Δινεται το πολυωνυμο

$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)\,x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)\,x + \lambda - 2$

Να βρειs το βαθμο του $P(x)$ για τιs

διαφορεs τιμεs του $\lambda \in R$.

Ειναι $\lambda^3 - 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 4) = 0$

$\lambda = 0$ ή $\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 = 4$

$\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

1. Αν $\lambda = 0$ τοτε $P(x) = -2$ ειναι σταθερο πολυωνυμο με βαθμο μηδεν.

2. Αν $\lambda = 2$ τοτε $P(x) = 0$ ειναι μηδενικο πολυωνυμο και δεν εχει βαθμο.

3. Αν $\lambda = -2$ τοτε $P(x) = 8x - 4$ ειναι 1ου βαθμου πολυωνυμο.

Να γινουν οι παρακατω διαιρεσεις

ⓐ $(2x^4 - 7x^3 + 18x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$

καθετη διαιρεση

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
-\left[2x^4 - 6x^3 + 2x^2\right] & 2x^2 - x - 5 \\ \cline{1-1}
-x^3 - 2x^2 + 18x + 2 & \\
-\left[-x^3 + 3x^2 - x\right] & \\ \cline{1-1}
-5x^2 + 19x + 2 & \\
-\left[-5x^2 + 15x - 5\right] & \\ \cline{1-1}
14x + 7 &
\end{array}
$$

Ταυτοτητα Ευκλειδειας διαιρεσης

$$2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 - x - 5) + 4x + 7$$

Η συγκεκριμενη διαιρεση δεν γινεται να γινει με αλλο τροπο.

(B) $(x^3 - 5x + 3) : (x + 2)$

Σε αυτή τη διαίρεση ο διαιρέτης $\delta(x) = x + 2$ είναι 1ου βαθμού. Εννοείται ότι μπορούμε να εκτελέσουμε κάθετη διαίρεση. Όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής $x - \rho$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner.

1	0	-5	3	-2
↓	-2	4	2	
1	-2	-1	$\boxed{5}$	

$\underbrace{1 \quad -2 \quad -1}_{\text{πηλίκο}}$ $\quad \boxed{5} \rightarrow$ υπόλοιπο.

Είναι $\underbrace{x^3 - 5x + 3}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x+2)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{\pi(x)} + \underbrace{5}_{v}$

Ασκηση 24

Δινεται $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$

(α) ΝΔΟ το $2x-3$ ειναι παραγοντας του $P(x)$

Αρκει νδο η $P(x) : (2x-3)$ ειναι τελεια.

2	1	-22	24	$\frac{3}{2}$
$\downarrow$	3	6	-24	
2	4	-16	0	

(β) Να παραγοντοποιηθει το $P(x)$

Ειναι $P(x) = (2x-3)(2x^2+4x-16)$.

συμφωνα με την ταυτοτητα της ευκλειδιας διαιρεσης

Δίνεται $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2-4a-8)x + a^2-21$

Να βρεθεί το a αν η διαίρεση $P(x):(x^2+1)$ είναι τέλεια.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2-4a-8)x + a^2-21 & x^2+1 \\ \hline -\left[x^4 + x^2\right] & x^2-3x+a-1 \\ \hline -3x^3 + (a-1)x^2 + (a^2-4a-8)x + a^2-21 & \\ -\left[-3x^3 - 3x\right] & \\ \hline (a-1)x^2 + (a^2-4a-5)x + a^2-21 & \\ -\left[(a-1)x^2 + a-1\right] & \\ \hline (a^2-4a-5)x + a^2-a-20 & \end{array}$$

Για να είναι τέλεια η διαίρεση πρέπει

$$\begin{cases} a^2-4a-5=0 \iff \boxed{a=5} \text{ ή } \boxed{a=-1} \\ a^2-a-20=0 \quad \boxed{a=5} \quad \boxed{a=-4} \end{cases}$$

Άρα $\underline{\underline{a=5}}$

Δινεται το πολυωνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 14x + B$.

Το $x-3$ ειναι παραγοντας του $P(x)$ και

το υπολοιπο της διαιρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ ειναι 36.

Να βρεθουν τα a, B και να παραγοντοποιηθει

το $P(x)$

Αφου το $x-3$ ειναι παραγοντας ειναι $P(3)=0$

Αφου το υπολοιπο της διαιρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ ειναι 36 ειναι $P(-1)=36$.

Αρα $\begin{cases} P(3)=0 \Leftrightarrow 27+9a-42+B=0 \Leftrightarrow 9a+B=15 \\ P(-1)=36 \Leftrightarrow -1+a+14+B=36 \Leftrightarrow a+B=23 \end{cases}$

Συνεπως $a=-1$ και $B=24$

Αρα $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

Αφου το $x-3$ ειναι παραγοντας το 3 ειναι ριζα

του $P(x)$

1	-1	-14	24	3
↓	3	6	-24	
1	2	-8	0	

$P(x) = (x-3)(x^2+2x-8)$

$P(x) = (x-3)(x+4)(x-2)$.

(α) Δινεται το $P(x)=x^3+4x^2+ax+\beta$ το οποιο

εχει παραγονται το x^2+2x-3

Να βρεθουν τα a, β

Ειναι $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

Αρα $P(-3)=0 \Leftrightarrow -3a+\beta=-9$
και $P(1)=0 \Leftrightarrow a+\beta=-5$
$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ $a=1$, $\beta=-6$

(β) Δινεται το $P(x)=x^3+ax^2+\beta$ το οποιο

εχει παραγονται το x^2-4x+4.

Να βρεθουν τα a, β.

Εδω δεν δουλευει ο προηγουμενος τροπος.

Ειναι $x^2-4x+4=(x-2)^2$

1	a	0	β	2
↓	2	$2a+4$	$4a+8$	
1	$a+2$	$2a+4$	$\boxed{4a+\beta+8}$	

1	$a+2$	$2a+4$	2
↓	2	$2a+8$	
1	$a+4$	$4a+12$	

Πρεπει

$$\begin{cases} 4a+\beta+8=0 \\ 4a+12=0 \end{cases}$$

$\boxed{a=-3}$

$\boxed{\beta=4}$

Το υπολοιπο της $P(x):(x-2)$ ειναι 1

και με το $P(x):(x+3)$ ειναι -14

Να βρεθει το υπολοιπο της διαιρεσης

του $P(x)$ με το x^2+x-6.

Δινεται οτι $P(2)=1$ και $P(-3)=-14$

Συμφωνα με την ταυτοτητα ευκλειδειας διαιρεσης

$$P(x)=(\underbrace{x^2+x-6}_{\text{2ου βαθμου}})\pi(x)+u(x)$$

αρα $u(x)$ 1ου βαθμου

Συνεπως $\boxed{P(x)=(x^2+x-6)\pi(x)+ax+\beta.}$

$$P(2)=2a+\beta=1$$

$$P(-3)=-3a+\beta=-14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\beta=1 \\ -3a+\beta=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=3 \\ \beta=-5 \end{matrix}$$

(3) $x^3-7x+6=0$

Οι διαιρετες του σταθερου ορου ειναι οι

$6: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Παρατηρω οτι το 1 ειναι λυση της εξισωσης οποτε δοκιμαζω Horner με το 1.

1	0	-7	6	1
↓	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Η εξισωση γινεται

$(x-1)(x^2+x-6)=0$

$x-1=0$ ή $x^2+x-6=0$

$\boxed{x=1}$ $\boxed{x=-3}$ $\boxed{x=2}$

(η) $6x^4-5x^3-15x^2+4=0$

Διαιρετες του $4: \pm 1, \pm 2, \pm 4$

6	-5	-15	0	4	-1
↓	-6	11	4	-4	
6	-11	-4	4	0	

$(x+1)(6x^3-11x^2-4x+4)=0$

$x+1=0$ ή $6x^3-11x^2-4x+4=0$

$\boxed{x=-1}$

6	-11	-4	4	2
↓	12	2	-4	
6	1	-2	0	

$(x-2)(6x^2+x-2)=0$

$x-2=0$ ή $6x^2+x-2=0$

$\boxed{x=2}$ $\boxed{x=\frac{1}{2}}$ $\boxed{x=-\frac{2}{3}}$

θ) $\sqrt{x+2}+x=4$

$x+2\geq 0$ και $4-x\geq 0$

$x\geq -2$ $\quad x\leq 4$

$x\in[-2,4]$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=4-x$

$x+2=(4-x)^2$

$x+2=16-8x+x^2 \Leftrightarrow$

$x^2-9x+14=0$

$\boxed{x=2}$ $\quad \cancel{\boxed{x=7}}$

ι) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

$3x+1\geq 0$ και $x+4\geq 0$

$x\geq -\frac{1}{3}$ $\quad x\geq -4$

$x\in[-\frac{1}{3},+\infty)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=1+\sqrt{x+4}$

$3x+1=1+2\sqrt{x+4}+x+4$

$2x-4=2\sqrt{x+4}$

$x-2=\sqrt{x+4}$

πρπ $x-2\geq 0$

$x\geq 2$

άρα $x\in[2,+\infty)$

$(x-2)^2=x+4$

$x^2-4x+4=x+4$

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

$\cancel{\boxed{x=0}}$ $\quad \boxed{x=5}$

ρ) $x^6 - 7x^2 - 6 = 0$

$(x^2)^3 - 7x^2 - 6 = 0$ $\qquad x^2 = t$

$t^3 - 7t - 6 = 0$

1	0	−7	−6	−1
↓	−1	1	6	
1	−1	−6	0	

$(t+1)(t^2 - t - 6) = 0$

$t+1=0$ ή $t^2 - t - 6 = 0$

$t=-1$ $\qquad t=3$ $\qquad t=-2$

$x^2=-1$ $\qquad x^2=3$ $\qquad x^2=-2$

Αδύνατη $\qquad \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$ $\qquad$ Αδύνατη.

ν) $1 - \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3x^2}{x^2-4} + \dfrac{3}{2-x}$

$1 - \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3x^2}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{3}{x-2}$

Περιορισμοί

$x \neq 2$

$x \neq -2$

ΕΚΠ: $(x-2)(x+2)$

$(x-2)(x+2) - (2x-1)(x-2) = 3x^2 - 3(x+2)$

$x^2 - 4 - (2x^2 - 4x - x + 2) = 3x^2 - 3x - 6$

$x^2 - 4 - 2x^2 + 4x + x - 2 = 3x^2 - 3x - 6$

$-x^2 + 5x - 6 = 3x^2 - 3x - 6 \iff 4x^2 - 8x = 0$

$4x(x-2) = 0$

$\boxed{x=0}$ $\qquad \cancel{\boxed{x=2}}$

(ε) $x^4-3x^3-15x^2+19x+30<0$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & -15 & 19 & 30 & -1 \\ \downarrow & -1 & 4 & 11 & -30 & \\ 1 & -4 & -11 & 30 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x^3-4x^2-11x+30)<0$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -4 & -11 & 30 & 2 \\ \downarrow & 2 & -4 & -30 & \\ 1 & -2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-15)<0$

$-1 \quad 2 \quad 5 \quad -3$

x		-3		-1		2		5	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x^2-2x-15$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$x \in (-3,-1) \cup (2,5)$.

(3) $$\frac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$$

Βρισκω τις ριζες καθε παραγοντα και φτιαχνω πινακακι.

x		-3		-2		1		3	
$x+2$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$-x^2-2x+3$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$P(x)$	$+$	‖	$+$		$-$	‖	$+$		$-$

$x \in (-\infty,-3) \cup (-3,-2] \cup (1,3]$

(4) $$\frac{x^3+6x^2-x}{x^2-x+3} < 2$$

Εδω μπορω να κανω "χιαστι" αφου το x^2-x+3 ειναι θετικη ποσοτητα αφου $\Delta<0$ και $\alpha>0$

$x^3+6x^2-x < 2(x^2-x+3)$

$x^3+6x^2-x < 2x^2-2x+6$

$x^3+4x^2+x-6 < 0$

$(x-1)(x^2+5x+6) < 0$

$x \in (-\infty,-3) \cup (-2,1)$.

x		-3		-2		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2+5x+6	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

(2) $x \geq \dfrac{x+8}{x-1}$

Εδω το $x-1$ δεν εχει σταθερο προσημο οποτε δεν επιτρεπεται το "χιαστι"

Είναι $x - \dfrac{x+8}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x}{x-1} - \dfrac{x+8}{x-1} \geq 0$

$$\frac{x^2-x-x+8}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+8}{x-1} \geq 0$$

x		-2		1		4	
x^2-2x+8	+	0	−		−	0	+
$x-1$	−		−	0	+		+
$P(x)$	−		+		−		+

$x \in [-2, 1) \cup [4, +\infty)$.