

Tautologies

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$4. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$5. (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$11. \textcircled{52} -10x^2 + 2(x+3)^3 - (2x-1)^2$$

$$= -10x^2 + 2(x^3 + 9x^2 + 21x + 9) - (4x^2 - 4x + 1) =$$

$$= -10x^2 + 2x^3 + 18x^2 + 42x + 18 - 1 = 8x^2 + 2x^3 + 42x + 17$$

$$= -10x^2 + 2(x^3 + 9x^2 + 21x + 9) - (4x^2 - 4x + 1) =$$

$$= -10x^2 + 2x^3 + 18x^2 + 54x + 54 - 4x^2 + 4x - 1 =$$

$$= 2x^3 + 4x^2 + 58x + 53$$

$$-10x^2 + 2(x^3 + 3 \cdot x \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2)$$

$$10. \textcircled{B} 1 - 2x(-x+1) - (3x-1)^2 =$$

$$= 1 + 2x^2 - 2x - (9x^2 - 6x + 1) = 1 + 2x^2 - 2x - 9x^2 + 6x - 1 =$$

$$= -7x^2 + 4x$$

$$\textcircled{B} 1 - 8x^2(x-2) - (2x-1)^3 =$$

$$= \cancel{1-8x} - 1 - 8x^3 + 16x^2 - \cancel{(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)} - (8x^3 + 3 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1 + 1) =$$

$$= 1 - 8x^3 + 16x^2 - 8x^3 - 12x^2 + 6x + 1 =$$

$$= -16x^3 + 28x^2 + 6x + 2$$

9.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{B} \quad & x^3 - 3x(2x-1) - (x-1)^3 = \\
 & = x^3 - 6x^2 + 3x - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = \\
 & = \cancel{x^3} - 6x^2 + \cancel{3x} - \cancel{x^3} + 3x^2 - \cancel{3x} + 1 = \\
 & = -3x^2 + 1
 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{B} \quad & (x+5)^2 - (3x-1)^2 + 8x^2 = \\
 & = 9x^2 + 10x + 25 - (9x^2 - 6x + 1) + 8x^2 = \\
 & = \cancel{9x^2} + 10x + 25 - \cancel{9x^2} + 6x - 1 + \cancel{8x^2} = \\
 & = 16x + 24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad & (3x+2)^2 - 3x(x-2)(x+2) - x(2x-1)^2 = \\
 & = \cancel{9x^2} + 12x + 4 - 3x(x^2 - 2^2) - x(4x^2 - 4x + 1) = \\
 & = \underline{9x^2} + \underline{12x} + 4 - \underline{3x^3} + 12x - \underline{4x^3} + \underline{4x^2} - x = \\
 & = \cancel{9x^2} - 7x^3 + 13x^2 + 23x + 4
 \end{aligned}$$

$$12. \textcircled{B} (a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2$$

~~$$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2$$~~

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\textcircled{D} (a+b)^3 - (a-b)^3 - 6a^2b = 2b^3$$

~~$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - 6a^2b = 2b^3$$~~

$$b^3 + b^3 = 2b^3$$

$$2b^3 = 2b^3$$

$$\textcircled{E} (a-1)^2 - 2(a-1)(a+1) + (a+1)^2 = 4.$$

$$\textcircled{E} a^2 - 2a + 1 - 2(a^2 - 1^2) + a^2 + 2a + 1 = 4$$

$$\cancel{a^2} - \cancel{2a} + 1 - \cancel{2a^2} + \cancel{2} + \cancel{a^2} + \cancel{2a} + 1 = 4$$

~~scribbles~~

~~scribbles~~

$$4 = 4$$

ex 10

$$A = (2-3x)^2 - x(2x-1)(-2x-1)$$

$$\begin{aligned} &= 4 - 12x + 9x^2 - (2x^2 - x)(-2x - 1) = \end{aligned}$$

$$= 4 - 12x + 9x^2 - (-4x^3 + 2x^2 + x - 2x^2) =$$

$$= 4 - 12x + 9x^2 + 4x^3 - x = 4x^3 + 9x^2 - 13x + 4$$

$$- x(2x-1)(-2x-1)$$

$$- x(1^2 - (2x)^2)$$

$$- x(1 - 4x^2)$$

$$- x + 4x^3$$

13. ⑬ $(a^2-3)^2 - a(a-1)(a-5) = (a-1)(a^3-5) + 4$

$$(a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 3 + 3^2 - a(a^2 - 5a - a + 5) = a^4 - 5a - 1a^3 + 5a^2$$

$$\cancel{a^4} - 6a^2 + 9 - \cancel{a^3} + 5\cancel{a^2} + \cancel{a^2} - 5a = \cancel{a^4} - 5a - \cancel{a^3} + 5 + 4$$

$$9 = 9$$

⑤ $(x^2-1)(a^2-9) + (3x-a)^2 = (ax-3)^2$

$$x^2a^2 - 9x^2 - 1a^2 + 9 + 9x^2 - 2 \cdot 3x \cdot a + a^2 = a^2x^2 - 2ax \cdot 3 + 9$$

$$\cancel{x^2a^2} - \cancel{9x^2} - \cancel{a^2} + 9 + \cancel{9x^2} - 6\cancel{xa} + \cancel{a^2} = \cancel{a^2x^2} - 6\cancel{ax} + 9$$

$$9. \textcircled{81} x^2 - 2x(1-x) - (2x-1)^2$$

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 2x^2 - (4x^2 - 4x + 1) = \\ & = x^2 - 2x + 2x^2 - 4x^2 + 4x - 1 = \\ & = -1x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{82} 8x(x-1)(x+1) - (2x-1)^3$$

$$\begin{aligned} & 8x(x^2-1) - ((2x)^3 - 3(2x)^2(-1) + 3(2x)(-1)^2 - (-1)^3) = \\ & = 8x^3 - 8x - (8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot (-1) + 6x \cdot 1 - (-1)) = \\ & = 8x^3 - 8x - (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = \\ & = \cancel{8x^3} - 8x - \cancel{8x^3} - 12x^2 - 6x - 1 = \\ & = -12x^2 - 14x - 1 \end{aligned}$$

$$1. \textcircled{B} (x+7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$$

$$\textcircled{C} (y-1)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$\textcircled{D} (3y-2)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 2 + 2^2 = 9y^2 - 12y + 4$$

$$\textcircled{E} (x^2+5)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 5 + 5^2 = x^4 + 10x^2 + 25$$

$$5. \textcircled{B} (x+3)(x-3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$$

$$\textcircled{C} (5x-7)(5x+7) = 25x^2 + 35x - 35x - 49 = 25x^2 - 49$$

$$\rightarrow (5x)^2 - 7^2 = 25x^2 - 49$$

extra

$$(2x-1)^2 - (2x-3)(2x+3) =$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 - (4x^2 + 6x - 6x - 9)$$

$$\cancel{4x^2} - 4x + \cancel{1} - \cancel{4x^2} + \cancel{9} = -4x + 10$$



$$(x-1)^3 - (3x-1)^2 =$$

$$= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 - ((3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2)$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (9x^2 - 6x + 1)$$

$$x^3 - \cancel{3x^2} + \cancel{3x} - 1 - 9x^2 + 6x - 1$$

$$\cancel{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 9x^2 + 6x - 1}$$

$$x^3 - 12x^2 + 9x - 2$$

$$25. \textcircled{a} \frac{x^2+2x}{3x+6} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)}$$

ΕΥΟΤΗΤΑ
6

$$\textcircled{b} \frac{3x^2-x}{6x-2} = \frac{x(3x-1)}{2(3x-1)} = \frac{x}{2}$$

$$\textcircled{γ} \frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{x^2-1^2}{x(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\textcircled{δ} \frac{3x-x^2}{x^2-9} = \frac{x(3-x)}{x^2-3^2} = \frac{x(3-x)}{(x-3)(x+3)} = \frac{-x(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\textcircled{ε} \frac{x^2-25}{10x-2x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{2x(5-x)} = -\frac{x+5}{2x}$$

$$\textcircled{ςζ} \frac{1-9x^2}{6x^2-2x} = \frac{(1-3x)(1+3x)}{2x(3x-1)} = -\frac{1+3x}{2x}$$

$$26. \textcircled{a} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)^2}{x(\cancel{x-2})} = \frac{x-2}{x}$$

$$\textcircled{b} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$$

$$\textcircled{r} \frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 1} = \frac{(3x-1)^2}{(\cancel{3x-1})(3x+1)} = \frac{3x-1}{3x+1}$$

$$\textcircled{s} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \frac{(\cancel{x+1})(x^2 - x + 1)}{x(\cancel{x+1})} = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

$$\textcircled{z} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)(x^2 + 1)}{(\cancel{x-1})(x^2 + x + 1)}$$

$$\textcircled{52} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{(\cancel{x-1})^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αναπτύγματα ταυτοτήτων

1.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+1)^2$

~~β.~~ $(x+7)^2$

γ. $(x-5)^2$

~~δ.~~ $(y-1)^2$

ε. $(2x+3)^2$

~~σ.~~ $(3y-2)^2$

ζ. $(5\alpha-2\beta)^2$

~~η.~~ $(x^2+5)^2$

θ. $(3x^2-1)^2$

2.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

β. $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2$

γ. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

3.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+2)^3$

β. $(x-3)^3$

γ. $(2x-1)^3$

δ. $(x^2-4)^3$

4.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+3y+1)^2$

β. $(x^2+x+1)^2$

5.

Να βρείτε τα γινόμενα:

α. $(x-1) \cdot (x+1)$

~~β.~~ $(x+3) \cdot (x-3)$

γ. $(3x+2) \cdot (3x-2)$

~~δ.~~ $(5x-7) \cdot (5x+7)$

ε. $(3x^2-5) \cdot (3x^2+5)$

στ. $\left(y^2-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(y^2+\frac{2}{3}\right)$

6.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(5+\sqrt{2})^2$

β. $(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})$

7.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $[-(\lambda-1)]^2$

β. $(-3x-2)^2$

γ. $(-3x+1)^2$

δ. $(-4x+1)^3$

8.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(5x-3y+1)^2$

β. $(2\alpha-\beta-3\gamma)^2$

γ. $(x^2-x-1)^2$

9.

Να κάνετε τις πράξεις:

α. $x-x(x-1)-(x-2)^2$

~~β.~~ $x^3-3x(2x-1)-(x-1)^3$

γ. $(x-2)(3x-1)-(x-1)(x+1)$

~~δ.~~ $x^2-2x(1-x)-(2x-1)^2$

ε. $2(x-5)^2-(3x-2)(3x+2)$

~~ς.~~ $8x(x-1)(x+1)-(2x-1)^3$

10. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(3x-2)^2 - x(x-1)(x+1)$

γ. $x^3 - (3x-2)(3x+2) - (1-2x)^2$

ε. $(x^2-x+1)^2 - x^2(x^2+3)$

β. $1-2x(-x+1)-(3x-1)^2$

δ. $1-8x^2(x-2)-(2x-1)^3$

στ. $x^5 - (-x-2)(x-2) - x(-x^2+1)^2$

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(7x-2)^2 - (2x-3) \cdot (x-5)$

γ. $(3x-1)^2 - x(5+2x)(2x-5)$

ε. $x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-2)$

β. $(x+5)^2 - (3x-1)^2 + 8x^2$

δ. $(3x+2)^2 - 3x(x-2)(x+2) - x(2x-1)^2$

στ. $-10x^2 + 2(x+3)^3 - (2x-1)^2$

12. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2$

γ. $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$

ε. $(\alpha-1)^2 - 2(\alpha-1) \cdot (\alpha+1) + (\alpha+1)^2 = 4$

β. $(\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2$

δ. $(\alpha+\beta)^3 - (\alpha-\beta)^3 - 6\alpha^2\beta = 2\beta^3$

13. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α. $(2x-1)^2 - 3x(x-1) + 3x = (x+1)^2$

β. $(\alpha^2-3)^2 - \alpha(\alpha-1) \cdot (\alpha-5) = (\alpha-1)(\alpha^3-5) + 4$

γ. $(\alpha^2+1) \cdot (x^2+4) = (\alpha x+2)^2 + (x-2\alpha)^2$

δ. $(x^2-1) \cdot (\alpha^2-9) + (3x-\alpha)^2 = (\alpha x-3)^2$

14. Να βρείτε τη διακρίνουσα των τριωνόμων:

α. $x^2 - (\lambda-1)x - \lambda + 2$

β. $\lambda x^2 - (2\lambda-1)x - \lambda + 2$

γ. $(\lambda+1)x^2 - (3\lambda-1)x + \lambda - 1$

δ. $\lambda x^2 - 2(\lambda-1)x - \lambda + 1$

15. α. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot (\alpha-2) - (\alpha-1)^2 = -1$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $2022 \cdot 2020 - 2021^2$.

16. α. Να αποδείξετε ότι $(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) \cdot (x^4+1) = x^8 - 1$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10.001$.

17. α. Να δείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 4$.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κοινός παράγοντας

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3x + 3y$

δ. $3x - 12$

ζ. $3x + 3$

β. $7x - 7y$

ε. $4x + 6$

η. $10x - 2$

γ. $2x + 6$

στ. $9x - 6$

θ. $15x - 5$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + 3x$

δ. $2x^2 + 6x$

β. $x^2 - 2xy$

ε. $6x^2 - 8x$

γ. $x^3 - 3x^2$

στ. $14x^3 - 21x^2$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + x$

δ. $x^3 - x^2 + x$

β. $x^2 - x$

ε. $6x^2 + 3x$

γ. $x^3 + x$

στ. $6x^4 + 2x^2$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x(2x - 1) + 3(2x - 1)$

γ. $(x - 1)^2 + 3(x - 1)$

ε. $(5x + 2) \cdot (3x - 1) + 5x + 2$

β. $x(2x - 1) - 3(2x - 1)$

δ. $(x - 2)^2 + 3(2 - x)(x + 1)$

στ. $x(2x - 1) - 2x + 1$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x(2x - 1) + 6x - 3$

γ. $x(2x - 1) - 6x + 3$

ε. $(2x - 1)^2 + 2x - 1$

ζ. $[-(\lambda - 1)]^2 - 4(1 - \lambda)$

β. $(x - 2)^2 + 3x - 6$

δ. $(x - 3)^2 - 2x + 6$

στ. $(3x - 2)^2 - 3x + 2$

η. $[-(2\lambda - 1)]^2 + 4(1 - 2\lambda)$

Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Διαφορά τετραγώνων

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 - 9$

β. $x^2 - 4$

γ. $x^2 - 25$

δ. $x^2 - 1$

ε. $4x^2 - 49$

στ. $49y^2 - 16$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 - \frac{1}{x^2}$

β. $y^2 - \frac{1}{4}$

γ. $9x^2 - \frac{25}{4}$

δ. $x^4 - 81$

ε. $(5x - 1)^2 - 9$

στ. $x^2 - 3$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $5x^2 - 20$

β. $x^3 - 4x$

γ. $x^4 - 16x^2$

δ. $2x^3 - 18x$

ε. $4x^3 - x$

στ. $3x^4 - 12x^2$

11. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

β. $4x^3 - 8x^2 - x + 2$

γ. $(2x - 1) \cdot (x + 3) - x^2 + 9$

δ. $x^3 - 2x^2 + (2x - 1)(2 - x)$

12. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $101^2 - 99^2$

β. $\frac{(11,36)^2 - (7,52)^2}{3,84}$

Άθροισμα ή Διαφορά κύβων

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 + 8$

β. $x^3 - 1$

γ. $27x^3 - 125$

δ. $(2x - 1)^3 - x^3$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^4 - x$

β. $2x^5 - 16x^2$

γ. $x^4 - 2x^3 - x + 2$

δ. $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8$

ε. $x^7 - x^4 - x^3 + 1$

Ανάπτυγμα τετραγώνου διωνύμου

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + 6x + 9$

β. $y^2 - 10y + 25$

γ. $x^2 - 4x + 4$

δ. $x^2 - 2x + 1$

ε. $x^2 - 8x + 16$

στ. $x^2 + x + \frac{1}{4}$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $4x^2 - 4x + 1$

β. $9x^2 - 12x + 4$

γ. $25x^2 - 10x + 1$

δ. $x^4 - 2x^2 + 1$

ε. $x^4 - 8x^2 + 16$

στ. $16x^4 - 8x^2 + 1$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος: 17/9/26

Ώρα μαθήματος: 19:00

Ασκήσεις

Ενότητα 5

① α γ ε ζ θ

⑤ α γ ε σ ζ

⑨ α γ ς

⑩ α γ ε

⑪ α γ ς

⑫ α γ

⑬ α γ

Ενότητα 6

② ο λ υ

⑧ ο λ υ

⑬ α β

⑮ ο λ υ

⑯ ο λ υ

παρατηρήσεις