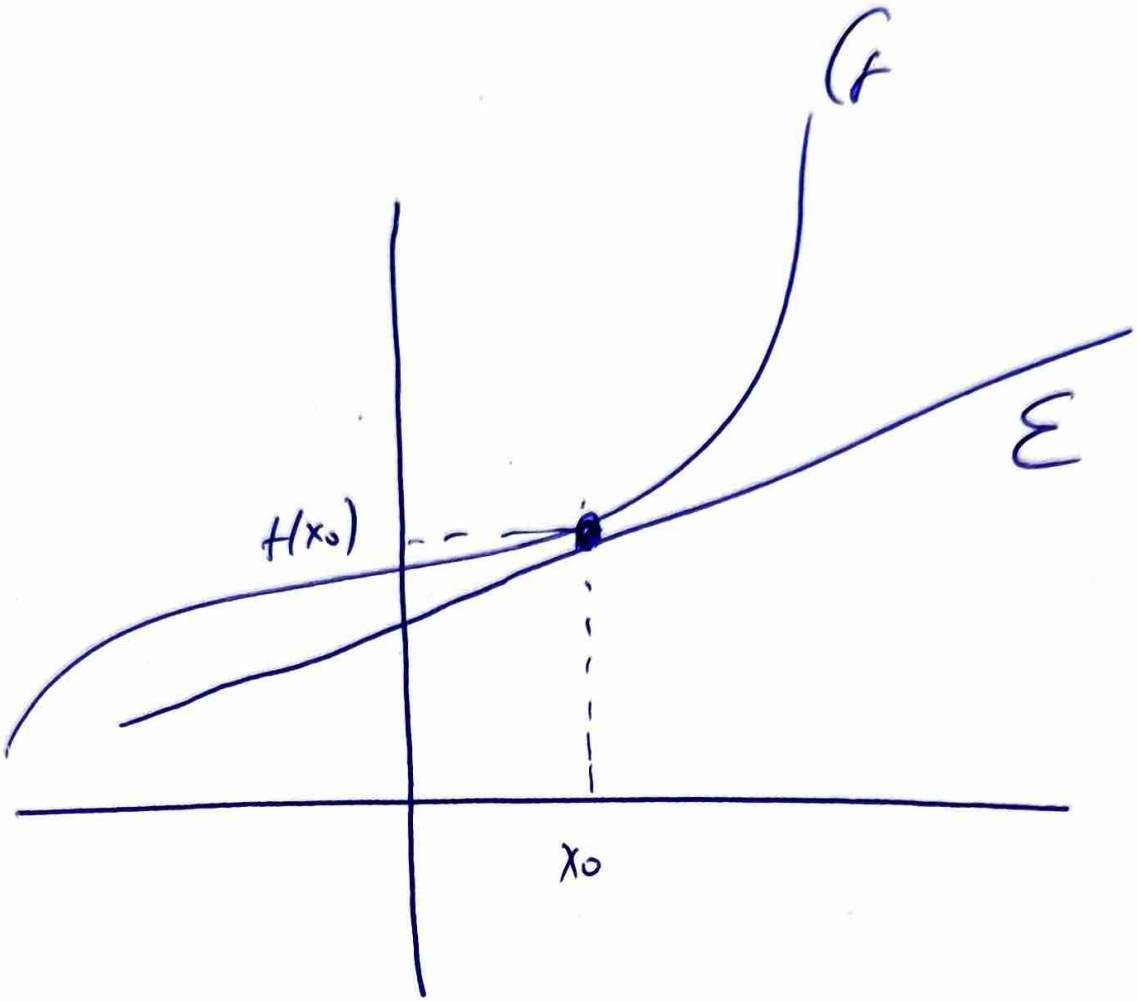
Θεματική Ενότητα

Εφαπτομένη



1. Η ε ονομάζεται εφαπτομένη της $f(x)$ στο x_0.

2. Εξ. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Ο αριθμός $f'(x_0)$ λέγεται κλίση της f στο x_0 ή συντελεστής εφαπτομένης.

4. $f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$

$\varepsilon\varphi 45 = 1$

$\varepsilon\varphi 135 = -1$.

1.

Δίνεται $f(x) = x^2 - x - 1$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x)$

(α) στο $x_0 = 1$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$\boxed{f'(x) = 2x - 1}$$

$f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1$

$f'(1) = 2 - 1 = 1$

Άρα $y - (-1) = 1 \cdot (x-1)$

$y + 1 = x - 1$

$$\boxed{y = x - 2}$$

(β) η οποία διέρχεται από το $M(-1, 0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \longrightarrow M(-1, 0)$$

$$0 - f(x) = f'(x)(-1 - x)$$

$$-(x^2 - x - 1) = (2x - 1)(-1 - x)$$

$$-x^2 + x + 1 = -2x - 2x^2 + 1 + x$$

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x = -2$

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y-(-1) = -(x-0)$

$y+1 = -x$

$\boxed{y = -x-1}$

$y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$

$y - 5 = -5(x+2)$

$y-5 = -5x-10$

$\boxed{y = -5x-5}$

(γ) η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία

Της $y = 5x+2$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ // $y = 5x+2$

$f'(x_0) = 5$ έχουν ίδια κλίση

$f'(x) = 5$

$2x-1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$

$y - f(3) = f'(3)(x-3)$

$y - 5 = 5(x-3)$

$\boxed{y = 5x-10}$

(δ) η οποία είναι παράλληλη στον x'x

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // x'x

$f'(x_0) = 0$

$f'(x) = 0$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y - f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

$y - (-\frac{5}{4}) = 0\,(x - \frac{1}{2})$

$y = -\frac{5}{4}$

(ε) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία AB όπου A(1,2) και B(3,8)

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ⊥ ε_{AB}

άρα $f'(x_0) \cdot \lambda_{AB} = -1$

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

αφα $f'(x) \cdot 3 = -1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}$

$$2x - 1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 6x - 3 = -1$$

$$6x = 2 \quad \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

$$y - H\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$y - \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$y + \frac{7}{9} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}$$

(7) η οποία σχηματίζει γωνία 135° με τον x'x

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\varepsilon\varphi 135^\circ = f'(x_0)$$

$$-1 = f'(x_0)$$

$f'(x) = -1$ οπότε $2x - 1 = -1 \Rightarrow 2x = 0$

$x = 0$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-1) = -x$$

$$y + 1 = -x$$

$$y = -x - 1$$

$\varepsilon\varphi 135 = -1$ $\varepsilon\varphi 45 = 1$

2. Έστω $f(x) = \begin{cases} e^x \eta\mu x, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

Να βρεθεί η εφαπτομένη στο $x_0 = 0$ καθώς και η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x \eta\mu x}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x - 0}{x} = 1$

$f'(0) = 1$ άρα η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ οπότε ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 0 = 1(x - 0)$

$y = x$

$\varepsilon\varphi\omega = 1$

$\omega = 45^\circ$

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $f^3(x)+f(x)=x+2$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x)$ στο $x_0=0$

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

Για $x=0$ έχω

$$f^3(0)+f(0)=2$$
$$f^3(0)+f(0)-2=0$$
$$\varphi(f(0))=0$$
$$\varphi(f(0))=\varphi(1)$$
$$\varphi\ 1-1$$
$$f(0)=1$$

$\varphi(x)=x^3+x-2$

- $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$ ⊕
- $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-2<x_2+2$

φ ↗

Άρα f παρ/μη

$$3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1$$

$x=0$

$$3f^2(0)f'(0)+f'(0)=1$$
$$4f'(0)=1 \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{4}$$

$$y-1=\frac{1}{4}x$$
$$y=\frac{1}{4}x+1$$

4. Έστω ότι $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2+x} = 1$

και η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2+x} = 1 \qquad \frac{f(x)}{x^2+x} = g(x)$$

$$\boxed{f(x) = g(x)(x^2+x)}$$

Γνωρίζω ότι $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)(x^2+x)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

f συνεχής

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x)(x^2+x) - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} g(x)(x+1) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Άρα $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$