

12

3. Νόο η εξίσωση $e^x = 2 - x$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

$$\underbrace{e^x - 2 + x}_{f(x)} = 0$$

Η $f(x)$ συνεχής

στο $[0,1]$

ω/ η.σ.σ

$$f(0) = e^0 - 2 + 0 = -1 < 0$$

$$f(1) = e - 1 > 0$$

Αφού $f(0) \cdot f(1) < 0$ Βολταιε

$\exists \xi \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi) = 0$.

$$e^\xi = 2 - \xi.$$

$$6. \textcircled{B} \text{ NĐ } \exists a \in (0, 1) \text{ t.w. } \eta \mu a = a - 1$$

$$\eta \mu x = x - 1$$

$$\underbrace{\eta \mu x - x + 1 = 0}$$

$$f(x)$$

H $f(x)$ συνεχής

στο $[0, 1]$ μ.δ.ρ

$$f(0) = \eta \mu 0 - 0 + 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = \eta \mu 1 - 1 + 1 = -1 + 1 < 0$$

$$\text{Άρα } f(0) f(1) < 0$$

$$\text{Βολτς } \exists a \in (0, 1) \text{ t.w. } f(a) = 0$$

$$\eta \mu a = a - 1$$



7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$$\underbrace{f(\mathbb{R}) = (1, 2)}$$

Νόμο συνέλιξης $f(x) = 2 - x$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\leq T_f = (1, 2)$$

έχει το πολύ έναν ριζό

$$\underline{1 < f(x) < 2}$$

$$\text{σε } (0, 1).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\underbrace{f(x) - 2 + x}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής

σε $[0, 1] \cup \text{π.δ.δ}$

$$g(0) = f(0) - 2 < 0$$

$$1 < f(0) < 2$$

$$g(1) = f(1) - 1 > 0$$

$$\boxed{-1 < f(0) - 2 < 0}$$

$$g(0)g(1) < 0$$

$$1 < f(1) < 2$$

Bolzano $\exists \xi \in (0, 1)$

$$\boxed{0 < f(1) - 1 < 1}$$

$$\text{T.W } g(\xi) = 0$$

$$\underline{f(\xi) = 2 - \xi}$$

8. (δ) Νόσ η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 1$

έχει ταλαντίζον μια ρίζα $(1, 2)$.

$$e^x(x-2) + (x-1)\ln x = (x-1)(x-2)$$

$$\underbrace{e^x(x-2) + (x-1)\ln x - (x-1)(x-2)}_{f(x)} = 0$$

$f(x)$

Η $f(x)$ συνεχής $[1, 2]$ με π.σ.σ.

$$f(1) = -e < 0$$

$$f(2) = \ln 2 > 0$$

$f(1)f(2) < 0$ Βόλτσα $\exists \xi \in (1, 2)$

τ.μ $f(\xi) = 0$.

$$\frac{e^\xi}{\xi-1} + \frac{\ln \xi}{\xi-2} = 1 \quad \checkmark$$

11. ⑧ Νόσ η εξίσωση $\ln x = \frac{2}{x}$ έχει
ακριβώς μια ρίζα στο $[1, e]$.

$$\underbrace{x \ln x - 2}_{f(x)} = 0$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[1, e]$ ν.δ.ν.

$$f(1) = -2 < 0$$

$$f(e) = e \ln e - 2 = e - 2 > 0$$

$f(1) \cdot f(e) < 0$ Βολωας $\exists \xi \in (1, e)$

τ.ν $f(\xi) = 0$.

$$\ln \xi = \frac{2}{\xi} \quad \text{το } \{ \text{πρωτισο.} \}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet x_1 < x_2 \\ \bullet x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \end{array} \right\} \textcircled{\bullet} x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$$

$$x_1 \ln x_1 - 2 < x_2 \ln x_2 - 2$$

$$\forall x > 1 \quad \text{το } \ln x > 0, \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$f \nearrow$

13. Διευκριν $f(x) = e^x + 2x - 3$, $x \in [0, 1]$

Ν/ο Τελευταίου των $x'x$ ποσοδίου υπο.

$f(x) = e^x + 2x - 3$ συνεχής $[0, 1]$ αλ η.δ.ν.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 - 3 = -2 < 0 \\ f(1) = e - 1 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(0)f(1) < 0 \\ \text{Bolzano } \exists x_0 \in (0, 1) \end{array}$$

Τ.ν $f(x_0) = 0$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \quad (+)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad f \nearrow$$

Συνεχ x_0 του Bolzano
αλ η.δ.ν.

15. $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής $f \neq$

$$0 < f(x) < 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

Νόο η (f) τέρνη τη $\exists y = x$

αρχιΒυλ ριη φορσ σς $(0,1)$

$$f(x) = x \Rightarrow \underbrace{f(x) - x}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής σς $[0,1]$ w.n.s.f.

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 < 0$$

$$0 < f(0) < 1$$

$$0 < f(1) < 1$$

$$\text{Αρα } g(0) g(1) < 0$$

$$-1 < f(1) - 1 < 0$$

Βολζαο $\exists \xi \in (0,1)$

$$\text{τ.ο } g(\xi) = 0$$

$$f(\xi) = \xi$$

ξ μονωδικο

$g \nabla$

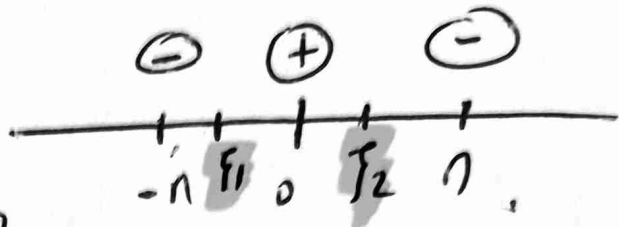
Μονωδικο $g(x)$

$$\begin{aligned} \cdot x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \cdot x_1 < x_2 &\Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad (+) \end{aligned}$$

17. (a) Νόμο η συνεχούς

$$\sigma \omega x = x(x - \eta x) \text{ εχρησιμοποιώντας}$$

Συνήθως στο $(-n, n)$.



$$f(x) = \sigma \omega x - x(x - \eta x)$$

Η $f(x)$ συνεχώς στο $[-n, 0]$ και $[0, n]$ με η.δ.ν

$$f(-n) = \sigma \omega(-n) + n(-n - \cancel{\eta(-n)})$$

$$f(-n) = \sigma \omega n - n^2 = -1 - n^2$$

$$f(0) = \sigma \omega 0 - 0 = 1$$

$$f(n) = \sigma \omega n - n(n - \cancel{\eta n}) = -1 - n^2$$

$f(-n) \cdot f(0) < 0$ Βολτανο $\exists \xi_1 \in (-n, 0)$

$$\text{T.υ } f(\xi_1) = 0$$

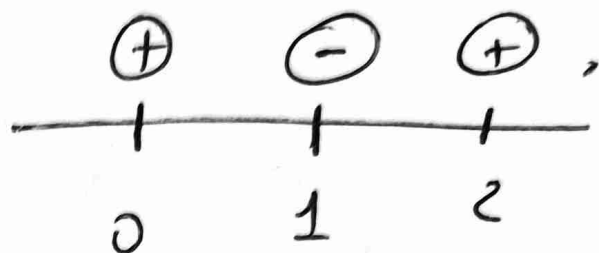
$f(0) \cdot f(n) < 0$ Βολτανο $\exists \xi_2 \in (0, n)$

$$\text{T.υ } f(\xi_2) = 0$$

19. $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - x, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 1, & x > 1 \end{cases}$

Надо найти интервалы $f(x) = 1$ и $x=2$ ^{2 p. 2/}
 экстрем. _(0, 2)

$\varphi(x) = f(x) - 1$



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{1-x} - x = 1 - 1 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x + x - 1 = 0$ } $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

$f(1) = 0$ Тоже f совпадает с 1.

И $\varphi(x)$ совпадает с 0 на $[0, 1]$ и на $[1, 2]$
 w/ n. s. r.

$\varphi(0) = f(0) - 1 = e^{1-0} - 0 - 1 = e - 1 > 0$

$\varphi(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 < 0$

$\varphi(2) = f(2) - 1 = \ln 2 + 2 - 1 = 1 + \ln 2 > 0$

$\varphi(0)\varphi(2) < 0$ Βολανω $\exists \tau_1 \in (0,1)$ τ.ω $\varphi(\tau_1) = 0$

$\varphi(1)\varphi(2) < 0$ Βολανω $\exists \tau_2 \in (1,2)$ τ.ω $\varphi(\tau_2) = 0$

$$\underline{x < 1}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad \text{---} \oplus \quad f \downarrow$$

στο $[0,1]$
αρα το τ_1
πασιτω

$$\underline{x > 1}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$$

$\oplus$

$$x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2$$

$$x_1 + \ln x_1 - 1 < x_2 + \ln x_2 - 1$$

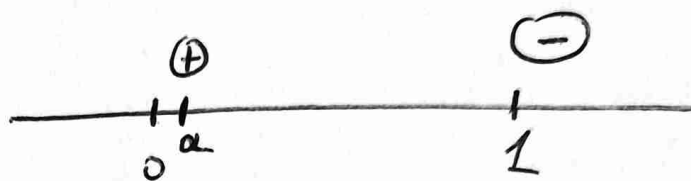
$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f \nearrow \text{ στο } [1,2] \text{ το } \tau_2 \text{ πασιτω}$$

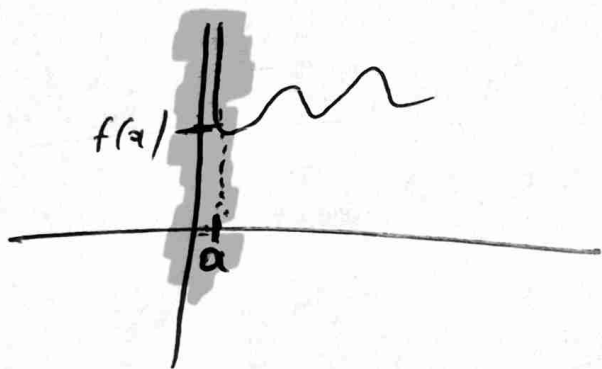
25 Νόσ η εἰσωση $e^{\frac{1}{x}} = x+2$

εἶναι πάλι ρίζα $(0,1)$.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x - 2$$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{+\infty} - 0 - 2 = +\infty$ ἀρα $\exists \alpha > 0$ κοντά στο 0^+



τ.ω $f(a) > 0$

Η f συνεχής
 $[a, 1]$ με π.ν.δ.

$$f(1) = e - 3 < 0$$

$$f(a) f(1) < 0$$

Bolzano $\exists \xi \in (a, 1)$ τ.ω $f(\xi) = 0$



21. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Νόο υπάρχει το μέγιστο σε

$$x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ τ.ω } f(\sin x_0) = \sin x_0.$$

$$f(\sin x) = \sin x$$

$$\underbrace{f(\sin x) - \sin x}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής σε $[0, \frac{\pi}{2}]$ με π.σ.σ.

$$g(0) = f(\sin 0) - \sin 0 = f(0) \geq 0$$

$$0 \leq f(0) \leq 1$$

$$g(\frac{\pi}{2}) = f(\sin \frac{\pi}{2}) - \sin \frac{\pi}{2} = f(1) - 1 \leq 0.$$

$$0 \leq f(1) \leq 1$$

$$-1 \leq f(1) - 1 \leq 0$$

$$g(0) \cdot g(\frac{n}{2}) \leq 0$$

$$g(0) \cdot g(\frac{n}{2}) < 0$$

$$\vee \quad g(0) \cdot g(\frac{n}{2}) = 0$$

$$g(0) = 0 \quad \vee \quad g(\frac{n}{2}) = 0$$

Bolzano

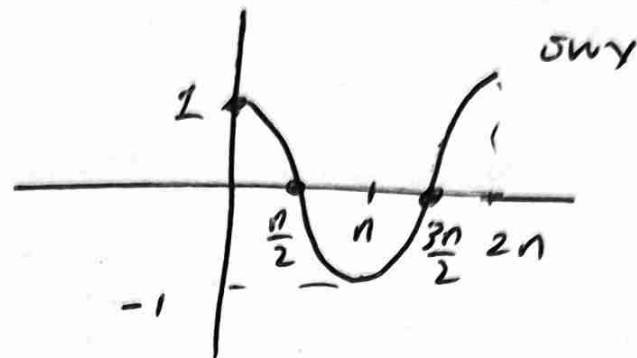
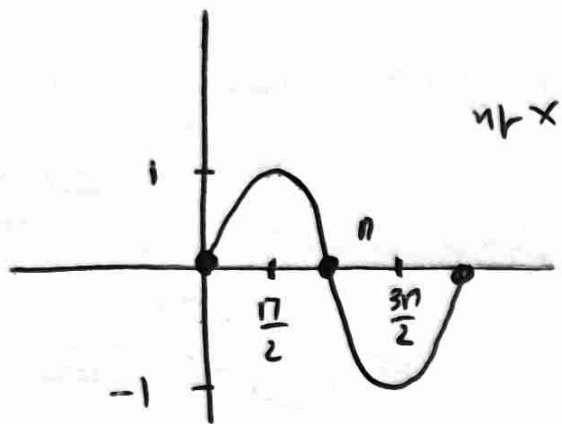
$$\exists \xi \in (0, \frac{n}{2})$$

$$\underline{\underline{\xi = 0}} \quad \underline{\underline{\xi = \frac{n}{2}}}$$

$$\text{t.w. } g(\xi) = 0$$

$$\xi \in (0, \frac{n}{2})$$

$$\xi \in [0, \frac{n}{2}]$$



$$\eta\rho^2x + \sigma\omega^2x = L$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\rho x}{\sigma\omega x}$$

$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\omega x}{\eta\rho x}$$

$\pi/6$ $\pi/4$ $\pi/3$

x	30	45	60
$\eta\rho x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\omega x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\varepsilon\varphi x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\sigma\omega x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sigma\omega(-x) = \sigma\omega x$$

$$\eta\rho(-x) = -\eta\rho x$$

$$\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$$

Δύο παρατηρησιακά

χωρίς έχω ίδιο υπόθετο

συνάφεια τα υποθέτω.

Εξίσωση

$$\eta\rho x = \eta\rho \theta \quad (\Rightarrow) \quad x = 2k\pi + \theta \quad \vee \quad x = 2k\pi + \pi - \theta$$

$$\sigma\omega x = \sigma\omega \theta \quad (\Rightarrow) \quad x = 2k\pi \pm \theta$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \theta \quad (\Rightarrow) \quad x = 2k\pi + \theta$$

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi \theta \quad (\Rightarrow) \quad x = 2k\pi + \theta$$

Εποραο Μαθημα

Τεταρτη

9 - 11:30

ΕΥΟΤΗΤΑ
10

(11)

(28) α

(29) α.

(30) α β

(31) α.

(32) α

(33) α

(34) α β

(35) α β

(36) α γ.

(37) α β

(39) α β δ σ ε.

(40) α γ ε.

(41) α.

(42) α.

(43) α γ.

(44) α β

(45) α β

(46) α γ.

(47) α

(48) α γ ε.