Συντομη Επαναληψη ορίων

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right) = \dfrac{2-1}{2-3} = \dfrac{1}{-1} = -1$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-3}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{(x-1)(x+1)}$

x		1	
$x-1$	$-$		$+$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-2}{2}\cdot\infty$

Το όριο δεν υπάρχει

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-3}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1} = -1\,(-\infty) = \underline{+\infty}$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-3}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1} = -1\,(+\infty) = \underline{-\infty}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x-3)\,\dfrac{1}{(x-1)^2} = (-2)\cdot(+\infty) = -\infty$

4. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

5. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 - x - 1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\
\downarrow & 1 & -1 & -1 & \\
1 & -1 & -1 & 0 &
\end{array}$$

6. $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}}^{\cancel{2}} - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) = 0$$

7. $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2-x+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x^2-x+1}}^{\cancel{2}} - x^2}{\sqrt{x^2-x+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - x + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-x+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \cancel{x}} = \frac{-1}{1+1}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

8. $\lim_{x \to 0} (\sigma w x - 1)\, \eta \mu \frac{1}{x}$ $\frac{\eta\mu\,\infty}{\chi\tau\iota\sigma\tau\omega}$

$-1 \le \eta\mu \frac{1}{x} \le 1$

$$\boxed{-(\sigma w x - 1) \geq (\sigma w x - 1)\, \eta\mu\frac{1}{x} \geq (\sigma w x - 1)}$$

- $\lim_{x \to 0} -(\sigma w x - 1) = 0$
- $\lim_{x \to 0} (\sigma w x - 1) = 0$

Από Κ.Π

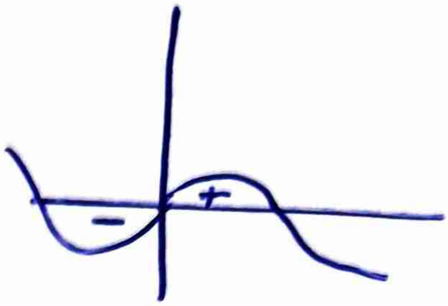
$\lim_{x \to 0} (\sigma w x - 1)\, \eta\mu \frac{1}{x} = 0$

$-1 \le \sigma w x \le 1$

$-2 \le \sigma w x - 1 \le 0$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \text{ημ}x\,\text{συν}\frac{1}{x}$ $\quad \dfrac{\text{συν}\infty}{\text{χτυπάω}}$

$$-1 \le \text{συν}\frac{1}{x} \le 1$$



$$\left|\text{συν}\frac{1}{x}\right| \le 1$$

$$|\text{ημ}x|\left|\text{συν}\frac{1}{x}\right| \le 1 \cdot |\text{ημ}x|$$

$$\left|\text{ημ}x\,\text{συν}\frac{1}{x}\right| \le |\text{ημ}x|$$

$$\boxed{-|\text{ημ}x| \le \text{ημ}x\,\text{συν}\frac{1}{x} \le |\text{ημ}x|}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \lim_{x\to 0} -|\text{ημ}x| = 0 \\ &\cdot \lim_{x\to 0} |\text{ημ}x| = 0 \end{aligned}\right\}$$

Από Κ.Π

$$\lim_{x\to 0} \text{ημ}x\,\text{συν}\frac{1}{x} = 0$$

10. $$\lim_{x \to 0} \left(\ln x \, e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \ln x \, e^{\frac{1}{x}}$$

$$= (-\infty) \cdot e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

11. $$\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 3x) - \ln(x+2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 3x}{x+2} \right) = \ln(+\infty)$$

$$\underline{\underline{= +\infty}}$$

$$\longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

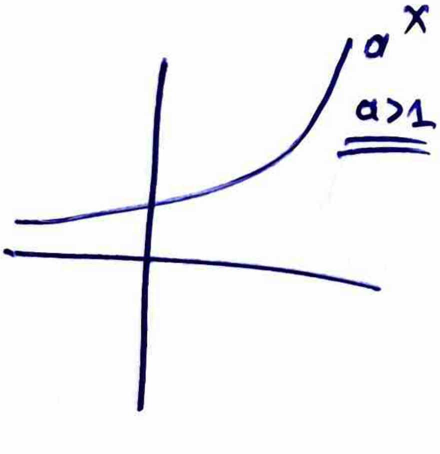
12. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - e^x - 1}{3^x - e^x - 2} =$$

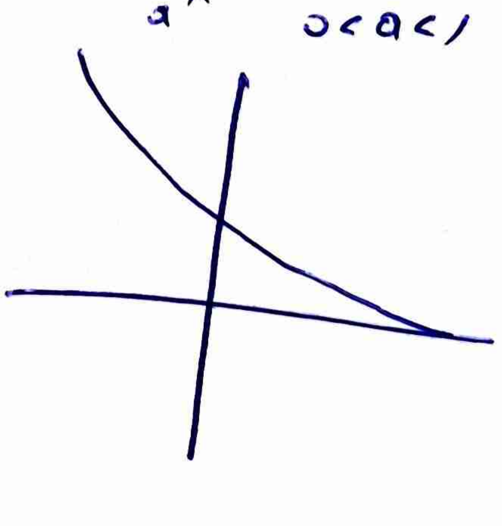
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(\frac{2^x}{e^x} - 1 - \frac{1}{e^x}\right)}{3^x\left(1 - \frac{e^x}{3^x} - \frac{2}{3^x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \overset{0}{\cancel{\left(\frac{e}{3}\right)^x}} \frac{\overset{0}{\cancel{\left(\frac{2}{e}\right)^x}} - 1 - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{e^x}}}}{1 - \overset{0}{\cancel{\left(\frac{e}{3}\right)^x}} - \overset{0}{\cancel{\frac{2}{3^x}}}} =$$

$$= 0 \cdot \frac{0 - 1 - 0}{1 - 0 - 0} = 0 \cdot \frac{-1}{1}$$

$$= 0$$





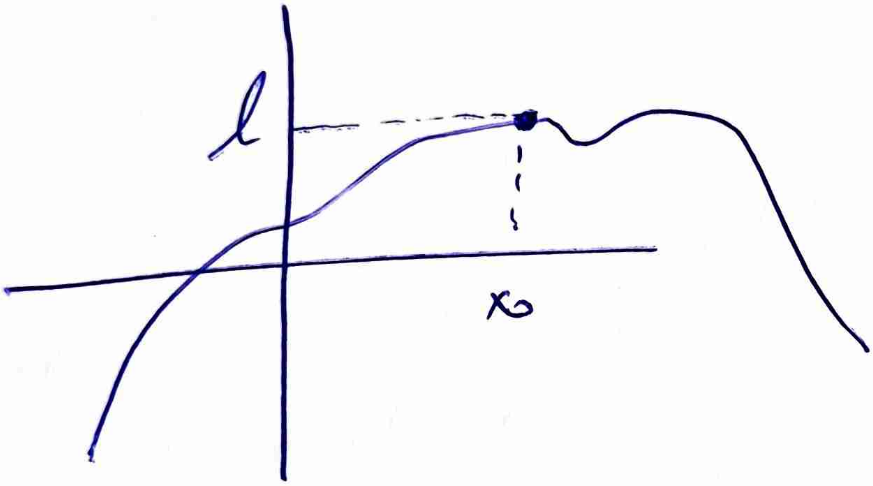
13. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x - e^x}{3^x - 2^x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{2^x}\left(1 - \frac{e^x}{2^x}\right)}{\cancel{2^x}\left(\frac{3^x}{2^x} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \cancelto{0}{\left(\frac{e}{2}\right)^x}}{\cancelto{0}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Συνεχης Συναρτηση

1. Ποτε λεμε οτι η συναρτηση $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0;



$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x \to x_0} f(x) = l \\ &f(x_0) = l\end{aligned}\right\} \quad \boxed{f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

Για να μην είναι συνεχής στο x_0

Πρέπει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

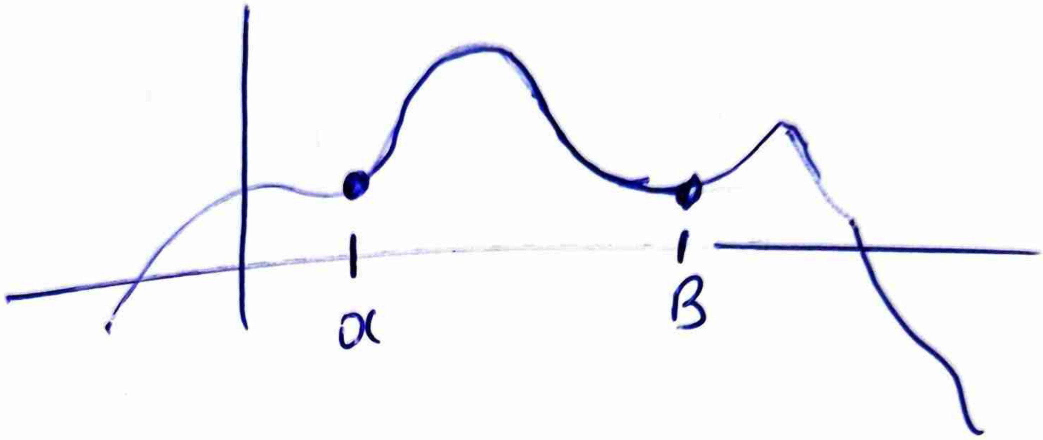
ή

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ να μην υπάρχει.

2. Πότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο (α, β);

Όταν είναι συνεχής δηλαδή $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο το (α, β)

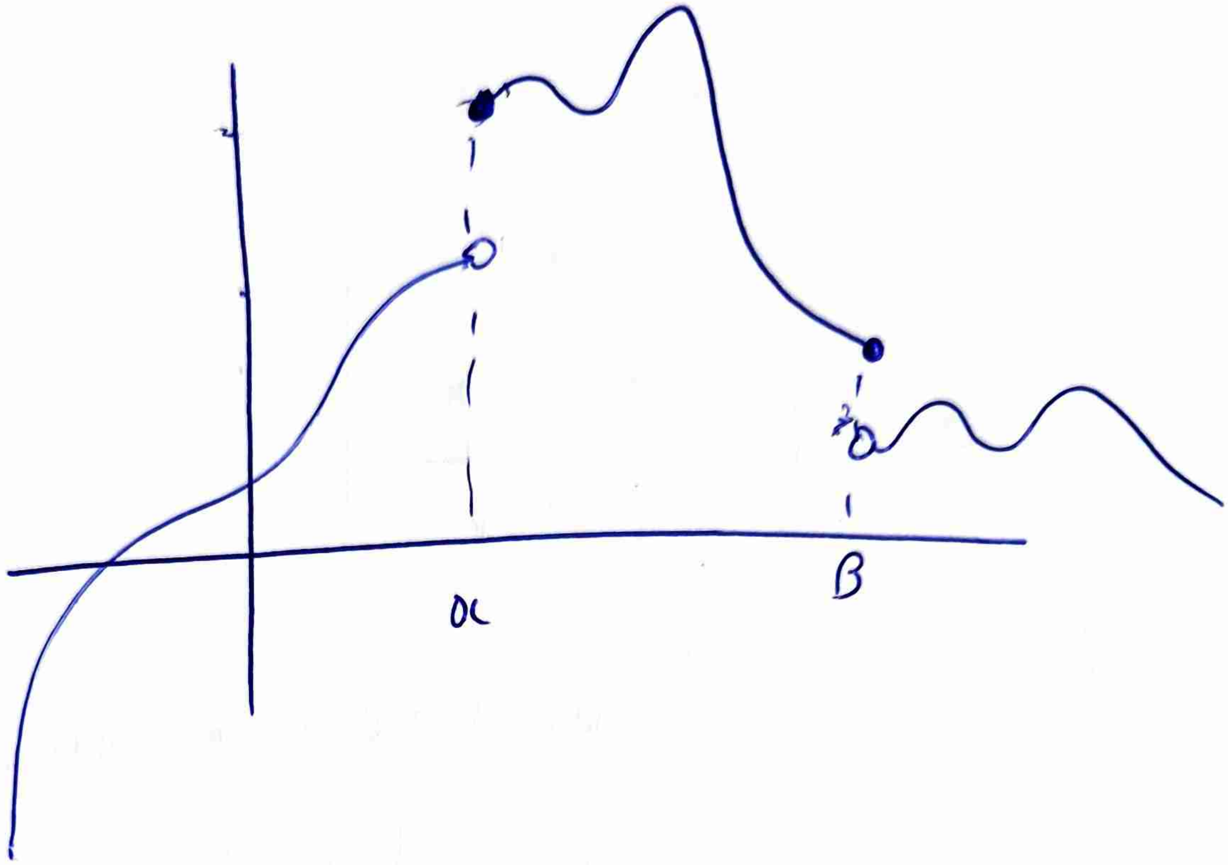
3. Ποτε λεμε οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$.



Πρεπει η $f(x)$ να ειναι συνεχης στο (α, β) και επιπλεον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$$

$$\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$



→ Είναι συνεχής στο α; ΟΧΙ

→ Είναι συνεχής στο β; ΟΧΙ

→ Είναι συνεχής στο (α, β); ΝΑΙ

→ Είναι συνεχής στο [α, β];

Απο τη θεωρια μας γνωριζουμε

οτι ολες οι συναρτησεις που

γνωριζετε π.χ ημx, $\sqrt{x}$, συνx

x^2-6x+8, $\dfrac{x^2-4x+6}{x^3-2x}$, e^{x-2},

$\ln(x^2-5x+6)$

Ειναι συνεχεις!

Και οι πραξεις μεταξυ

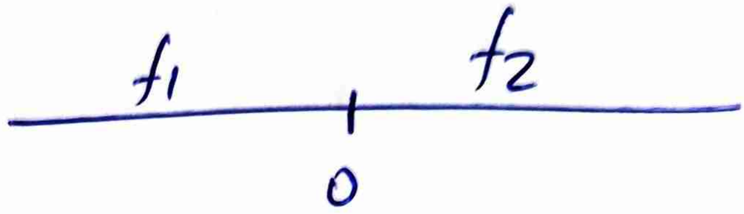
αυτων ειναι επισης

συνεχεις συναρτησεις!

4. (B) $f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

Ενότητα 11

Είναι συνεχής στο 0;



$\lim_{x\to 0} f(x) =$ Το όριο δεν υπάρχει

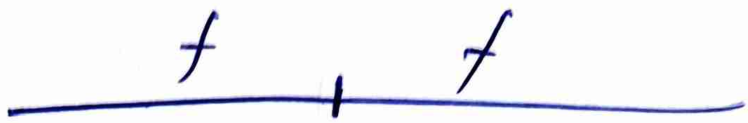
$\rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x + \eta\mu x) = 1 + 0 = 1$

$\rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$

ΟΧΙ Συνεχής

5 $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Είναι συνεχής στο 0;



$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$f(0) = 0$$

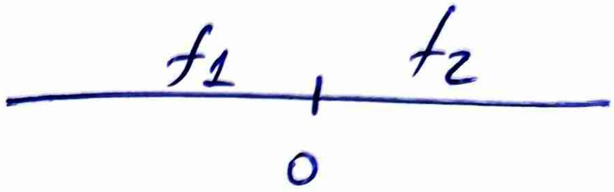
Η $f(x)$ δεν είναι συνεχής

στο 0

γιατί $f(0) \neq \lim_{x\to 0} f(x)$

5. (γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x < 0 \\ \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$

Είναι συνεχής στο 0;



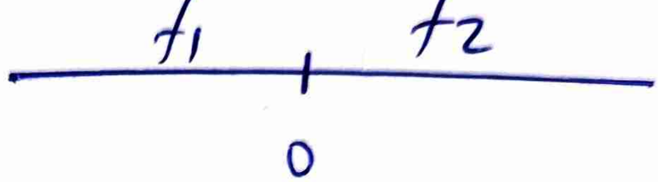
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} \eta\mu x = 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

$$f(0) = \eta\mu 0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ Συνεχής στο 0 (ε) $$f(x)=\begin{cases} x\,ημ\frac{1}{x}, & x<0 \\ συνx, & x\geq 0\end{cases}$$

Είναι συνεχής στο 0;



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\,ημ\frac{1}{x} \overset{ημ\infty}{=\!=}$$ χαστρω

$$-1 \leq ημ\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x \geq x\,ημ\frac{1}{x} \geq x}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to 0^-} -x = 0 \\ &\bullet \lim_{x\to 0^-} x = 0 \end{aligned}\right\}$$ Από Κ.Π. $\lim_{x\to 0^-} x\,ημ\frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} συνx = 1$$ Το όριο δεν υπάρχει

Επομενο Μαθημα

Τεταρτη 10:30

Ασκηση 1

Δινονται οι συναρτησεις

$f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.

$g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

Να βρεθει η $g \circ f$ και η $f \circ g$.

Ασκηση 2

Δινεται $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$, $x > e$

Νδο η $f(x)$ αντιστρεφεται και να

βρειτε την $f^{-1}(x)$

Ασκηση 3

Να υπολογισετων τα ορια.

α) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-2x^2}{5x-4}$

β) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x}{x^2-6x+9}$

γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-1}$

δ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-5x}{x^3+x-2}$

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-3x-2} - 2x$

ζ) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \eta\mu x$

η) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x}$