ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ασκήσεις εξάσκησης – Όλες οι βασικές κατηγορίες

Άσκηση 1 Εφαπτομένη σε γνωστή τετμημένη

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α . $f(x) = x^2 - 5x + 2, \quad x_0 = 3.$

β . $f(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 0.$

γ . $f(x) = \ln(x+3), \quad x_0 = -2.$

Άσκηση 2 Εφαπτομένη με γνωστή τεταγμένη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της που έχει τεταγμένη $y_0 = \ln 2$.

Άσκηση 3 Εφαπτομένη σε σημείο αλλαγής τύπου

Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ και, αν υπάρχει, να βρείτε την εξίσωσή της:

α . $f(x) = \begin{cases} e^{3x} - 1, & x \leq 0, \\ 3x + \text{ημ}^2 x, & x > 0. \end{cases}$

β . $f(x) = \begin{cases} x^2 \, \text{συν}\left(\dfrac{2}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Άσκηση 4 Εφαπτομένη με γνωστή κλίση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία, σε κάθε περίπτωση:

α . σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία $\omega = 45^\circ$,

β . είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : 2x + y - 5 = 0$,

γ . είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $x\widehat{O}y$,

δ . είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Άσκηση 5 Εφαπτομένη που διέρχεται από γνωστό σημείο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε **όλες** τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $M(0, -2)$.

Άσκηση 6 Εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας και να γράψετε κάθε εφαπτομένη στη μορφή $y = \lambda x + \beta$.

Άσκηση 1

$x_0 = 3$

ⓐ $f(x) = x^2 - 5x + 2$

$$\boxed{y - f(3) = f'(3)(x-3)}$$

$f'(x) = 2x - 5$

- $f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 2$

$f(3) = 9 - 15 + 2$

$\underline{\underline{f(3) = -4}}$

- $f'(3) = 2 \cdot 3 - 5$

$f'(3) = 6 - 5$

$\underline{\underline{f'(3) = 1}}$

$y - (-4) = 1 \cdot (x-3)$

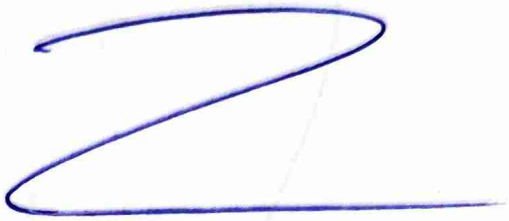
$y + 4 = x - 3$

$$\boxed{y = x - 7}$$

(B) $f(x) = e^{2x}$ $\quad x_0 = 0$

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 1 = 2x$ $\quad y = 2x + 1$



- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0) = 1 \cdot 2 = 2$

$f'(x) = e^{2x} \, 2$

① $f(x) = \ln(x+3)$ $\quad x_0 = -2$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+3}$

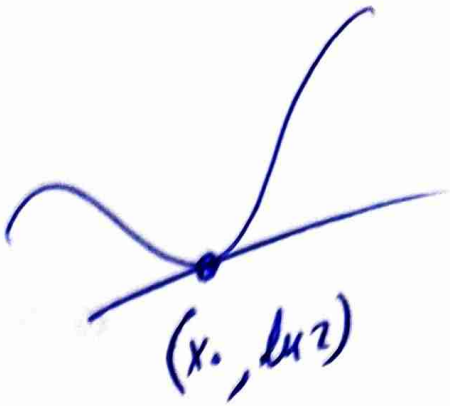
$y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$

- $f(-2) = \ln(-2+3) = \ln 1 = 0$
- $f'(-2) = \dfrac{1}{-2+3} = \dfrac{1}{1} = 1$

$y - 0 = 1 \cdot (x+2)$

$y = x + 2$

Άσκηση 2



$f(x) = \ln(1+e^{2x})$

Βρες την εφαπτομένη ως προς τη γραφική της παράσταση $y_0 = \ln 2$

$f(x) = \ln 2 \Rightarrow \ln(1+e^{2x}) = \ln 2 \Rightarrow 1+e^{2x} = 2$

$e^{2x} = 1$

$x = 0$

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$f(0) = \ln(1+e^0) = \ln 2$

$f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$f'(0) = \dfrac{2e^0}{1+e^0} = \dfrac{2\cdot 1}{1+1} = 1$

$f'(0) = 1$

$y - \ln 2 = 1 \cdot x$

$y = x + \ln 2$

Άσκηση 3

(α) $f(x) = \begin{cases} e^{3x} - 1, & x \le 0 \\ 3x + \eta\mu^2 x, & x > 0 \end{cases}$

$$\boxed{y - f(0) = f'(0)(x-0)}$$

• $f(0) = e^0 - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x} - 1 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{3e^{3x} - 0}{1} = 3e^0 = 3$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x + \eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1}$$

$$= 3$$

$$f'(0) = 3$$

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$$y - 0 = 3(x-0)$$

$$y = 3x$$

(B) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{2}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{2}{x} - 0}{x-0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin\frac{2}{x}$$

$$-1 \le \sin\frac{2}{x} \le 1$$

$$\left|\sin\frac{2}{x}\right| \le 1$$

$$|x|\left|\sin\frac{2}{x}\right| \le |x|$$

$$\left|x\sin\frac{2}{x}\right| \le |x|$$

$$\boxed{-|x| \le x\sin\frac{2}{x} \le |x|}$$

- $\lim\limits_{x\to 0} -|x| = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

} Απ Κ.Π

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{2}{x} = 0.$

$f'(0) = 0$

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 0 = 0(x-0)$

$y = 0$

4. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

45°

(a) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x_0) = \tan 45$

$f'(x_0) = 1$

$f'(x) = 1$

$2x - 2 = 1$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 2\frac{3}{2} + 3$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 3 + 3$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$

$y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2})(x - \frac{3}{2})$

$y - \frac{9}{4} = 1(x - \frac{3}{2})$

$y = x + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}$

$y = x + \frac{3}{4}$

(B) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // $2x + y - 5 = 0$.

Έχουν ίδια κλίση

$y = -2x + 5$

$f'(x_0) = -2$

$f'(x) = -2$

$2x - 2 = -2$

$2x = 0$

$x = 0$

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3$

$f(0) = 3$.

$f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$

$y - 3 = -2x$

$y = -2x + 3$

⑧. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ | $y = x$

$f'(x_0) \cdot 1 = -1$

$f'(x) = -1$

$2x - 2 = -1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

$y - f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

$y - \frac{9}{4} = -1(x - \frac{1}{2})$

$y - \frac{9}{4} = -x + \frac{1}{2}$

$y = -x + \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$

$y = -x + \frac{11}{4}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}$

(8) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // $x' x$

$f'(x_0) = 0$

$f'(x) = 0$

$2x - 2 = 0$

$x = 1$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 2 = 0 \cdot (x - 1)$

$y = 2$

Άσκηση 5

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ⟶ $M(0, -2)$

$-2 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$

$-2 - f(x) = f'(x)(-x)$

$-2 - (x^2 - 3x + 2) = (2x - 3)(-x)$

$-2 - x^2 + 3x - 2 = -2x^2 + 3x$

$x^2 - 4 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -2$

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ $\quad$ $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$

ΚΤΔ.

Άσκηση 6

$$f(x) = \frac{2x-2}{x}$$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ⟶ $(0,0)$

$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$

$-f(x) = f'(x)(-x)$

$$-\frac{2x-2}{x} = -x \cdot \frac{2 \cdot x - (2x-2)}{x^2}$$

$$\frac{2x-2}{x} = \frac{2}{x}$$

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$x \neq 2$.

$2x - 2 = 2$

$2x = 4$

$x = 2$

14. $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 1$ **Ενότητα 17**

- Οι εφαπτομένες της C_f στα $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ είναι κάθετες

Βρείτε το a.

$\varepsilon_1 : y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$\varepsilon_2 : y - f(1) = f'(1)(x-1)$ } 1

Πρέπει $f'(0)\,f'(1) = -1$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 2ax - 1}$$

$f'(0) = -1$

$f'(1) = 3 + 2a - 1 = 2a + 2$

$f'(0)f'(1) = -(2a+2) = -1$

$2a + 2 = 1$

$2a = -1$

$$a = -\frac{1}{2}$$

15. $f(x) = a\ln x + \beta x^2 - \ln a$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$ έχει κλίση 3.

$f(1) = 1$

$\beta - \ln a = 1$

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 2\beta x - 0$

$f'(x) = \frac{a}{x} + 2\beta x$

$f'(1) = \frac{a}{1} + 2\beta = 3$

$a + 2\beta = 3$

$$\begin{cases} B - \ln a = 1 \\ a + 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = 1 + \ln a}$$

$$a + 2(1 + \ln a) = 3$$

$$a + 2 + 2\ln a = 3$$

$$a + 2\ln a - 1 = 0. \Rightarrow \varphi(a) = 0$$

$$\varphi(a) = \varphi(1)$$

$$a = 1$$

$$\varphi(x) = x + 2\ln x - 1$$

Ευκολα $\varphi \nearrow$

$$B = 1$$

17. $f(x) = e^x(x^2+2)$

Νδο δεν υπάρχουν σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες στον $x'x$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \;//\; x'x$$

Αρκεί $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = e^x(x^2+2) + e^x 2x$$

$$f'(x) = e^x(x^2+2x+2)$$

$$e^x(x^2+2x+2) = 0$$

$$\Delta < 0$$

Αδύνατη

16. $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // $x'x$

$f'(x_0) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = 0$

$x^3 - 7x + 6 = 0$

1	0	−7	6	(1)
↓	1	1	−6	
1	1	−6	0	

$(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$

$x = 1$ $\quad x = -3$ $\quad x = 2$

16. $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // $x'x$

$f'(x_0) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = 0$

$x^3 - 7x + 6 = 0$

1	0	−7	6	(1)
↓	1	1	−6	
1	1	−6	0	

$(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$

$x = 1$ $\quad x = -3$ $\quad x = 2$

Bolzano

- f συνεχής $[a,\beta]$
- $f(a)\cdot f(\beta) < 0$

$\exists\, \xi \in (a,\beta)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

ΘΕΤ

- f συνεχής $[a,\beta]$
- $f(a) \neq f(\beta)$

$\forall\, \eta$ μεταξύ $f(a)$ και $f(\beta)$ δηλαδή $f(a) < \eta < f(\beta)$

$\exists\, \xi \in (a,\beta)$ τ.ν $f(\xi) = \eta$

ΘΜΕΤ

- f συνεχής $[a,\beta]$

$m \le f(x) \le M$

$\forall x \in [a,\beta]$.

ΘΜΤ

- f συνεχής $[a,\beta]$
- f παραγωγίσιμη (a,β)

τότε $\exists\, \xi \in (a,\beta)$ τ.ν

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

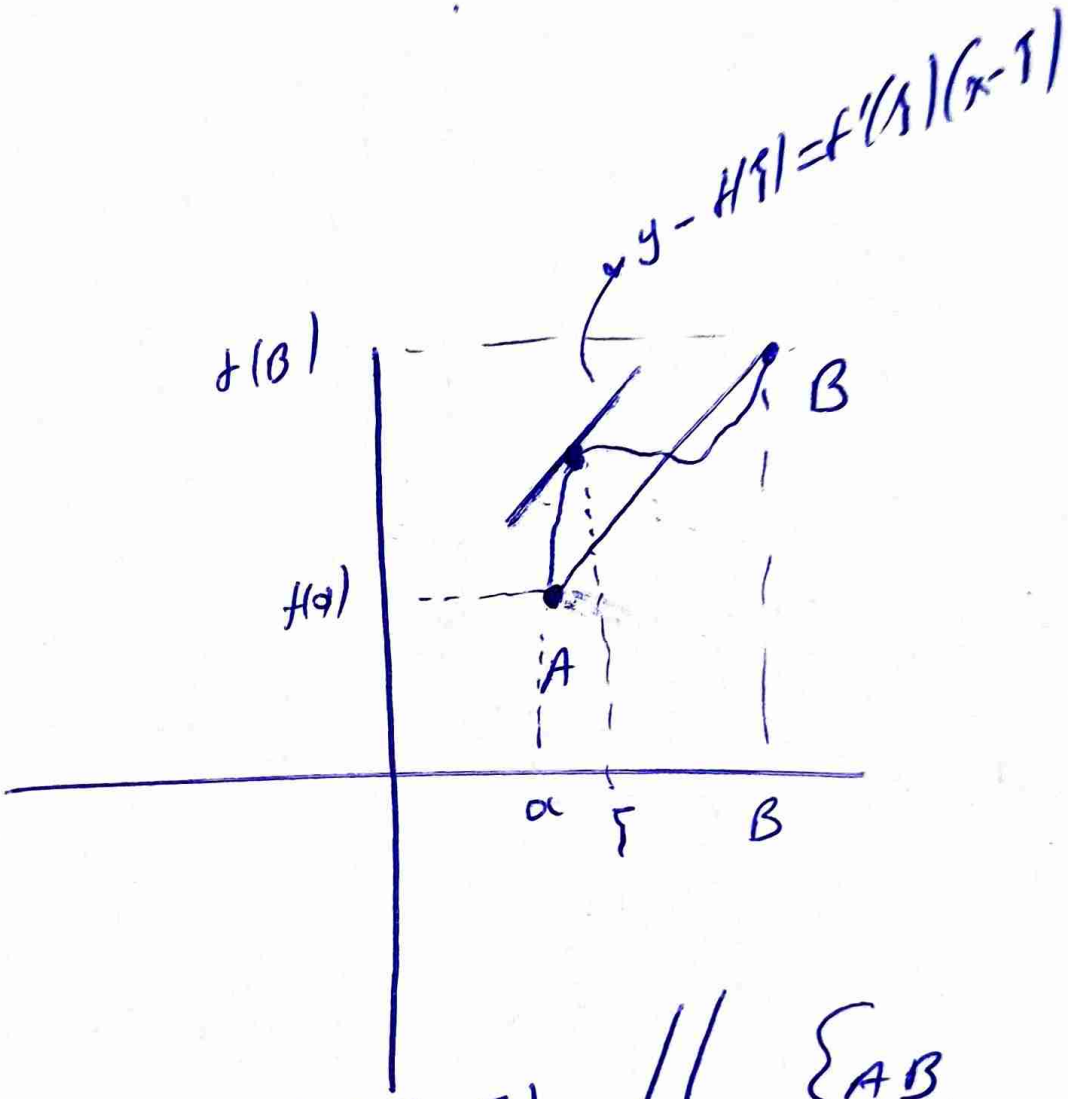
Rolle

- f συνεχής $[a,\beta]$
- f παραγωγίσιμη (a,β)
- $f(a) = f(\beta)$

$\exists\, \xi \in (a,\beta)$ τ.ν $f'(\xi) = 0$.

Θεωρημα Μεσης Τιμης

Θεωρημα Lagrange

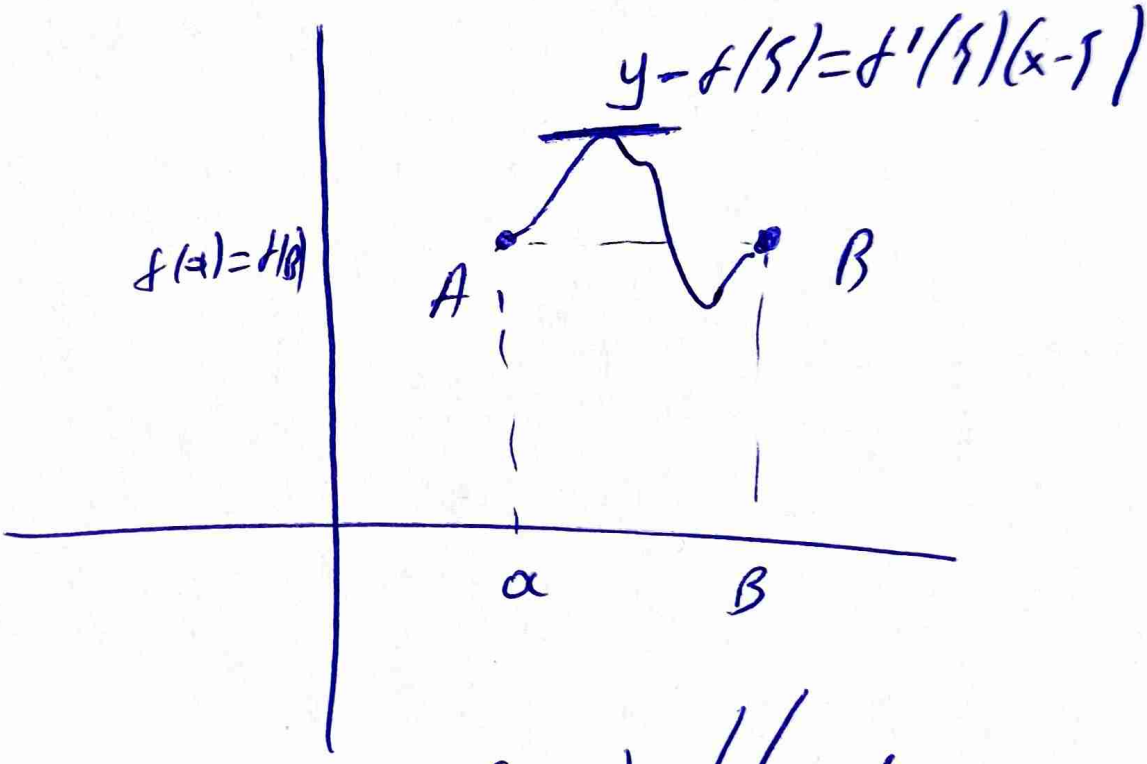


$y - f(\tau) = f'(\tau)(x - \tau)$ // ξ_{AB}

$$f'(\xi) = \lambda_{AB}$$

$$f'(\tau) = \frac{f(B) - f(\alpha)}{B - \alpha}.$$

Rolle



$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ // $x' \times$

$f'(\xi) = 0.$

Fermat

Έστω f ορισμένη στο (α, β)

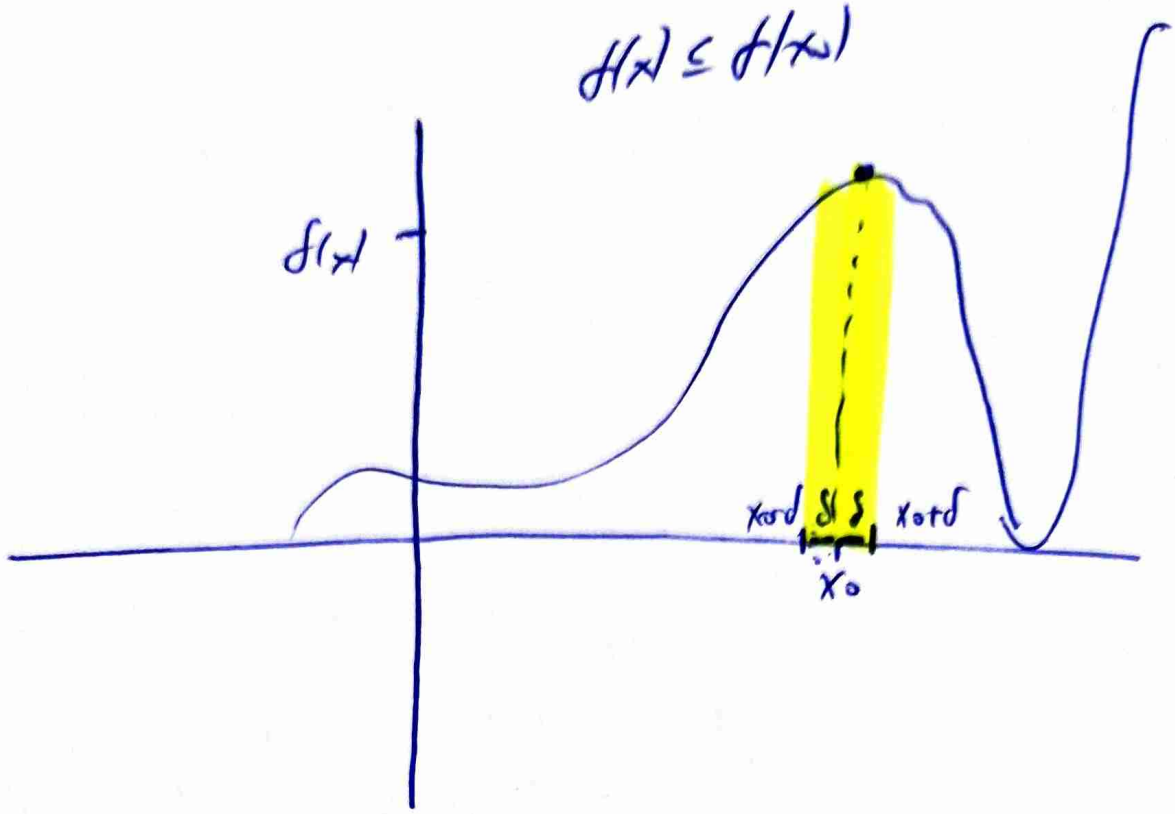
Έστω ότι η $f(x)$ παρουσιάζει

ακρότατο x_0, η f είναι

παραγωγίσιμη στο x_0 και

το x_0 εσωτερικό του (α, β)

Τότε $f'(x_0) = 0$.



$$\lim_{x \to x_0^-} \underset{(-)}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \geq 0 \quad \underset{(-)}{}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \underset{(-)}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \leq 0 \quad \underset{(+)}{}$$

$$\Big\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Αφού η f παραγωγίσιμη στο x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : Πεμπτη 15/10/26.

Ώρα μαθήματος : 17:30

Ασκήσεις

Ενοτητα 17

(2) ολη (10) α

(3) (11)

(5) ολη (12)

(6) ολη (13).

(7)

(8)

παρατηρήσεις