Επαναληψη Διαγωνισματος κυριακης

1. Εστω συναρτησεις f, g οπου

$f: (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x}{x-1}.$

$g: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

Ψαχνω τις παρακατω συναρτησεις εφοσον οριζονται.

$h_1 = f \circ g$ $\qquad h_3 = f \circ f$

$h_2 = g \circ f$ $\qquad h_4 = g \circ g$.

$h_1 = f \circ g$

$$h_1(x) = f(g(x)) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \geq 0$

$\sqrt{x} > 1$

$x > 1$

$$D_{h_1} = (1, +\infty).$$

$h_2 = g \circ f$

$$h_2(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$x > 1$

$$\frac{x}{x-1} \geq 0$$

x		0	1	
x	$-$	$+$		$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x}{x-1}$	$+$	$-$		$+$

$x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

$$D_{h_2} = (1, +\infty)$$

$h_3 = f \circ f$

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_f$

$\underline{\underline{x > 1}}$

$$\frac{x}{x-1} > 1$$

$$\frac{x}{x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-x+1}{x-1} > 0$$

$$\frac{1}{x-1} > 0$$

$$\underline{\underline{x > 1}}$$

$D_{h_3} = (1, +\infty)$

$h_4 = g \circ g$

$$h_4(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_g$

$x \geq 0$

$\sqrt{x} \geq 0$ ✓

$D_{h_4} = [0, +\infty]$,

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+e^{x}, & x\leq 0 \\ e^{-x}-\ln(x+1), & x>0 \end{cases}$$

(α) Νδο η f είναι συνεχής.

(β) Να βρείτε σύνολο τιμών της $f(x)$.

(γ) Νδο η συνάρτηση f έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες.

(δ) Νδο η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-1}{x-1}+\dfrac{f(\beta)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$ αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{*}$

(ε) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$.

(ζ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$

2. (α) Η $f(x)$ συνεχής $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως π.σ.σ.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x+e^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} - \ln(x+1) = 1$$

$\left.\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Επίσης $f(0) = 1$ Συνεχής και στο 0!

Συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(B) $x \leq 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$
- $x_1 < x_2$

(+)

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow$

$x > 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$

$e^{-x_1} > e^{-x_2}$

(+)

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1$

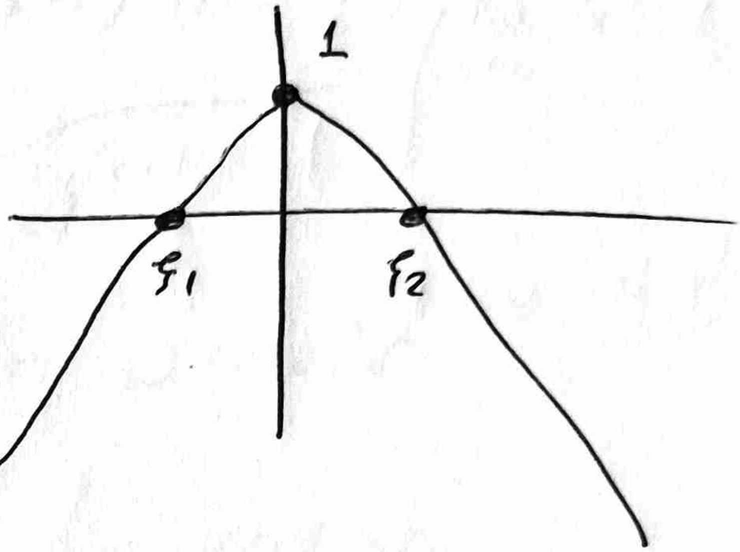
$\ln(x_1+1) < \ln(x_2+1)$

$-\ln(x_1+1) > -\ln(x_2+1)$

$f(x_1) > f(x_2)$

$f \searrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+e^x) = -\infty$$

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} - \ln(x+1)$$

$$= -\infty$$

$$\Sigma T_f = (-\infty, 1]$$

(γ) $\underline{x<0}$

- $f \nearrow$
- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1)$

Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα

$\exists!\ \xi_1 < 0$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

$\underline{x \geq 0}$

- $f \downarrow$
- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα

$\exists!\ \xi_2 > 0$

τ.ω $f(\xi_2) = 0$

(δ) $$\frac{f(\alpha)-1}{x-1} + \frac{f(\beta)-1}{x-2} = 0$$

$$\underbrace{(x-2)\left(f(\alpha)-1\right) + (x-1)\left(f(\beta)-1\right)}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής $[1,2]$ ως π.σ.σ.

$$g(1) = -\left(f(\alpha)-1\right) = 1 - f(\alpha) > 0$$

$$g(2) = f(\beta) - 1 < 0$$

Αφού το $\{\, T_f = (-\infty, 1] \Rightarrow f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

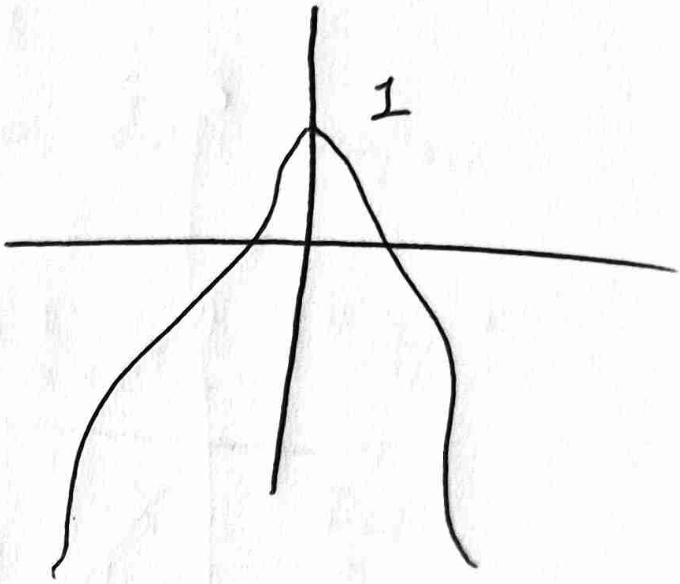
$\rightarrow f(\alpha) < 1$ $\quad \alpha \neq 0$

$1 - f(\alpha) > 0$

$\rightarrow f(\beta) < 1 \Rightarrow f(\beta) - 1 < 0$

$g(1)g(2) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi \in (1,2)$ τ.ω $g(\xi) = 0$.

(ε)



Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση

i) $f(x)=0$ 2 ρίζες

ii) $f(x)=1$ 1 ρίζα

iii) $f(x)=2026$ 0 ρίζες

iv) $f(x)=\frac{1}{2}$ 2 ρίζες

v) $f(x)=\alpha$

→ Αν $\alpha>1$ 0 ρίζες

→ Αν $\alpha=1$ 1 ρίζα

→ Αν $\alpha<1$ 2 ρίζες

vi) $f(x)=\alpha^2+1$

↓ αν $\alpha=0$ 1 ρίζα

αν $\alpha\neq 0$ 0 ρίζες.

vii) $f(x)=\ln\alpha$

→ Αν $\ln\alpha>1 \Rightarrow \alpha>e$ 0 ρίζες

→ Αν $\ln\alpha=1 \Rightarrow \alpha=e$ 1 ρίζα

→ Αν $\ln\alpha<1 \Rightarrow \alpha<e$ 2 ρίζες

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ Το όριο δεν υπάρχει.

• $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+e^x-1}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}}$

$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^x}{1} = 2$

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-\ln(x+1)-1}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^{-x}-\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{-1-1}{1} = -2$

3. Εστω $f: [2, +\infty) \longrightarrow R$ συνεχης.

• $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1$

• $f^2(x) + 3 = x + 2f(x) \quad \forall x \geq 2$

(α) Νδο η $g(x) = f(x) - 1$ διατηρει σταθερο προσημο.

(β) Νδο $f(3) = 2$

(γ) Νδο $f(x) = 1 + \sqrt{x-2} \quad \forall x \geq 2$

(δ) Νδο η C_f τεμνει τη C_g σε τουλαχιστον ενα σημειο στο διαστημα $(2, 3)$ αν $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

(ε) Να υπολογισει τα ορια

(α) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$ (β) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - 2}{x^3 - 8}$.

3. (α) $f^2(x)+3 = x+2f(x)$

$$f^2(x)-2f(x) = x-3$$

$$f^2(x)-2f(x)+1 = x-3+1$$

$$(f(x)-1)^2 = x-2$$

$$(f(x)-1)^2 = \sqrt{x-2}^{\,2}$$

$$|f(x)-1| = |\overset{\oplus}{\sqrt{x-2}}|$$

$$|g(x)| = \sqrt{x-2}$$

$g(x)=f(x)-1$

Ρίζα $g(x)$

$g(x)=0$

$|g(x)|=0$

$\sqrt{x-2}=0$

$x=2$

x	2	
$g(x)$	0	;

συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο

$\forall x>2$ η $g(x)\neq 0 \rightarrow g(x)>0$ ή $g(x)<0$

(B) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1$

Θεωρώ Βοηθητική συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-2}{x-3}$

προφανώς $\lim_{x\to 3} h(x) = 1$

Λύνω ως προς $f(x)$

$h(x)(x-3) = f(x) - 2$

$$\boxed{f(x) = h(x)(x-3) + 2}$$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} h(x)(x-3)+2 = 2$

Αφού f συνεχής

$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$

$f(3) = 2$.

(γ) $\left|\overset{+}{g(x)}\right| = \sqrt{x-2}$ $\qquad g(x)=f(x)-1$

x	2	
g(x)	‖φ	+

$g(x) = \sqrt{x-2}$

Γνωρίζω ότι $f(3)=2$

$f(x)-1=\sqrt{x-2}$

$g(3)=f(3)-1=2-1=1$

$f(x)=\sqrt{x-2}+1$

$g(3)=1$

(δ) $f(x)=g(x)$

$\sqrt{x-2}+1=\frac{1}{x}+1$

$$\underbrace{\sqrt{x-2}-\frac{1}{x}}_{\varphi(x)}=0$$

Η $\varphi(x)$ συνεχής $[2,3]$ ως π.δ.σ.

$\left.\begin{array}{l}\varphi(2)=-\frac{1}{2}<0\\ \varphi(3)=1-\frac{1}{3}>0\end{array}\right\}$ $\varphi(2)\varphi(3)<0$

Bolzano $\exists\, \xi\in(2,3)$

τ.ω $\varphi(\xi)=0$

(Ε) (α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x-2}+1}$

$-1 \le \eta\mu x \le 1$

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \le \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x-2}+1} \le \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} = 0 \end{array}\right\} \text{Από Κ.Π}$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x-2}+1} = 0.$$

(β) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x-2}+1-2}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^3-8}$

$= \lim\limits_{x\to3} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{3x^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{27} = \dfrac{1}{54}$

Μονοτονια Συναρτησης

1. Αν $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in \Delta$.

Τοτε η $f \nearrow$ στο Δ.

2. Αν $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in \Delta$

Τοτε η $f \searrow$ στο Δ.

Συμπερασμα

Η μονοτονια μιας συναρτησης εξαρταται αποκλειστικα και μονο απο το προσημο της

$f'(x)$.

Ενοτητα 23

2. (β) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad , x > 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$$

$f \downarrow$

(δ) $f(x) = 2x + \sigma\upsilon\nu x - 1$

$f'(x) = 2 - \eta\mu x > 0 \qquad f \nearrow$

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$1 \geq -\eta\mu x \geq -1$$

$$\boxed{3 \geq 2 - \eta\mu x \geq 1}$$

(στ) $f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x - 1$

$f'(x) = 1 - \eta\mu x > 0 \qquad f \nearrow$

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$1 \geq -\eta\mu x \geq -1$$

$$2 \geq 1 - \eta\mu x \geq 0$$

3. (β) $f(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad , x \in R$

$f'(x) = -2x - 2$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow -2x = 2$

$\boxed{x = -1}$

x		-1	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

Η $f \nearrow (-\infty, -1]$

Η $f \searrow [-1, +\infty)$

Το $A(-1, 4)$ Ο.Μ

$f(x) \leq f(-1)$

$\underline{f(x) \leq 4}$

(δ) $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$

x		$-1/3$		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$x = \dfrac{-2 \pm 4}{-6}$ → $-\frac{1}{3}$, 1

02 $f(x) = x^3 - 6x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

4. (8) $f(x) = x^4 + 32x$

$$f'(x) = 4x^3 + 32 = 4(x^3+8)$$

$\rightarrow$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 8 = 0$

$$x^3 = -8$$

$$x = -2$$

x		-2	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geq f(-2)$

$f(x) \geq -48$

(6) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x - 1$

$$f'(x) = \frac{1}{4}4x^3 - 6x^2 + \frac{11}{2}2x - 6$$

$$\boxed{f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.}$$

$\rightarrow$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

1	-6	11	-6	1
$\downarrow$	1	-5	6	
1	-5	6	0	

$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x = 1$ $x = 2$ $x = 3.$

$$\boxed{f'(x) = (x-1)(x^2-5x+6)}$$

x		1		2		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-5x+6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

52 $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 6$

$f'(x) = 4x^3 + 4x - 8 = 4(x^3 + x - 2)$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0$

1	0	1	-2	1
$\downarrow$	1	1	2	
1	1	2	0	

$(x-1)(x^2+x+2) = 0$

$\Delta < 0$

$x = 1$

$$\boxed{f'(x) = (x-1)(x^2+x+2)}$$

x		1	
$x-1$	$-$		$+$
x^2+x+2	$+$		$+$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 1$

5. (B) $f(x) = 5x - x^5$

$f'(x) = 5 - 5x^4 = 5(1 - x^4)$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = 1$

$x = 1$ $\quad x = -1$

x		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

(5) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$

$f'(x) = \frac{1}{5}5x^4 - 4x^3 - \frac{1}{2}2x + 4$

$f'(x) = x^4 - 4x^3 - x + 4$

$f'(x) = x^3(x-4) - (x-4)$

$\boxed{f'(x) = (x-4)(x^3-1)}$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4 \quad x = 1$

x		1		4	
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
x^3-1	$-$	0	$+$		$+$
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(ε) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{x^3}{3} + 2x$

$$f'(x) = \frac{1}{5}5x^4 - \frac{1}{3}3x^2 + 2$$

$$f'(x) = x^4 - x^2 + 2 > 0$$

εχει δομη τριωνυμου

ειναι διτετραγωνο.

$\Delta < 0$

$f \nearrow$

Β' τρόπος

$f'(x) = x^4 - x^2 + 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 + 2 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - t + 2 = 0$

$\Delta < 0$

Αδύνατη.

Άρα η $f'(x) \neq 0$ και συνεχής

$\Rightarrow f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$

$\forall x \in R$.

$f'(0) = 2$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$f \nearrow$

6. (B) $f(x) = -\frac{4x^3}{3} + 2x^2 - x - 4$

$f'(x) = -\frac{4}{3}3x^2 + 2\cdot 2x - 1$

$f'(x) = -4x^2 + 4x - 1$

$f'(x) = -(4x^2 - 4x + 1)$

$f'(x) = -(2x-1)^2 \leq 0$

$f \searrow$

Β' τρόπος

$f'(x) = -4x^2 + 4x - 1$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 4x - 1 = 0$

$\Delta = 0 \qquad x = \frac{-B}{2A} = \frac{-4}{-8}$

$x = \frac{1}{2}$

x		$1/2$	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

(5) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{3}3x^2 - 2 \cdot 2x + 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 4\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$$

$$f'(x) = 4\left(x^2(x-1) - (x-1)\right)$$

$$\boxed{f'(x) = 4(x-1)(x^2-1)}$$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad x = 1 \quad x = -1$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	$-$		$+$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

στ) $f(x) = (x+1)^5 \cdot (x-2)^4$

$f'(x) = 5(x+1)^4 (x-2)^4 + (x+1)^5 \cdot 4(x-2)^3$

$f'(x) = (x+1)^4 (x-2)^3 \left[5(x-2) + 4(x+1) \right]$

$f'(x) = (x+1)^4 (x-2)^3 \left[9x - 6 \right]$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^4 = 0$ ή $(x-2)^3 = 0$ ή $9x-6=0$

$\underline{\underline{x=-1}}$ $\underline{\underline{x=2}}$ $\underline{\underline{x=\frac{2}{3}}}$

x		-1		$\frac{2}{3}$		2	
$(x+1)^4$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-2)^3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$9x-6$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f'	$+$		$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Προσοχή

$f(x) = (3x-2)^7$

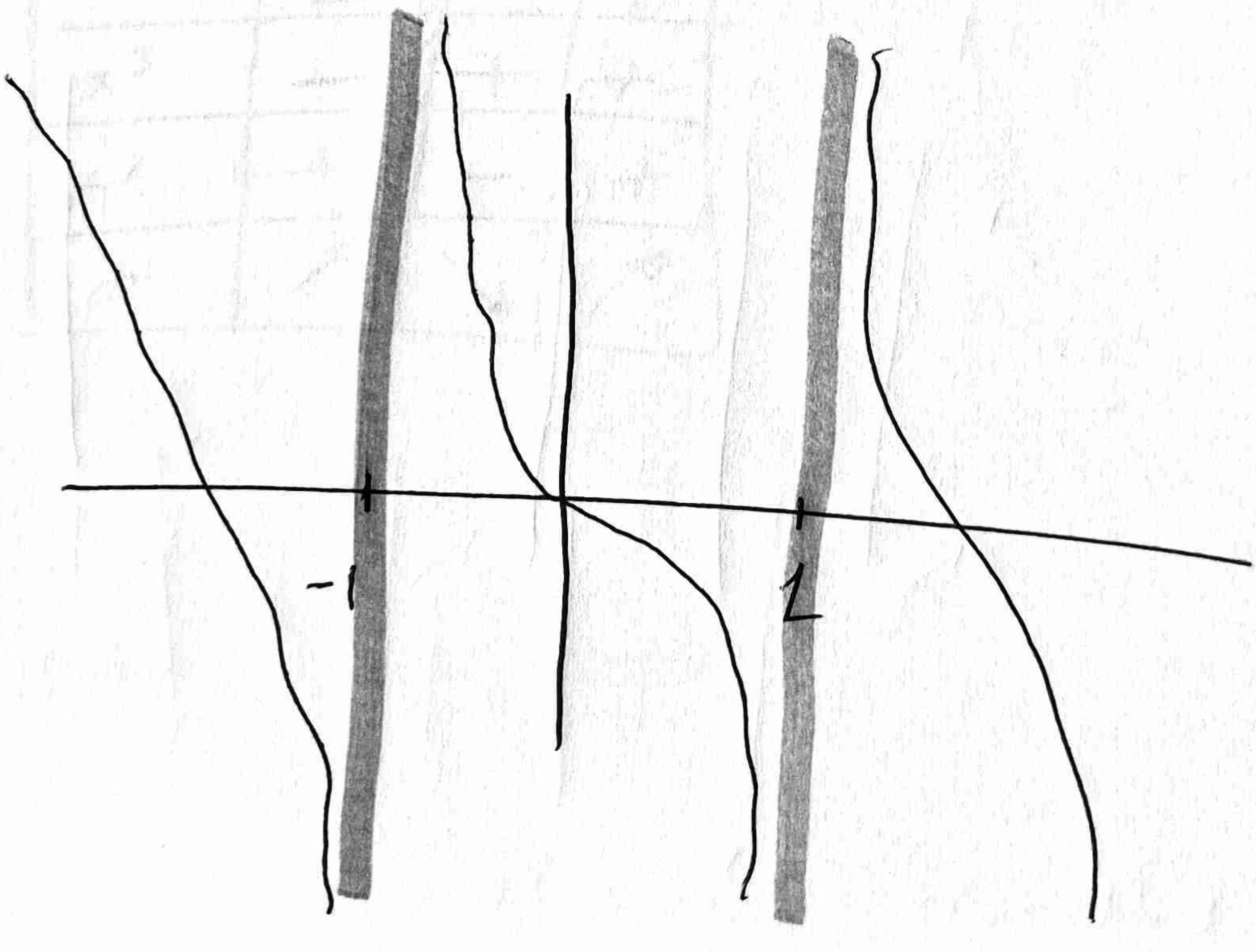
$f'(x) = 7(3x-2)^6 (3x-2)' = 7(3x-2)^6 \cdot 3$

7. (γ) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ $A_f = R - \{1,-1\}$.

$$f'(x) = \frac{x^2-1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} < 0$$

x		-1		1	
$f(x)$	↘		↘		↘



(02) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{-4 \cdot 2x}{x^4} = 1 - \frac{8x}{x^4} = 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{x^3} - \frac{8}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3-8}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

x		0		2	
x^3-8	$-$	‖	$-$	0	$+$
x^3	$-$	‖	$+$		$+$
f'	$+$	‖	$-$		$+$
f	$\nearrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$

8. (B) $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{2x^2}$ πρεπ $|x|>0$ $x\neq 0$

και $2x^2 \neq 0$

$x \neq 0$

$A_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{0\cdot 2x^2 - 1\cdot 4x}{(2x^2)^2}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{4x^4} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-1}{x^3}}$$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^3} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

x		-1		0		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
x^3	$-$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$
f'	$-$		$+$	$\|\|$	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$

8. (δ) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$ $\qquad A_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2-1) - (x^3-2x)\,2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^2 + 2 - 2x^4 + 4x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2}{(x^2-1)^2}} > 0$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^4 - x^2 + 2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 + 2 = 0$

$\Delta < 0$

x		-1		1	
f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

9. (γ) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ πρεπει $x^2-9 \geq 0$

x		-3		3	
x^2-9	$+$		$+$		$+$

$D_f = (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-9}}\,\cancel{2}x$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}}$$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=0}}$

x		-3		0		3	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{x^2-9}$	$+$		$+$		$+$		$+$
f'	$-$		$-$		$+$		$+$
f	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

(52) $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$

Πρεπει

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$f'(x) = 1 - \cancel{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x-2}}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}}}$$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} - 1 = 0$

$\sqrt{x-2} = 1$

$x - 2 = 1$

$x = 3$

x		2		3	
$\sqrt{x-2} - 1$	//////		$-$	0	$+$
$\sqrt{x-2}$	//////		$+$		$+$
f'	//////		$-$		$+$
f	//////		$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geq f(3)$

$f(x) \geq 1$