Ασκηση 1

Νδο η εξισωση $x^2 - \lambda x - (\lambda+3) = 0$

εχει ριζες πραγματικες και ανισες

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot -(\lambda+3) = \boxed{\lambda^2+4\lambda+12}$

$*\Delta = 16-48 = -36$

Αφου $\Delta^* < 0$ το τριωνυμο $\lambda^2+4\lambda+12$

διατηρει σταθερο προσημο ομοσημο του

α αρα θετικο δηλαδη $\lambda^2+4\lambda+12>0$

$\Rightarrow \Delta > 0$ αρα εχει 2 ριζες

πρ. και ανισες.

Ασκηση 2

Νδο η εξισωση $x^2+(\lambda-1)x+\lambda^2-\lambda+1=0$ ειναι αδυνατη

$$\Delta = (\lambda-1)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda^2-\lambda+1) =$$

$$= \lambda^2-2\lambda+1-4\lambda^2+4\lambda-4 =$$

$$= -3\lambda^2+2\lambda-3$$

$$\Delta^* =$$

$$= \beta^2-4\alpha\gamma =$$

$$= 2^2-4\cdot(-3)\cdot(-3) =$$

$$= 4-36$$

$$-32<0$$

λ	$-\infty$	$+\infty$
$-3\lambda^2+2\lambda-3$	$-$	

Αδυνατη.

$\Rightarrow \Delta<0$

αδυνατη.

Ασκηση 4

Να βρεθ τα μ ωστε το τριωνυμο

$x^2 + (2\mu - 1)x + \mu^2 - 1$ να διατηρει σταθερο

προσημο.

Απαιτω $\Delta < 0$

$B^2 - 4a\gamma < 0$

$(2\mu - 1)^2 - 4(\mu^2 - 1) < 0$

$\cancel{4\mu^2} - 4\mu + 1 - \cancel{4\mu^2} + 4 < 0$

$-4\mu + 5 < 0$

$-4\mu < -5$

$\mu > \frac{5}{4}$

Ασκηση 5

Να βρει το μ ωστε το τριωνυμο $-4x^2+(\mu+3)x-\mu$ να διατηρει σταθερο προσημο

Απαιτώ $\Delta < 0$

$$\beta^2-4\alpha\gamma<0$$

$$(\mu+3)^2-4\cdot(-4)\cdot(-\mu)<0$$

$$\mu^2+6\mu+9-16\mu<0$$

$$\boxed{\mu^2-10\mu+9<0}$$

$$\Delta^* = \beta^2-4\alpha\gamma =$$

$$=(-10)^2-4\cdot1\cdot9=$$

$$=100-36$$

$$=64$$

$$\mu_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$\mu_{1,2}=\frac{10\pm8}{2}$$

$$\mu_1=\frac{10+8}{2} \quad ή \quad \mu_2=\frac{10-8}{2}$$

$$\mu_1=9 \quad ή \quad \mu_2=1$$

μ	$-\infty$	1		9		$+\infty$
$\mu^2-10\mu+9$	+		−		+	

$\mu \in (1, 9)$ ✓

Ασκηση 8

Να βρεθεί το λ ωστε το τριωνυμο

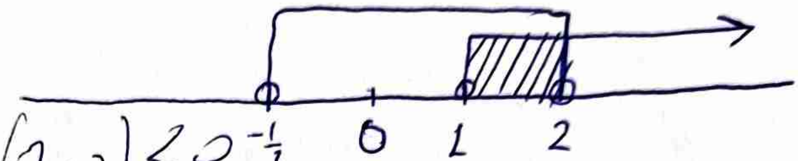
$(\lambda-1)x^2+4x+\lambda+2$, $\lambda\neq 1$

να ειναι θετικο.

$\lambda-1>0$
$\lambda>1$

$\Delta<0$, $a>0$

$\beta^2-4a\gamma<0$



$4^2-4\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)<0$

$\lambda\in(1,2)$

$16-4(\lambda^2+2\lambda-\lambda-2)<0$

$16-4\lambda^2-8\lambda+4\lambda+8<0$

κοινα

$-4\lambda^2-4\lambda+24<0\ (:4)$

$\lambda\in(2,+\infty)$

$\cancel{\Delta^*=\beta^2-4a\gamma}$

$\boxed{-\lambda^2-\lambda+6<0}$

$\cancel{\Delta^*=(-4)^2-4\cdot(-4)\cdot 24}$

$\lambda\in(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(2,+\infty)$

$\Delta^*=\beta^2-4a\gamma$

$\Delta^*=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 6$

$\Delta^*=1+24$

$\Delta^*=25$

$\lambda_1=-\frac{1}{3}$, $\lambda_2=2$

$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm 5}{-2}$

λ	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$-\lambda^2-\lambda+6$	$-$		$+$		$-$

Ασκηση 7

Να βρει το λ ωστε το τριωνυμο

$$(2\lambda-1)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1 \quad , \lambda \neq \frac{1}{2}$$

να ειναι θετικο.

$a > 0$

$2\lambda - 1 > 0$

$2\lambda > 1$

$\boxed{\lambda > \frac{1}{2}}$ $\boxed{\lambda \in (\frac{1}{2}, +\infty)}$

Απαιτω $\Delta < 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4(2\lambda-1)^2 < 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4(4\lambda^2 - 4\lambda + 1) < 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda^2 + 16\lambda - 4 < 0$

$\Leftrightarrow -12\lambda^2 + 16\lambda - 4 < 0$

$^*\Delta = 256 - 4(-4)\cdot(-12)$

$\Delta = 256 + 16\cdot(-12)$

$\Delta = 256 - 192$

$\Delta = 64$

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16-8}{-24} = -1$$

$$x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16+8}{-24} = -\frac{1}{3}$$

λ		$-\frac{1}{3}$		-1	
$-12\lambda^2+16\lambda-4$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\lambda \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-1, +\infty)$

Ασκηση 9

Να βρεί το λ ώστε το τριώνυμο

$(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-1)x - \lambda$, $\lambda \neq 1$ να

είναι αρνητικό.

Απαιτώ $\Delta < 0$ και $\lambda - 1 < 0$

$\underline{\underline{\lambda < 1}}$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\
&= [-2(\lambda-1)]^2 - 4(\lambda-1)(-\lambda) \\
&= 4(\lambda-1)^2 - 4(-\lambda^2+\lambda) \\
&= 4(\lambda^2-2\lambda+1) + 4\lambda^2 - 4\lambda \\
&= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + 4\lambda^2 - 4\lambda \\
&= 8\lambda^2 - 12\lambda + 4 < 0
\end{aligned}
$$

κοινή

$\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$
\begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta^* &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\
&= (-12)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 4 \\
&= 144 - 128 \\
&= 16
\end{aligned}
$$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{12 \pm 4}{16} =$ 1, $\frac{1}{2}$

λ		$\frac{1}{2}$		1	
$8\lambda^2 - 12\lambda + 4$	+		−		+

$\underline{\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)}$

Άσκηση 10

Να λυθεί $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$

$\boxed{\text{Ορίζω } w = x^2}$

$w^2 - 10w + 9 \geq 0$

$\Delta = 100 - 36 = 64$

$\Delta = 64$

$X_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10-8}{2} = 1$

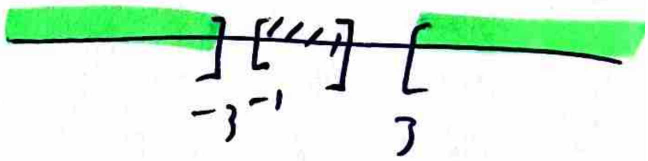
$X_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10+8}{2} = 9$

w		1		9	
$w^2 - 10w + 9$	+	0	−	0	+

$w \in (-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$

$w \leq 1$ ή $w \geq 9$

$x^2 \leq 1$ ή $x^2 \geq 9$



$x^2 - 1 \leq 0$

x		-1		1	
$x^2 - 1$	+		−		+

$x \in [-1, 1]$

$x^2 - 9 \geq 0$

x		-3		3	
$x^2 - 9$	+		−		+

$x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

Τελικά

$x \in (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$.

Ασκηση 6

Να Βρεί το μ ωστε το τριωνυμο

$(\mu+5)x^2 + (\mu+2)x + 1$ να εχει σταθερο

προσημο.

Απαιτου $\Delta < 0$

$(\mu+5)x^2 + (\mu+2)x + 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$(\mu+2)^2 - 4\cdot(\mu+5) < 0$

$(\mu^2 + 4\mu + 4) - 4\mu - 20 < 0$

$\mu^2 + \cancel{4\mu} + 4 - \cancel{4\mu} - 20 < 0$

$= \mu^2 + 4 - 20 = \mu^2 - 16 < 0$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \mu^2 - 16 < 0$

$(\mu-4)(\mu+4) < 0$

$4 \quad -4$

μ	-4	4
μ^2-16	$+ \; 0 \; -$	$0 \; +$

$\mu \in (-4, 4)$

Άσκηση 13

Να λυθεί $x^2 - 6|x| + 8 > 0$

$|x|^2 - 6|x| + 8 > 0$

Θέτω $|x| = t$

$t^2 - 6t + 8 > 0$

$\Delta = B^2 - 4a\gamma$

$= (-6)^2 - 4 \cdot 8$

$= 36 - 32$

$= 4$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{6 \pm 2}{2}$ ⟨ 4, 2

t		2		4	
$t^2 - 6t + 8$	$+$	0	$-$	0	$+$

$t < 2$ ή $t > 4$

$|x| < 2$ ή $|x| > 4$

$-2 < x < 2$ $\quad$ $x > 4$ ή $x < -4$

$x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

$x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 2) \cup (4, +\infty)$.

Άσκηση 12

$$\begin{cases} x^2+4x-5>0 \\ x^2-4 \leq 0 \end{cases}$$

$x^2+4x-5>0$

$\Delta = 4^2 - 4\cdot(-5)$

$= 16+20$

$= 36$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2} \begin{array}{l} 1 \\ -5 \end{array}$

x		-5		1	
x^2+4x-5	$+$		$-$		$+$

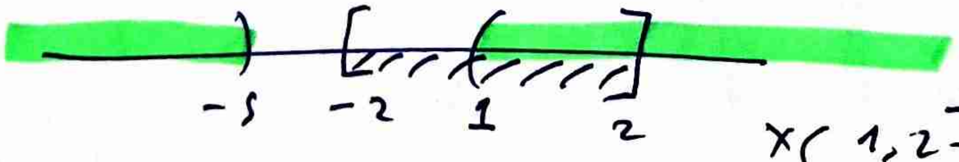
$x \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

$x^2-4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \leq 0$

$x \leq 2 \quad x \leq -2$

x		-2		2	
x^2-4	$+$		$-$		$+$

$x \in [-2, 2]$



$x (1, 2]$

Άσκηση 11

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις.

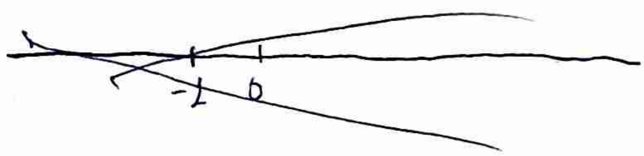
$$2x^2-8x-6<(x-3)^2<3x^2-8x+5.$$

$$\begin{cases}(x-3)^2<3x^2-8x+5\\(x-3)^2>2x^2-8x-6\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-6x+9<3x^2-8x+5\\x^2-6x+9>2x^2-8x-6\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-3x^2-6x+8x+9-5<0\\x^2-6x+9-2x^2+8x+6>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x^2+2x+4<0\\-x^2+2x+15<0\end{cases}$$



$-2x^2+2x+4<0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta=2^2-4\cdot(-2)\cdot 4$

$\Delta=4+32$

$\Delta=36$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ $\quad$ $x_1=-1$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 6}{-4}$ $\quad$ $x_2=2$

$-x^2+2x+15<0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot 15$

$\Delta=4+60$

$\Delta=64$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ $\quad$ $x_1=-3$

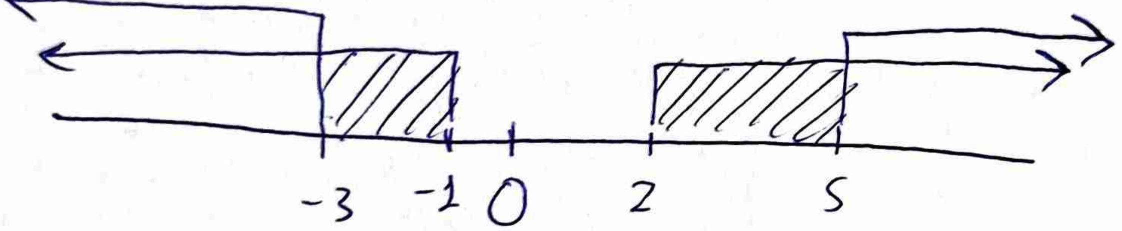
$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 8}{-2}$ $\quad$ $x_2=5$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x^2+2x+4$		$-$		$+$		$-$	

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$-x^2+2x+15$		$-$		$+$		$-$	

$x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$



$x \in (-3, -1) \cup (2, +5)$

Ασκηση 14

Να λυθει $(2x-1)^2 - 3|2x-1| + 2 < 0$

$|2x-1|^2 - 3|2x-1| + 2 < 0$

ορίζω $|2x-1| = y$

$y^2 - 3y + 2 < 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

$y_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

$y_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$y_1 = 2$ ή $y_2 = 1$

y	$-\infty$	1		2		$+\infty$
y^2-3y+2	+		−		+	

$y \in (1, 2)$

$1 < y < 2$

$1 < |2x-1| < 2$

$|2x-1| > 1$ και $|2x-1| < 2$

$2x-1 > 1$ ή $2x < -1$

$2x > 2$ $\quad x < \frac{1}{2}$

$x > 1$

$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

$-2 < 2x-1 < 2$

$-1 < 2x < 3$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

κοινό

$x \in (1, \frac{3}{2})$.

Ασκηση 15

Εστω $x^2-(\lambda+1)x+\lambda=0$

(α) Βρε λ ωστε να εχει πραγμ. ριζα

Απαιτω $\Delta \geq 0$

$$(\lambda+1)^2-4\lambda \geq 0$$

$$\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda \geq 0$$

$$\lambda^2-2\lambda+1 \geq 0 \quad ✓ \quad \underline{\underline{\lambda \in \mathbb{R}}}$$

λ		1	
$\lambda^2-2\lambda+1$	+	0	+

$\lambda \in (-\infty, +\infty)$.

(β) Βρε λ ωστε $x_1^2+x_2^2 < -2(2x_1x_2+1)$

$x_1+x_2=\lambda+1$

$x_1x_2=\lambda$.

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 < -4x_1x_2-2$$

$$(\lambda+1)^2-2\lambda < -4\lambda-2$$

$$\lambda^2+\cancel{2\lambda}+1-\cancel{2\lambda}+4\lambda+2<0$$

$$\lambda^2+4\lambda+3<0$$

λ		−3		−1	
$\lambda^2+4\lambda+1$	+		−		+

$\lambda \in (-3,-1)$

Ασκηση 3

Νδο η εξισωση $x^2 - (3\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$

εχει ριζα πραγματικα.

$x^2 - (3\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1$

$\Delta = B^2 - 4a\gamma =$

$= \left[-(3\lambda-1)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) =$

$= (3\lambda - 1)^2 - 4 \cdot (\lambda^2 - 1) =$

$= 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4 =$

$= 5\lambda^2 - 6\lambda + 5 \quad \Rightarrow \underline{\Delta = 5\lambda^2 - 6\lambda + 5}$

$\Delta^* = B^2 - 4a\gamma$

$(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5$

$36 - 100$

$= -64 < 0$

Αφου $\Delta^* < 0$ τοτε το τριωνυμο $5\lambda^2 - 6\lambda + 5$

διατηρει σταθερο προσημο θετικο

δηλαδη $\Delta > 0$ ✓