

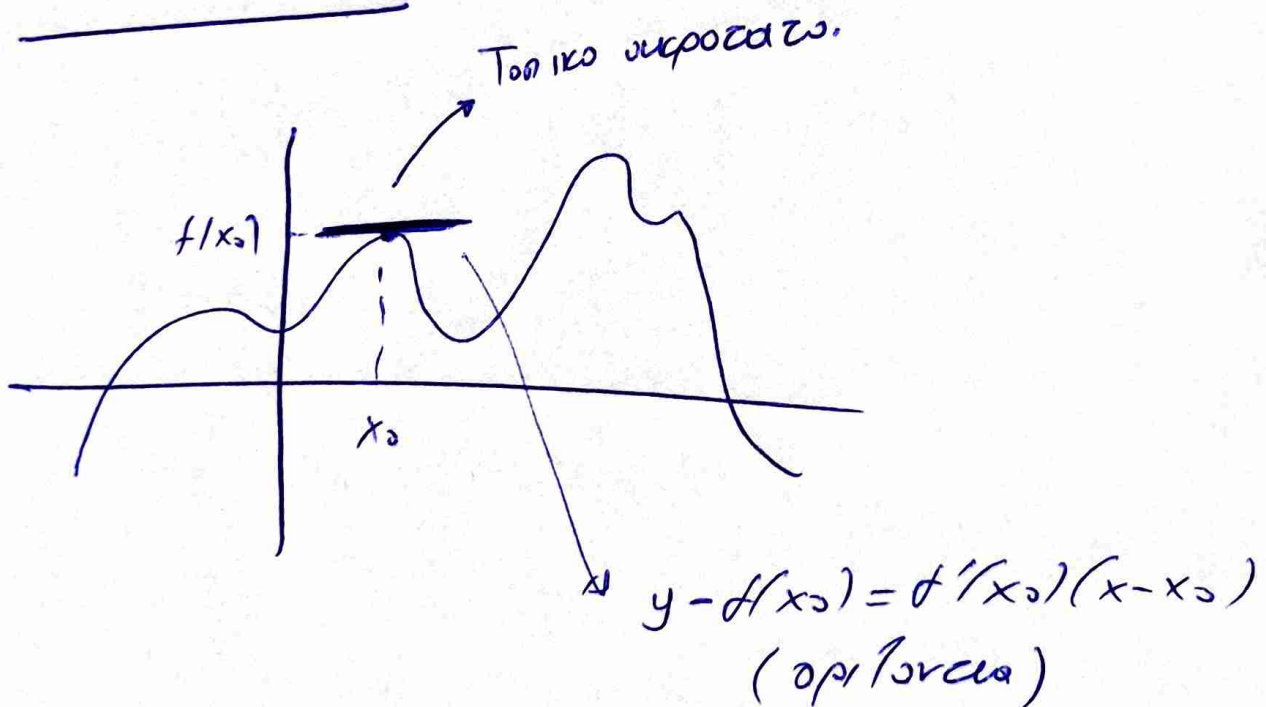
Θεώρημα Fermat

Εστω f ορισμένη στο Δ

1. Αν η f έχει ακρότατο στο x_0
2. Αν το x_0 είναι εσωτερικό του Δ .
3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

$$\text{Τότε } f'(x_0) = 0.$$

$\Sigma x_0 \lambda 10$



$$\underline{\underline{f'(x_0) = 0}}$$

3. Αν $f(x) = ax^4 + bx^3$, $x \in \mathbb{R}$
παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το -1
Βρίξτε a, b .

Αφού παρουσιάζει ακρότατο στο 1.

Το 1 εσωτερικό του $\mathbb{R}$.

Η f παρ/κη στο 1.

Από Fermat $f'(1) = 0$

Επίσης $f(1) = -1$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$$

$$f(1) = \boxed{a + b = -1}$$

$$f'(1) = \boxed{4a + 3b = 0}$$

$$\begin{cases} 4a + 3b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

(+)

$$\underline{\underline{a = 3}} \quad \underline{\underline{b = -4}}$$

$$\Rightarrow -3a - 3b = 3$$

7. $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 2 φορές παρα/μη.

• $f(0) = g(0) - 2$

• $f(x) + 2e^{-x} \geq g(x) + \ln(x+1)$

$\forall x > -1$

Νδo $f'(0) = g'(0) + 3$.

Δεδομένη
ανίσωση
($\Rightarrow$)
Νδo ισότητα

$f(x) + 2e^{-x} - g(x) - \ln(x+1) \geq 0$

$\varphi(x)$

$\varphi(x) \geq 0$

$\varphi(x) \geq \varphi(0)$

Ορισμ. ελάχιστο.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ακρότατο στο } 0 \\ \text{Το } 0 \text{ εσωτερικό του } (-1, +\infty) \\ \text{Η } \varphi \text{ παρα/μη στο } 0 \end{array} \right.$

Fermat $\varphi'(0) = 0$

$\varphi'(x) = f'(x) - 2e^{-x} - g'(x) - \frac{1}{x+1}$

$\varphi'(0) = f'(0) - 2 - g'(0) - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f'(0) = g'(0) + 3}}$

8. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ map / μ

$$(x-1)f(x) \geq e^{x-1} - 1 \quad \forall x > 0.$$

Also $f(1) = 1$

$$\underbrace{(x-1)f(x) - e^{x-1} + 1}_{\varphi(x)} \geq 0$$

$$\varphi(x)$$

$$\varphi(x) \geq 0$$

$$\varphi(x) \geq \varphi(1)$$

Apply Rolle's theorem.

$$\varphi'(1) = 0 \quad \text{Fermat's.}$$

$$\varphi'(x) = f(x) + (x-1)f'(x) - e^{x-1}$$

$$\varphi'(1) = f(1) - 1 = 0$$

$$\underline{f(1) = 1}$$

9. $f(1) = 1.$

$f''(x) > 0$

$f(x) \geq 1$

$f(x) \geq f(1)$

Answer.

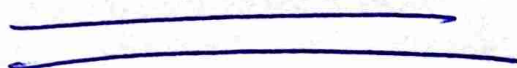
$f'(1) = 0$ Fermat.

x		1	
f''	+		+
f'	$\nearrow$ -	0	$\searrow$ +
f	$\searrow$		$\nearrow$

$x < 1$
 $f'(x) < f'(1)$
 $f''(x) < 0$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq 1$



κριση Σημειω

1. Αν η f δει είναι παραγωγισιμη
στο x_0 τοτε το x_0 ειναι
κριση σημειω αρκει να ειναι
εσωτερικο.

2. Αν το x_0 ειναι πηλ
την $f'(x)$ δηλαδη $f'(x_0) = 0$
τοτε το x_0 ειναι κριση
σημειω, αρκει να
ειναι εσωτερικο.

Πιθανές θέσεις ακροατών

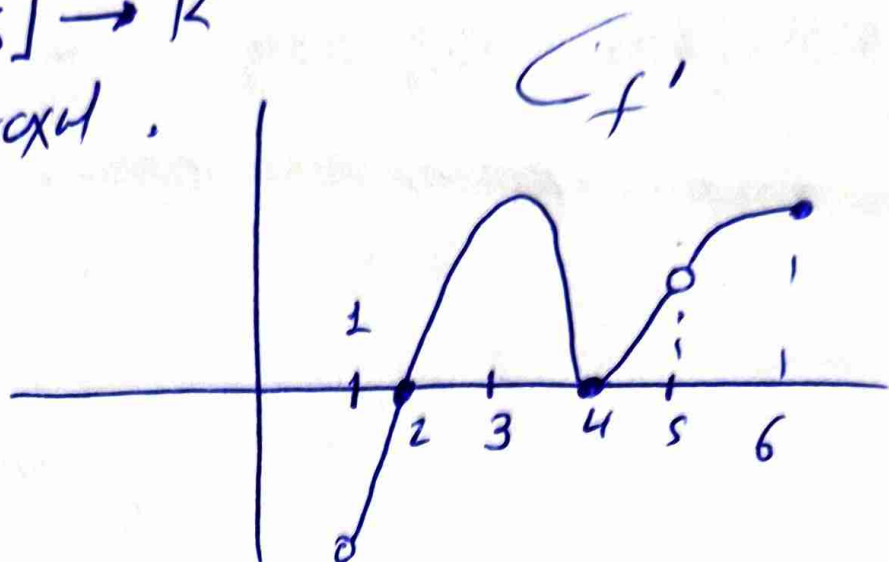
1. κριτική σύγκριση.

2. Τα κλάσκα ακρα του

πρωτα ορισμού.

10.

$f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$
συνχρ.



κρίσιμα σημεία
της $f(x)$

Το 1 παρόλο που η f δεν είναι παρ/κη εκεί
δεν είναι κρίσιμο σημείο γιατί δεν είναι εσωτερικό.

Το 5 είναι κρίσιμο σημείο γιατί η f
δεν παραγωγίζεται εκεί.

Το 2 και 4 κρίσιμα σημεία ως φέρει τη
Πιθανά Όσαυτ αποκρίση

Κ. Σ : 5, 2, 4

κλειστά άκρα : 1, 6.

κλαδωτή - κρίσιμα σημεία

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \eta/x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta/x = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

To $f(0) = 0$ απρ $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Απρ η f συνεχής στ 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta/x}{x} = 1$$

$f'(0) = 0$ απρ η f παρ/κη στ 0
απρ το 0 δεν είναι κρίσιμο σημείο

$$\underline{x \leq 0}$$

$$f_1(x) = xe^x$$

$$f_1'(x) = e^x + xe^x$$

$$f_1'(x) = e^x(x+1)$$

$$\rightarrow f_1'(x) = 0$$

$$(x+1)e^x = 0$$

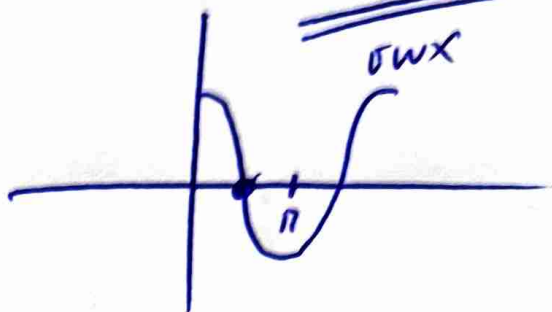
$$\underline{\underline{x = -1}} \\ \text{K. \Sigma}$$

$$\underline{0 \leq x < \pi}$$

$$f_2(x) = \sin x$$

$$f_2'(x) = \cos x$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} \text{ K. \Sigma}}}$$



$$\underline{\text{κριση Σημια}} \\ -1, \frac{\pi}{2}$$

Πηδωα Δωαα ακρσζατω

$$\text{K. \Sigma} \circ -1, \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ακρ} \circ \pi.$$

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nap/μn

$$f'(0) = 1$$

$$f(h(x)) + e^{h(x)} = e^x - x$$

Ndo n f sa exa akporata.

— στω οα n f exa
akporata στω x_0

$$\text{Fermat } f'(x_0) = 0$$

$$f'(h(x)) f'(x) + e^{h(x)} f'(x) = e^x - 1$$

$$\begin{array}{c} x = x_0 \\ \hline f'(h(x_0)) f'(x_0) + e^{h(x_0)} f'(x_0) = e^{x_0} - 1 \end{array}$$

$$0 + 0 = e^{x_0} - 1$$

$$e^{x_0} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = 0}}$$

Αντως $f'(0) = 0$ οπω $f'(0) = 1$ ΑΤΩΩ!

Αρα sa exa akporata

16.

$$f^3(x) + x f(x) = x + 2$$

Νόο } η f δεν έχει ακρότατα

Εστω ότι η f έχει ακρότατο
στο x_0 .

Fermat $f'(x_0) = 0$,

$$3f^2(x) f'(x) + f(x) + x f'(x) = 1$$

$$\underline{x = x_0}$$

$$\cancel{3f^2(x_0) f'(x_0)} + f(x_0) + \cancel{x_0 f'(x_0)} = 1$$

$$\underline{\underline{f(x_0) = 1}}$$

$$f^3(x_0) + x_0 f(x_0) = x_0 + 2$$

$$1 + \cancel{x_0} = \cancel{x_0} + 2$$

$$1 = 2$$

Απορ. /
απεδν έχν ακρότατα

32.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\textcircled{a} \quad \text{N.S.O} \quad f(x) \leq \frac{1}{e} \quad \forall x > 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0$$

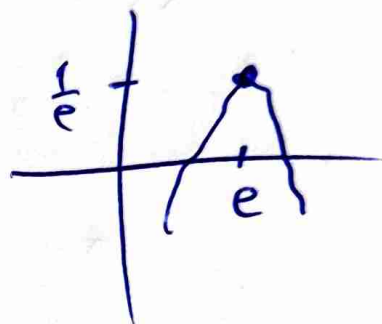
$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

x	0	e
f'	+	-
f	↗	↘

$$f(x) \leq f(e)$$

$$f(x) \leq \frac{1}{e} \quad \checkmark$$



$$\textcircled{B} \quad e f\left(\frac{1+e^2}{e} - f(x)\right) - 1 = 0$$

$$f\left(\frac{1+e^2}{e} - f(x)\right) = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1+e^2}{e} - f(x) = e$$

$$\frac{1}{e} + \frac{e^2}{e} - e = f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{e}$$

$$x = e$$

$$(8) \quad f(x) + f\left(\frac{x^2}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\leq \frac{1}{e} \\ f\left(\frac{x^2}{e}\right) &\leq \frac{1}{e} \end{aligned} \right\} \textcircled{+} \quad \begin{aligned} T_0 & \text{ " " } \text{ για } x=e \\ T_0 & \text{ " " } \frac{x^2}{e} = e \end{aligned}$$

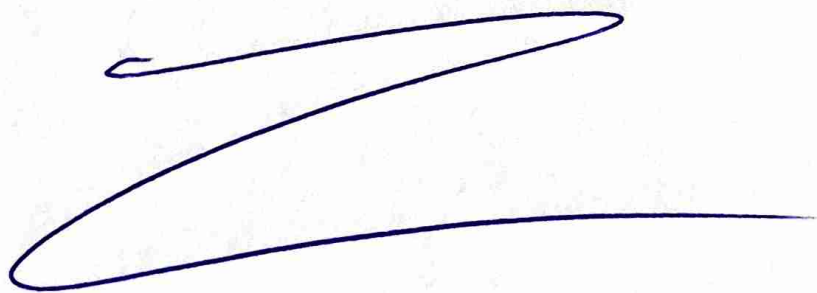
$$f(x) + f\left(\frac{x^2}{e}\right) \leq \frac{2}{e}.$$

$$x^2 = e^2 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{x=e} \text{ " " } \textcircled{x=-e}$$

Μονα για $x=e$ εχου

1000000.



26. $f(x) = x^2 - 8x + 6 \ln x, x > 0$

(a) $f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x} = 2 \frac{x^2 - 4x + 3}{x}$$

$$f'(x) = 2 \frac{x^2 - 4x + 3}{x}$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \quad x = 3$$

x	0	1	3
f'	+	0	-
f	↗	↘	↗

$A(1, -7)$ T.M

$B(3, 6 \ln 3 - 15)$ T.E.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges

$$f\left(\frac{3}{x}\right) = -7$$

$$\frac{3}{x} = 1$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

$$x > 1 \Rightarrow 10 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \frac{3}{x} < 3$$

$$\text{οπμ} \quad \forall x < 3 \quad \wedge \quad f(x) \leq f(1)$$

$$f(x) \leq -7$$

Η $f(x)$ πριν το 3 έχει δύο μινιμα.

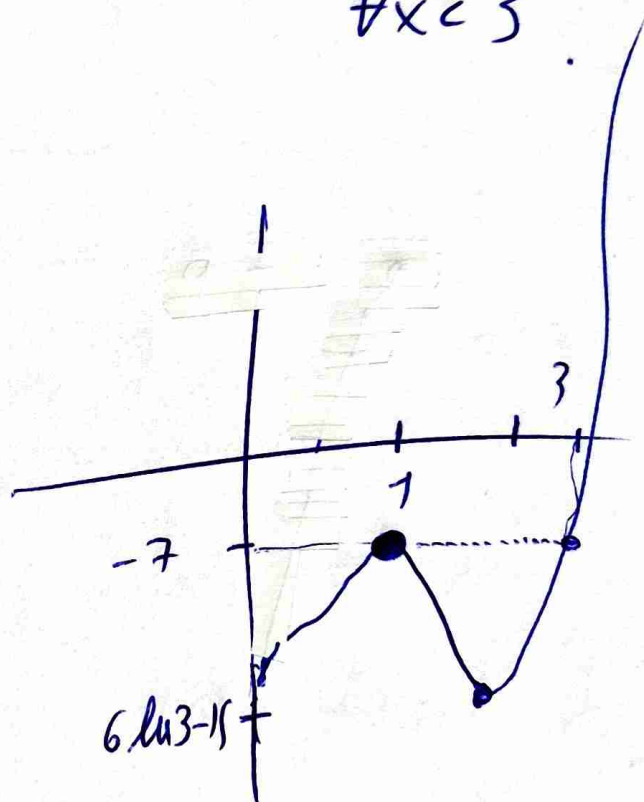
Το $A(1, -7)$ από που το $f(1) = -7$
 $\forall x < 3$.

ε πίνακα

$$f\left(\frac{3}{x}\right) = -7$$

$$\frac{3}{x} = 1$$

$$x = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 8x + 6 \ln x) = -\infty$$

$$f(1) = -7.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x^2 - 8x}_{(+\infty)} + 6 \ln x = +\infty$$

24. $f(x) = e^{x-1} - \ln x + 1, x > 0$

(a) NĐĐ $f(x) \geq 2$

$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \quad f'(1) = 0$

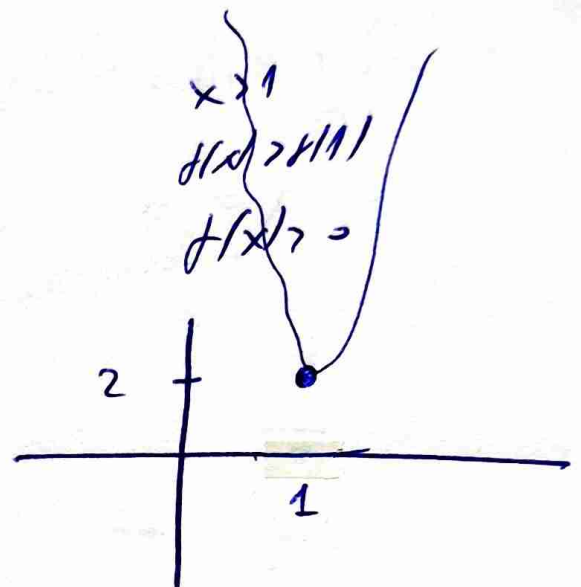
$f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$

x	0	1
f''	+	+
f'	$\nearrow$	$\searrow$
f	$\searrow$	$\nearrow$

$x < 1$
 $f(x) < f(1)$
 $f(x) < 0$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq 2$



(b) ε tìm $f(\sqrt{x^2+1}-1) = 2$

$f(\sqrt{x^2+1}-1) = 2$

$f(\sqrt{x^2+1}-1) = 2$

$x^2+1 = 1$

$x^2 = 0$

$x = 0$

⑧ εἴσων $f(x) + f(x^{2020}) = 4$

Ἐν ὥστεν $f(x) \geq 2$ $\quad \quad \quad \text{Το } " = "$
για $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 2 \\ f(x^{2020}) \geq 2 \end{array} \right\} \oplus f(x) + f(x^{2020}) \geq 4$$

Μοναδικὴ λύση

$x=1$

$B' \text{ Τροπὴ}$

$$\underbrace{f(x)-2}_{\oplus} + \underbrace{f(x^{2020})-2}_{\oplus} = 0$$

$x=1$

$x=1$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)(f(x)-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{1}{f(x)-2} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

open $f(x) \geq 2$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

$f(x)-2 \geq 0$

$$(9) \text{ Answer } f(f(x)) > e + \ln \frac{e}{2}$$

$$f(f(x)) \geq e + \ln e - \ln 2$$

$$f(f(x)) > e + 1 - \ln 2$$

$$f(f(x)) > f(2)$$

$$f \nearrow \forall x > 1$$

$$f(x) > 2$$

$$\bullet 2 > 1$$

$$\bullet f(x) \geq 2 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) > 1}}$$

$$\underline{\underline{x \neq 1}}$$

8. $f^3(x) + f(x) = e^x - x + 1$

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) (3f^2(x) + 1) = e^x - 1$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{3f^2(x) + 1}$$

→ $f'(x) = 0$

$$\frac{e^x - 1}{3f^2(x) + 1} = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

x	0
f'	0
f	↘ ↗

$$f(x) \geq f(0)$$

$$f^3(0) + f(0) = e^0 - 0 + 1$$

$$f^3(0) + f(0) = 2$$

$$f^3(0) + f(0) - 2 = 0$$

$$g(x) = x^3 + x - 2$$

$$g(f(x)) = 0$$

$$g(f(x)) = g(1)$$

$$g(1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

30. ① Ndo $e^x + \sin x > 2 + x - \frac{x^3}{6}$

$\forall x > 0$

$$e^x + \sin x - 2 - x + \frac{x^3}{6} > 0$$

$$\underbrace{e^x + \sin x - 2 - x + \frac{x^3}{6}}_{f(x)} > 0$$

$$f'(x) = e^x - \cos x - 1 + \frac{3}{6} x^2$$

$$f'(x) = e^x - \cos x - 1 + \frac{1}{2} x^2$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^x + \sin x + x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x + \cos x + 1 > 0$$

$$\cos x > -1$$

$$e^x + 1 > 0$$

x	0
f'''	+
f''	+
f'	+
f	+

Av $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$$e^x + \sin x - 2 - x + \frac{x^3}{6} > 0 \quad \checkmark$$

ΕΥΟΤΗΤΑ 24

60. $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 1, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x^2} - 1 = 0$ } $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{-x} = 0$

Ενισχύ $f(0) = 0$ άρα συνεχής στο 0.

$x < 0$
 $f_1(x) = e^{x^2} - 1$

$f_1'(x) = 2x e^{x^2} < 0$

$x > 0$
 $f_2(x) = x^2 e^{-x}$

$f_2'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$

$f_2'(x) = e^{-x} (2x - x^2)$

⊙ ⊙

x	0	2
f_1'	-	///
f_2'	///	+ 0 -
f'	-	+ -
f	↘	↘

③ Ndo $f(e^{-2x} - 1) < f(-2x) \quad \forall x \geq 0$.

• $x > 0 \Rightarrow -2x < 0 \Rightarrow e^{-2x} < e^0 \Rightarrow e^{-2x} < 1$

$e^{-2x} - 1 < 0$

• $x > 0 \Rightarrow -2x < 0$

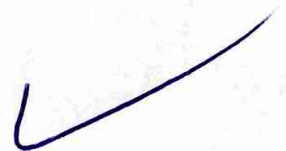
$\forall x < 0$ n f ↓

$e^{-2x} - 1 > -2x$
 dawo npenu vdo

$e^x \geq x + 1$

$e^{-2x} \geq -2x + 1$

$e^{-2x} - 1 \geq -2x$



① $\in \{ \text{mon} \} \quad f(2e^{2-x}) = f(6-2x)$

on $[0, 2]$

• $0 \leq x \leq 2$

$0 \geq -x \geq -2$

$2 \geq 2-x \geq 0$

$e^2 \geq e^{2-x} \geq e^0$

$e^2 \geq e^{2-x} \geq 1$

$2e^2 \geq 2e^{2-x} \geq 2$

• $0 \leq x \leq 2$

$0 \geq -2x \geq -4$

$6 \geq 6-2x \geq 2$

$\forall x \geq 2 \quad n \quad f \neq$

$= |f(3)| - 1$

$2e^{2-x} = 6-2x$

$e^{2-x} = 3-x$

• $e^x \geq x+1 \quad T_0 \quad " = " \quad \text{for } x=0$

$e^{2-x} \geq 2-x+1$

$e^{2-x} \geq 3-x$

$T_0 \quad " = " \quad \text{for } 2-x=0$

$x=2$

$$(8) \text{ Ndo } f\left(\frac{4}{x}\right) > f\left(\frac{8}{x^2}\right) \quad \forall x > 2$$

$$\bullet \quad x > 2$$

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{4}{x} < 2$$

$$\bullet \quad x > 2$$

$$x^2 > 4$$

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$$

$$0 < \frac{8}{x^2} < 2$$

$$\forall x \in (0, 2) \text{ u } x \nearrow$$

$$\frac{4}{x} > \frac{8}{x^2}$$

$$4x > 8$$

$$x > 2$$

