοίλη

στ $f(x) = 6e^x - x^3$

$$f'(x) = 6e^x - 3x^2$$

T

$$f''(x) = 6e^x - 6x = 6(e^x - x)$$

f κυρτή

- $e^x \geq x+1$

$$e^x - x \geq 1$$

$$e^x - x > 0$$

5. (β) $f(x) = \frac{x^4}{6} - x^2$

$f'(x) = \frac{1}{6} 4x^3 - 2x$

$f''(x) = \frac{4}{6} 3x^2 - 2$

$f''(x) = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$

x		-1		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup\nearrow$		$\cap\searrow$		$\cup\nearrow$
	κυρτή		κοίλ		κυρτή

$A(-1, f(-1))$ Σ.Κ

$B(1, f(1))$ Σ.Κ.

(δ) $f(x) = x^5 - 10x^3$

$f'(x) = 5x^4 - 30x^2$

$f''(x) = 20x^3 - 60x = 20x(x^2 - 3)$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$20x$	$-$		$-$		$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\cap\searrow$		$\cup\nearrow$		$\cap\nearrow$		$\cup\nearrow$

6. 5 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, \ x \neq 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{-2x}{x^4} = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3}$$

$$f''(x) = 2\,\frac{x^3+1}{x^3}$$

$$\longrightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 2\,\frac{x^3+1}{x^3} = 0$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1 \qquad x = -1$$

x		-1		0	
x^3+1	$-$	0	$+$		$+$
x^3	$-$		$-$		$+$
f''	$+$		$-$		$+$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$

13. $f(x) = \ln x - x - \frac{1}{x} + 2$, $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x^2}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{-2x}{x^4}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4}$

$\ominus$

$f' \downarrow$

(α) Ανίσωση $f'(e^x) > 1$.

$f'(e^x) > f'(1)$

$f' \downarrow$

$e^x > 1$

$x > 0$

(β) i) Νδο $f(x) \leq x - 1$ $\forall x > 0$,

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 0 = 1 \cdot (x-1)$

$y = x - 1$

Αφού $f''(x) < 0$

f κοίλη

$\Rightarrow f(x) \leq x - 1$

ii) νδο $e^{f(\ln x)} \le \frac{x}{e} \quad \forall x>1$

$f(\ln x) \le \ln \frac{x}{e}$

$f(\ln x) \le \ln x - \ln e$

$f(\ln x) \le \ln x - 1$

Γνωρίζω ότι $f(x) \le x-1 \quad \forall x>0$

Αφού $x>1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 \Rightarrow \ln x > 0$

$f(\ln x) \le \ln x - 1$

(γ) Ανίσωση $x^x < e^{2x^2-3x+1}$ $(0,+\infty)$

$$\ln x^x < \ln e^{2x^2-3x+1}$$

$$x\ln x < 2x^2-3x+1$$

$$\ln x < 2x - 3 + \frac{1}{x}$$

$$\ln x - x - \frac{1}{x} + 2 < 2x - 3 - x + 2$$

$$f(x) < x-1$$

$$x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

Γνωρίζω ότι
$f(x) \leq x-1$
$\forall x > 0$

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\nearrow$ κοίλη

$f(1) = f'(1) = 2$ $\qquad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(α) Νδο $f'(e^x - x) \leq 2$

$\boxed{\text{Αφού } f \text{ κοίλη} \Rightarrow f' \downarrow}$

(β) $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 2 = 2(x-1)$

$\boxed{y = 2x}$

Αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(e^x - x) \leq f'(1)$

$f' \downarrow$

$e^x - x \geq 1$

$e^x \geq x + 1$ ✓

γ) Εξίσωση $f(x) - |x-1| = 2x$

$$f(x) - 2x - |x-1| = 0$$

$\boxed{\text{Αφού } f \text{ κοίλη} \Rightarrow f(x) \le 2x \quad \text{Το "=" } x=1}$

$$\begin{cases} f(x) - 2x = 0 & \underline{\underline{x=1}} \\ \text{και} & \\ |x-1| = 0 & \Rightarrow \underline{\underline{x=1}} \end{cases}$$

δ) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x) - 2x} = -\infty$

- $f(x) \le 2x$

$$f(x) - 2x \le 0$$

(ε) Ν.δ.ο. η f αντιστρ. και

ν.δ.ο. $f^{-1}(x) \geq \frac{x}{2}$

Αφού $f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1

$f^{-1}(x) \geq \frac{x}{2}$

$f(f^{-1}(x)) \geq f\left(\frac{x}{2}\right)$

$x \geq f\left(\frac{x}{2}\right)$

Γνωρίζω ότι $f(x) \leq 2x$

$f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{2}}$

$f\left(\frac{x}{2}\right) \leq x$ ✓

Ασκησεις για Δευτερα

25	26	27	29
2	2	1 α β	2 α γ c
4	3	7 γ	5 α γ
5	4	10 α	6 α β.
6	5	13 α	
11	6	21	
14	7		
	9		
	10 .		
	17 .		
	18 .		

30

1

2