11. (8) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^3+x+2}$ (7) **Εναλλακτικά 8**

1	0	0	1	(-1)
	↓	-1	1	-1
1	-1	1	0	

1	0	1	2	(-1)
	↓	-1	1	-2
1	-1	2	0	

(4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+2)} = \dfrac{3}{4}$

(1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4-81}{x^3-27} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2-9)(x^2+9)}{(x-3)(x^2+3x+9)} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)(x^2+9)}{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)} = \dfrac{6 \cdot 18}{27}$

$= \dfrac{6 \cdot 2}{3} = 4.$

9. (0/2) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2+x}{4x^2-1} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}$

$= \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x}{2x-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-2}$

$= \frac{1}{4}$

пробуем

4	0	-1	$-\frac{1}{2}$
↓	-2	1	
4	-2	0	

$(x+\frac{1}{2})(4x-2)$

$(2x+1)(2x-1)$

13. (B) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{5-x} = \lim_{x\to 5} \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(5-x)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$

$= \lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x}^2-\sqrt{5}^2}{-(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \lim_{x\to 5} \dfrac{\cancel{x-5}}{-\cancel{(x-5)}(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$

$= \dfrac{1}{-2\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}^2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

14. (a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{1-3x}+2x}{x^2-1} =$

$= \lim_{x\to -1} \dfrac{(\sqrt{1-3x}+2x)(\sqrt{1-3x}-2x)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1-3x}-2x)} =$

$= \lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{1-3x}^2-(2x)^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1-3x}-2x)}$

$= \lim_{x\to -1} \dfrac{1-3x-4x^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1-3x}-2x)}$ (A)

$$-4x^2-3x+1 = (x+1)(-4x+1)$$

-4	-3	1	(-1)
$\downarrow$	4	-1	
-4	1	0	

(#) $$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(-4x+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1-3x}-2x)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-4x+1}{(x-1)(\sqrt{1-3x}-2x)}$$

$$= \frac{4+1}{-2\cdot(2+2)} = \frac{5}{-8}.$$

20. (γ) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9-\sqrt{x^2-6x+9}}{|x-1|-2} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)-|x-3|}{x-3}$

x	3
$x-3$	$- \quad 0 \quad +$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{(x-3)(x+1)+(x-3)}{x-3} = \dfrac{3+1+1}{1} = 5$

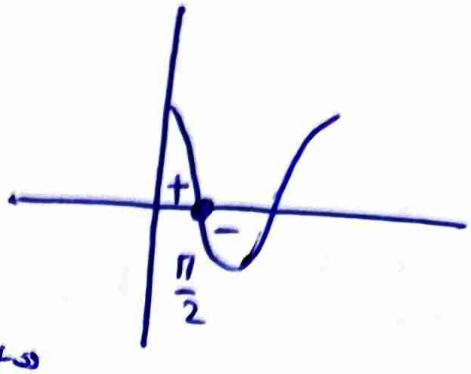
$\rightarrow \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{(x-3)(x+1)-(x-3)}{x-3} = \dfrac{4-1}{1} = 3$

Το όριο δεν υπάρχει.

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

7. (29) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}$ εφx =

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$



$\rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$

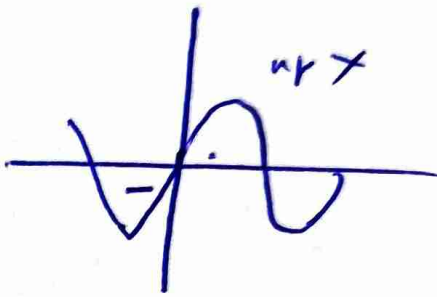
$\rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$

Το όριο δεν υπάρχει.

8. (B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\ln x}, & x \in (-\pi, 0) \\ \dfrac{x+1}{\cos x}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-1}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1)\dfrac{1}{\ln x}$

$= -1 \cdot (-\infty) = +\infty$



$\rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+1}{\frac{\ln x}{\sin x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(x+1)\sin x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1)\sin x \dfrac{1}{\ln x}$

$= 1 \cdot (+\infty) = +\infty$

$+\infty$

9. (B) $\lim_{x \to 0} \frac{1+\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} (1+\sqrt{x}) \frac{1}{\ln x}$

$= 1 \cdot (+\infty) = +\infty$

Εναλλακτικά 10

6. (δ2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{+\infty} = 0$

8. (β) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x^3-2x+3|+x-1}{x^4+2x+2} =$ (−)

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3+2x-3+x-1}{x^4+2x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^4}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0.$

9. (δ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \sqrt{+\infty} - (-\infty)$

$= +\infty + \infty = +\infty.$

(δ2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+0}{-(1+0)}$

$= -1$

10. ⑧ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x+1}-3x\right)}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+x+1}\right)^2-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{9x^2+x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x} = \frac{1}{-3-3}$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

Εφαρμογή ορίων με ανισότητες

---

1. Έστω $2\eta\mu(x-1) \le (x-1)f(x) \le x^2-1$

ψάχνω το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Για $x<1$

$$\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \ge f(x) \ge \frac{x^2-1}{x-1}$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2\eta\mu(x-1)}{x-1} \overset{\substack{x-1=t \\ x\to 1^- \\ t\to 0}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{2\eta\mu t}{t} = 1\cdot 2 = 2$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2.$$

Για $x>1$

$$\frac{2\eta\mu(x-1)}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{x^2-1}{x-1}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

2. Έστω $f(x) \le x^3 - x$.

Ψάχνω το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Αφού $f(x) \le x^3 - x$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \le \lim_{x \to -\infty} x^3 - x$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \le -\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3. Έστω $x f(x) \le \eta\mu x + x^2 - 4x$

Ψάχνω το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ το οποίο είναι γνωστό ότι υπάρχει.

Για $x < 0$

$$f(x) \ge \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \ge \lim_{x \to 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) \ge -3}$$

Για $x > 0$

$$f(x) \le \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \le \lim_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) \le -3}$$

Αφού το όριο υπάρχει τότε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -3$$

Άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$.

4. $f^2(x) + 2x \le 2x f(x) + 1$

Αν το $\lim_{x \to 1} f(x)$ υπαρχει να το βρω.

$$f^2(x) - 2x f(x) \le 1 - 2x$$

$$f^2(x) - 2x f(x) + x^2 \le x^2 - 2x + 1$$

$$(f(x) - x)^2 \le (x-1)^2$$

$$|f(x) - x| \le |x-1|$$

$$-|x-1| \le f(x) - x \le |x-1|$$

$$\boxed{x - |x-1| \le f(x) \le x + |x-1|}$$

- $\lim_{x \to 1} x - |x-1| = 1$
- $\lim_{x \to 1} x + |x-1| = 1$

} Από κ.π.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$

Βασικά όρια

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1$ όπου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sigma\upsilon\nu f(x) - 1}{f(x)} = 0$ όπου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Πρόσοχη

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

44. $x - x^2 \le f(x) \le x^2 + x$

Ενότητα 8

(α) Βρείτε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

Για $x < 0$

$$\frac{x - x^2}{x} \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{x^2 + x}{x}$$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x - x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(1-x)}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1$

Άρα κ.π. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 1}$

Για $x > 0$

ομοίως $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1}$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1.$

⑥ Βρε $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

⑦ $\lim_{x \to 0} \frac{x + f(x)}{2x - f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x} + \frac{f(x)}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{f(x)}{x}} = \frac{1+1}{2-1}$

$$= 2$$

⑧ $\lim_{x \to 0} \frac{x f(x) + \sqrt{x^2+1} - 1}{\eta\mu^2 x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x} \frac{f(x)}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2}}{\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

Βοηθητικές Συναρτήσεις

Έστω $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{xf(x) - x^2+1}{x^2-1} = 3$

Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Θέτουμε Βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = \frac{xf(x) - x^2+1}{x^2-1} \quad \text{άρα} \quad \lim_{x\to 1} g(x) = 3$$

$$g(x)(x^2-1) = xf(x) - x^2+1$$

$$f(x) = \frac{g(x)(x^2-1) + x^2 - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)(x^2-1)+x^2-1}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

38. Γνωρίζω ότι $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-1}{x-2} = 3$

(α) Βρίσκω $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-2}$ άρα $\boxed{f(x) = g(x)(x-2)+1}$

επίσης $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x)(x-2)+1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 1}$$

(β) $$\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2-x)-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x^2-x)-1}{(x^2-x)-2} \cdot \frac{(x^2-x)-2}{x-2}$$

$$= 3 \cdot 3 = 9$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{f(x^2-x)-1}{x^2-x-2} \overset{\substack{x^2-x=t \\ x \to 2 \\ t \to 2}}{=\!=\!=} \lim_{t \to 2} \frac{f(t)-1}{t-2} = 3$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$$

37. $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - 3}{h} = 5$

(a) Βρείτε $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - 3}{h} \xrightarrow{\substack{2+h = t \\ h = t-2 \\ h \to 0 \\ t \to 2}} \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - 3}{t-2}$$

Άρα $\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 3}{x-2} = 5}$

$$g(x) = \frac{f(x) - 3}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 5$$

$$f(x) = g(x)(x-2) + 3$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x)(x-2) + 3$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

(A) $\lim_{h\to 0} \frac{f(2-3h)-3}{h}$ $\xrightarrow{2-3h=x}$ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-3}{-\frac{x-2}{3}}$

$-3h = x-2$

$h = -\frac{x-2}{3}$

$h \to 0$

$x \to 2$

$= \lim_{x\to 2} -3\,\frac{f(x)-3}{x-2} = -3 \cdot 5 = -15$

(B) $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-3+3-f(2-h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-3}{h} - \frac{f(2-h)-3}{h}$

$= 15 - (-5) = 20.$

$$\rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-3}{h} \quad \begin{matrix} 2+3h=t \\ \hline 3h=t-2 \\ h=\frac{t-2}{3} \\ h\to 0 \\ t\to 2 \end{matrix} \quad \lim_{t\to 2} \frac{f(t)-3}{\frac{t-2}{3}}$$

$$= \lim_{t\to 2} 3\,\frac{f(t)-3}{t-2} = 3\cdot 5 = 15$$

$$\rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-3}{h} \quad \begin{matrix} 2-h=x \\ \hline h=2-x \\ h\to 0 \\ x\to 2 \end{matrix} \quad \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-3}{2-x}$$

$$= -\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = -5$$

42. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3$

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2+x)}{x^2+x} \dfrac{x^2+x}{x}$ (*)

$\to \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2+x)}{x^2+x} \underset{\substack{x \to 0 \\ t \to 0}}{=\!=\!=} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 3.$

$\to \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1$

(*) $3 \cdot 1 = 3.$

(B) $$\lim_{x \to 0} \frac{f^2(x) + x f(x) + x \ln x}{f^2(x) + x^2 + \ln^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{x}{x}\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{x}\frac{\ln x}{x}}{\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{\ln^2 x}{x^2}} =$$

$$= \frac{9 + 3 + 1}{9 + 1 + 1} = \frac{13}{11}$$

28. Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu\frac{x}{x^2+1} = \eta\mu 0 = 0$

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

29. Ⓑ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+1}+x\right]\eta\mu x$ — $\frac{\text{φραγμένη}}{\text{απ άπειρο}}$

$-1 \le \eta\mu x \le 1$

$|\eta\mu x| \le 1$

$\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| |\eta\mu x| \le \left|\sqrt{x^2+1}+x\right| \cdot 1$

$\left|\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\eta\mu x\right| \le \left|\sqrt{x^2+1}+x\right|$

$$-\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| \le \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\ln x \le \left|\sqrt{x^2+1}+x\right|$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= 0$$

- $\lim_{x\to-\infty} -\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| = -|0| = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \left|\sqrt{x^2+1}+x\right| = |0| = 0$

Άρα κ.λ.π. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\ln x = 0$

32. Ⓑ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}+\sin x\right)$ **sin∞**

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\frac{x^2}{x+1}-1 \le \frac{x^2}{x+1}+\sin x \le \frac{x^2}{x+1}+1$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}-1 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}+1 = -\infty$

Άρα κ.ν $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}+\sin x = -\infty$

33. (B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2-\eta\mu x}$ — ημ∞

$$-1 \le \eta\mu x \le 1$$

$$1 \ge -\eta\mu x \ge -1$$

$$3 \ge 2-\eta\mu x \ge 1$$

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2-\eta\mu x} \le 1$$

$$\frac{x^2}{3} \le \frac{x^2}{2-\eta\mu x} \le x^2$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

} Από Κ.Π

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2-\eta\mu x} = +\infty$$

30. ⑧ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ — $\sin\infty$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$|\sin x| \le 1$$

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| |\sin x| \le 1 \cdot \left|\sin \frac{1}{x}\right|$$

$$\left|\sin \frac{1}{x} \sin x\right| \le \left|\sin \frac{1}{x}\right|$$

$$\boxed{-\left|\sin \frac{1}{x}\right| \le \sin \frac{1}{x} \sin x \le \left|\sin \frac{1}{x}\right|}$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} -\left|\sin \frac{1}{x}\right| = 0$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left|\sin \frac{1}{x}\right| = 0$

По К.П $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin \frac{1}{x} \sin x = 0$.

30. (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu x = 1+0$

$= 1$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=t,\ x\to+\infty,\ t\to 0}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1.$

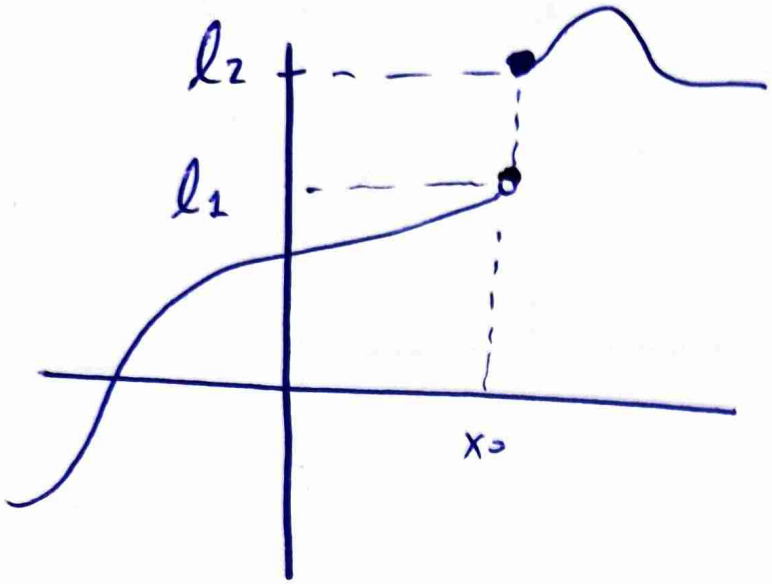
$\rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} \overset{\text{κραση}}{=\!=}$

$-1 \le \eta\mu x \le 1$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

} Αν $x.\Gamma$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$

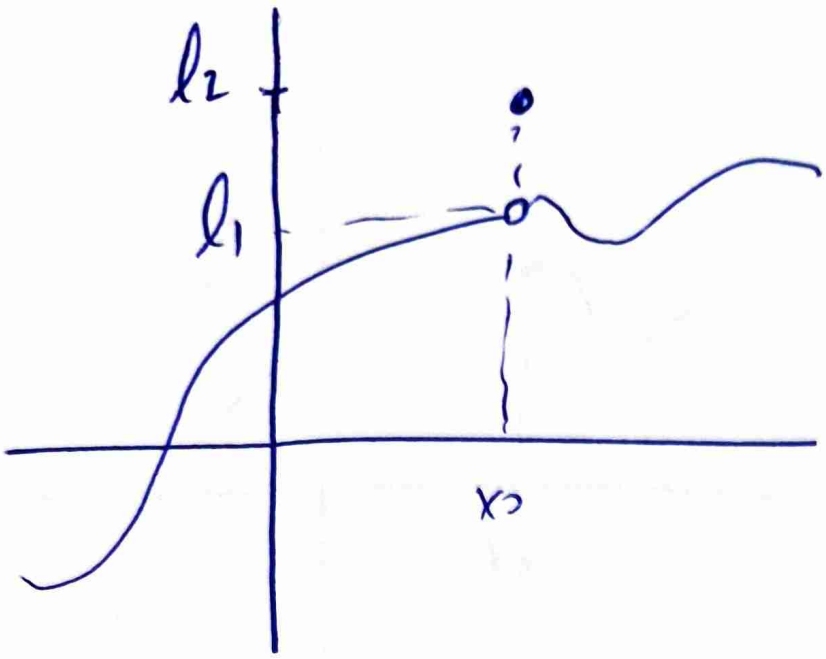


$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \\ &\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ δεν υπάρχει.}$$

$$f(x_0) = l_2$$

Το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει πραγματική

η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο x_0.



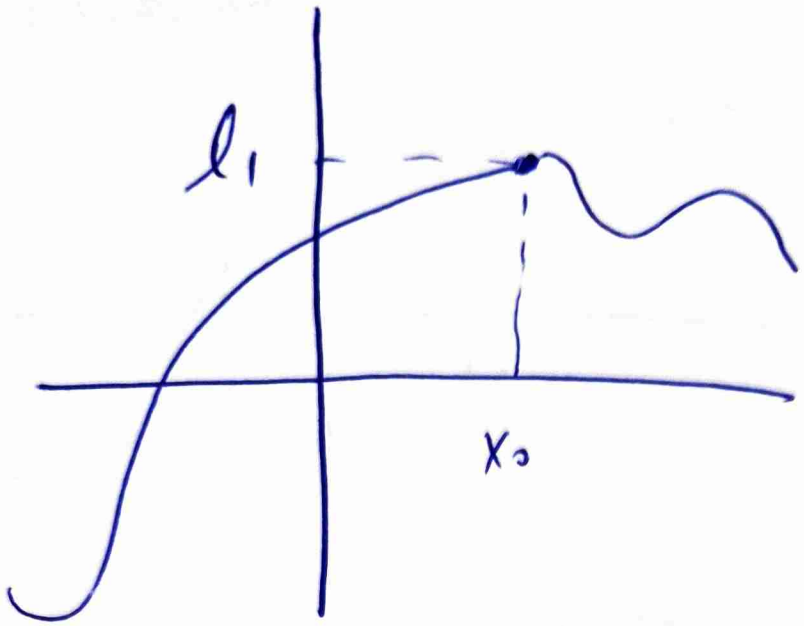
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$

$f(x_0) = l_2$

$f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο x_0



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$$

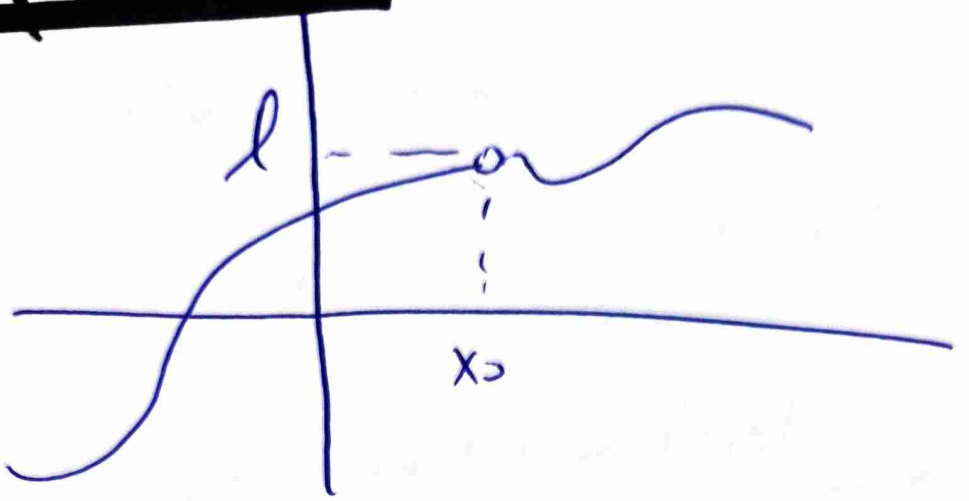
$$\Big\} \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$$

$$f(x_0) = l_1$$

$$\boxed{f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

Συνεχώς στο x_0

Προσοχή



- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Το $f(x_0)$ δεν ορίζεται γιατί το

$x_0 \notin D_f$.

Συνεπώς η συνάρτηση είναι

συνεχή στο πεδίο ορισμού της,

Πότε η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0;

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Πότε η $f(x)$ είναι συνεχής στο (a,β);

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο (a,β) αν είναι συνεχής $\forall x_0 \in (a,\beta)$



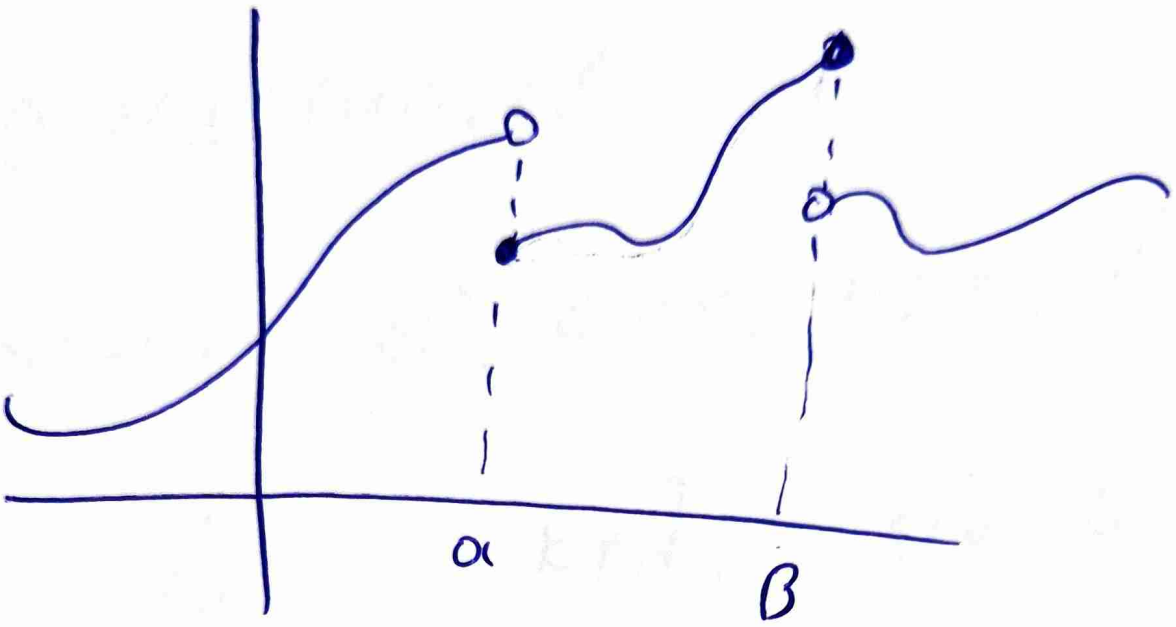
Πότε η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]$;

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ αν είναι συνεχής στο (a,β) και ισχύουν

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$f(\beta) = \lim_{x \to \beta^-} f(x).$$

Προσοχή



Είναι συνεχή στο α; ΟΧΙ

Είναι συνεχή στο β; ΟΧΙ

Είναι συνεχή στο (α,β); ΝΑΙ

Είναι συνεχή στο [α,β]; ΝΑΙ.

Όλες οι γνωστές

συναρτήσεις π.χ

x^2-5x, e^x, $\sin x$, $\eta\mu x$, $\sqrt{x}$

$\ln x$ κτλ. είναι συνεχείς.

Και οι πράξεις μεταξύ

τους είναι συνεχείς

επίσης.

8. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$

f_1 | f_2 — σημείο: 0

(α) Είναι συνεχή;

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2+1 = 1$

Το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Η $f(x)$ δεν συνεχή στο 0!

Είναι συνεχή στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ως Πράξεις Συνεχών Συναρτήσεων.

(B) Είναι συνεχής στο $[0,1]$;

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως Π.Σ.Σ ✓



$f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ } ✓

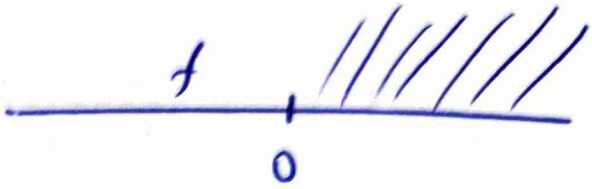
$f(1) = 2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ } ✓

Άρα συνεχής στο $[0,1]$ ✓

21. ⓐ $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

- $f(0) = 0$



- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ Συνεχώς στο 0!

ⓑ $f(x) = \begin{cases} xe^{1-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ \ln(1+x^2), & x \le 0 \end{cases}$ ✓

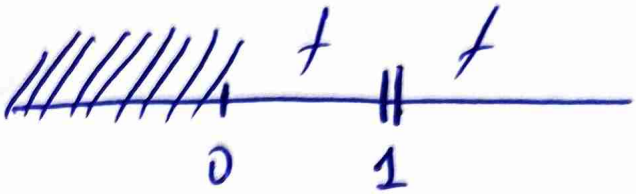


$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1+x^2) = 0$

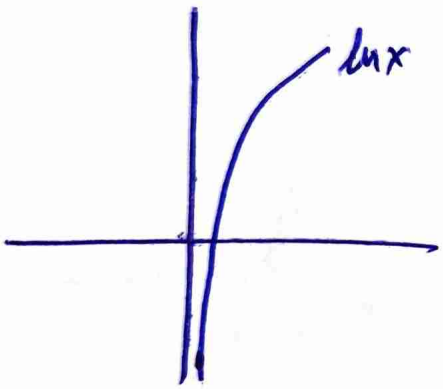
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} xe^{1-\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ✓ $f(0) = \ln 1 = 0$

21. ① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x}, & 0 < x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln x} =$$



$$= 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = 0.$$

$f(0) = 0$ ✓

21. ⑧ $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}, & x > 0 \\ \sin x, & x \le 0 \end{cases}$

f_1	f_2
0	

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\to \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

$$= -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : 15/10/26

Ώρα μαθήματος : 9

Ασκήσεις

Ενοτητα 8

21 α β

22

23

36

39

43

55

Ενοτητα 10

11

13

14

15.

28 α

29 α

30 α β

32 α

33 α.

παρατηρήσεις