Θεμα Α

Α1: Τι ονομαζουμε κρισιμα σημεια μιας συναρτησης; (5)

Α2: Ποτε λεμε οτι μια συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει στο x_0 ολικο ελαχιστο το $f(x_0)$; (5)

Α3: Εστω συναρτηση f παραγωγισιμη στο (α,β) με εξαιρεση ισως ενα σημειο x_0 στο οποιο ομως η f ειναι συνεχης.

Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) τοτε νδο το $f(x_0)$ ειναι τοπικο μεγιστο της f. (5)

Α4: Να χαρακτηριστουν οι παρακατω προτασεις ως Σωστες ή Λαθος. (10)

ⓐ Ισχυει οτι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

ⓑ $\forall x \in R_1 = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ειναι $(\varepsilon\varphi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

(γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

(δ) Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

(ε) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Θεμα Β

Δινεται $f:[-\infty,0] \longrightarrow R$ συνεχης η οποια διερχεται απο το σημειο $A(-1,-\frac{1}{e})$ και ισχυει οτι

$f^2(x) - (e^x - x - 1)^2 = 0$, $\forall x \leq 0$

B1: Νδο $f(x) = x+1-e^x$, $x \leq 0$

B2: Αν $g(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ να βρεις την $f \circ g$

B3: Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(x+1) - x$, $x \in (-1,0]$

να βρεις το συνολο τιμων και την κυρτοτητα της $f(x)$

B4: Να βρεθουν οι ασυμπτωτες της $h(x)$, να γινει η γραφικη παρασταση της $h(x)$ και στη συνεχεια να υπολογιστει το οριο

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha}{h'(x) - h'(2x)} , \alpha < 0$$

μοναδες (6/5/6/8)

Θεμα Γ   (6|5|6|8) Μον.

Δινεται συναρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}+\alpha, & x\geq 1 \end{cases}$

οπου $\alpha \in R$ για την οποια ικανοποιειται το Θεωρημα ενδιαμεσων τιμων στο $[-2026, 2026]$.

Γ1: Νδο $\alpha=0$ και στη συνεχεια να εξετασετε αν ικανοποιουνται οι προυποθεσεις του ΘΜΤ στο $[0,2]$.

Γ2: Νδο η εξισωση $f(x)+|\alpha| = |\eta\mu\alpha|$, $\alpha\in R$ ειναι αδυνατη στο R.

Γ3: Να βρειτε την εφαπτομενη της C_f η οποια τεμνει τον αξονα $x'x$ σε σημειο με τετμημενη 2.

Γ4: Ενα υλικο σημειο M κινειται κατα μηκος της ευθειας $y=-x+2$, $x>1$. Αν η τετμημενη του M αυξανεται με ρυθμο 1 να βρεθει ο ρυθμος μεταβολης του εμβαδου του τριγωνου $\overset{\triangle}{MK\Lambda}$ οπου $K(0,y)$, $y<0$ $\Lambda(0,1)$ οταν το M διερχεται απο το $A(3,-1)$

Θεμα Δ

Δινεται $f: R \to R$ με τυπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$

Δ1: Νδο υπαρχει μοναδικο $x_0 \in (0,1)$ στο οποιο η $f(x)$ παρουσιαζει ολικο ελαχιστο (7)

Στη συνεχεια νδο $f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2: Να υπολογιστει το οριο

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$ (6)

Δ3: Νδο η εξισωση $f(x) + x = x_0$, $x \in (x_0, 1)$

εχει μοναδικη ριζα $ρ$ (5)

Δ4: Νδο $f(x_0) > f(ρ)\left(f'(κ) + 1\right)$ $\forall\, κ \in (ρ, 1)$

(7)

Καλη Επιτυχια!

A1: Ορισμος

A2: Ορισμος

A3: Ορισμος + αποδειξη

A4: (α) Λ (β) Λ (γ) Σ (δ) Λ (ε) Σ

B1: $f^2(x) - (e^x - x - 1)^2 = 0$

$f^2(x) = (e^x - x - 1)^2$

$|f(x)| = |e^x - x - 1|$ γιατι $e^x \geq x+1$

$e^x - x - 1 \geq 0$

$|f(x)| = e^x - x - 1$ Το "=" για $x=0$

$-f(x) = e^x - x - 1$

$\boxed{f(x) = x+1-e^x}$

Ριζα $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$e^x - x - 1 = 0$

$x = 0$

x		0	
$f(x)$	$-$	0	//////

$f(-1) = -\frac{1}{e}$

B2 : $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 - e^{g(x)} =$

$= \ln(x+1) + 1 - e^{\ln(x+1)}$

$= \ln(x+1) + 1 - (x+1)$

$= \ln(x+1) + 1 - x - 1$

$= \ln(x+1) - x$

Άρα $\boxed{h(x) = \ln(x+1) - x}$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x > -1$ και $\ln(x+1) \leq 0$

$e^{\ln(x+1)} \leq e^0$

$x \in (-1, 0]$.

$x+1 \leq 1$

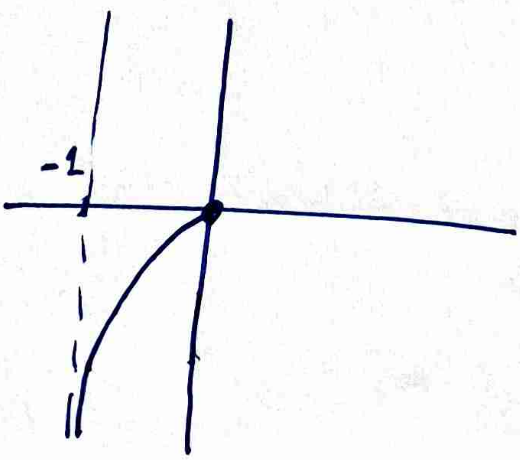
$x \leq 0$

B3 : $h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{1 - x - 1}{x+1} = \dfrac{-x}{x+1} > 0$

άρα $h \nearrow$

$\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) - x = -\infty + 1 = -\infty$

$h(0) = 0$



$h''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$

h κοίλη

Β4: Αφού $\lim_{x\to -1^+} h(x) = -\infty$ η $ε: x=-1$ κατακορυφη ασυμπτωτη!

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha}{h'(x)-h'(2x)} = \lim_{x\to 0^-} \alpha \cdot \frac{1}{\underbrace{h'(x)-h'(2x)}_{\ominus}} = +\infty .$$

$\alpha < 0$

Για $x<0$ το $x > 2x \Rightarrow h'(x) < h'(2x)$

$(h''(x)<0 \Rightarrow h' \downarrow)$

$h'(x) - h'(2x) < 0$

Γ1: Αφού ικανοποιειται το ΘΕΤ στο $[-2026, 2026]$ — $-2026 \quad 1 \quad 2026$

η f συνεχης στο $[-2026, 2026]$

αρα και στο 1.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2-3x+3 = 1 \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x}+\alpha = \alpha+1 \end{aligned}\right\} \quad \alpha+1 = 1, \quad \alpha = 0$$

$$\cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-3}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x^2} = -1$$

Αρα παρ/μη στο 1!

Επισης παρ/μη στο $(0,1)$ και $(1,2)$ ως π.π.σ.

Αρα παρ/μη στο $(0,2)$
Συνεχης στο $[0,2]$ } ΘΜΤ ok!

Γ2: $f(x) + |\alpha| = |\eta\mu\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(x) = |\eta\mu\alpha| - |\alpha|$

Γνωριζω οτι $|\eta\mu\alpha| \leq |\alpha| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{|\eta\mu\alpha| - |\alpha| \leq 0}$

Αρκει νδο $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$!

$\underline{x < 1}$

$f_1(x) = x^2 - 3x + 3$

$f_1'(x) = 2x - 3$

$\to 2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

$\underline{x \geq 1}$

$f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

x	$-\infty$ … 1	1 … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … $+\infty$
f_1'	$-$	$+$	0 $+$
f_2'		$-$	$-$
f'	$-$	$-$	$-$
f	$+\infty$ ↘	↘	↘ 0

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2-3x+3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\Sigma T_f = (0,+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα $f(x)>0$. συνεπώς η εξίσωση

$f(x) = |\eta\mu\alpha|-|\alpha|$ αδύνατη.

Γ3: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \longrightarrow A(2,0)$

$0-f(x)=f'(x)(2-x)$

$\underline{x<1}$

$-(x^2-3x+3)=(2x-3)(2-x)$

$-x^2+\cancel{3x}-3 = 4x-2x^2-6+\cancel{3x}$

$x^2-4x+3=0$

$\cancel{x=1}$ $\cancel{x=3}$

$\underline{x \geq 1}$

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}(2-x)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2-x}{x^2} \iff x^2 = x(2-x) \Rightarrow x^2 = 2x - x^2$$

$$2x^2 = 2x$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(x-1) = 0$$

$$\cancel{x=0} \quad x = 1$$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

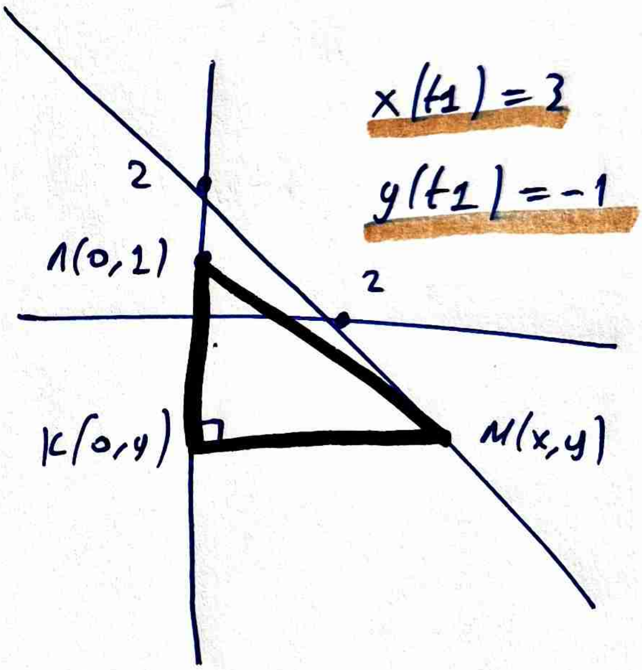
$$y - 1 = -1(x-1)$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

Γ4: $x'(t) = 1$

$x(t_1) = 3$

$y(t_1) = -1$



$$E = \frac{B \cdot U}{2}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(x \cdot (1-y)\right)$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\, x(t)(1-y(t))$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left[x'(t)(1-y(t)) - x(t)\, y'(t)\right]$$

$\underline{t = t_1}$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2}\left(x'(t_1)(1-y(t_1)) - x(t_1)\, y'(t_1)\right)$$

Γνωρίζω ότι $y(t) = -x(t) + 2$

$$y'(t) = -x'(t)$$

$$\xrightarrow{t=t_1}$$

$$y'(t_1) = -x'(t_1)$$

$$y'(t_1) = -1$$

Άρα $E'(t_1) = \frac{1}{2}\left(1 \cdot (1-(-1)) - 3 \cdot (-1)\right)$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2}$$

$$E'(t_1) = \frac{5}{2}$$

Δ1: $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$

$f'(x) = e^x + 2x - e$

$f''(x) = e^x + 2 > 0$

x	
f''	$+$
f'	$\nearrow$
f	

x		x_0	
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geq f(x_0)$

$f'(0) = e^0 + 0 - e = 1 - e < 0$

$f'(1) = e + 2 - e = 2$

$f'(0)f'(1) < 0$

Bolzano $\exists x_0 \in (0,1)$

τ.ω $f'(x_0) = 0$

$x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

$x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$

Αφού $f''(x) > 0$

$f' \nearrow$ άρα το

x_0 μοναδικό.

Γνωρίζω ότι $f'(x_0) = 0$

$e^{x_0} + 2x_0 - e = 0$

$e^{x_0} = e - 2x_0$

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 =$

$= e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = \underline{x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1}$

Δ_2 : $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \dfrac{1}{x - x_0} \right)$

$$-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x-x_0} \leq 1$$

$$\boxed{\frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x-x_0} \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + 1}$$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 = +\infty$

$\to f(x) \geq f(x_0)$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} + 1 = +\infty$

Από κριτ. παρεμβ.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x-x_0} = +\infty$$

Δ3: $f(x)+x=x_0$ $\qquad x\in(x_0,1)$

$g(x)=f(x)+x-x_0$

$g(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0$

$g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$

• $x_0<1 \Rightarrow f(x_0)<f(1) \Rightarrow f(x_0)<0$

$g'(x)=f'(x)+1>0$ $\quad g\nearrow$ άρα το ρ μοναδική ρίζα.

$\oplus$

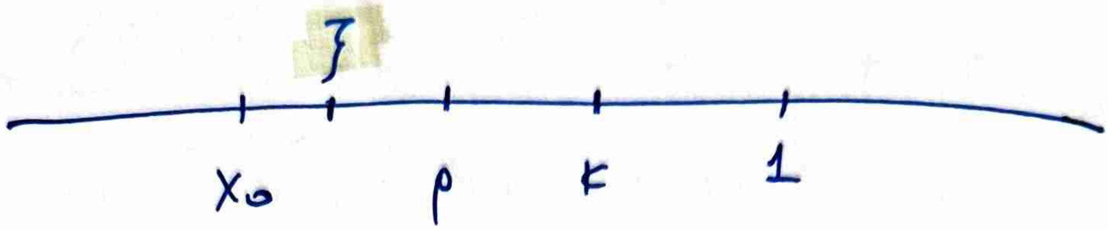
Στο $(x_0,1)$

Αφού $g(x_0)g(1)<0$ Bolzano $\exists!\,\rho\in(x_0,1)$

τ.ω. $g(\rho)=0$

Δ4 : Νδο $f(x_0) > f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right)$

$\forall \kappa \in (\rho, 1)$



$$\boxed{\begin{aligned} &f(\rho)+\rho = x_0 \\ &f(\rho) = x_0-\rho \\ &f(\rho)<0 \end{aligned}}$$

$$f(x_0) > f(\rho)\,f'(\kappa) + f(\rho)$$

$$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)\,f'(\kappa)$$

$$\frac{f(x_0)-f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa)$$

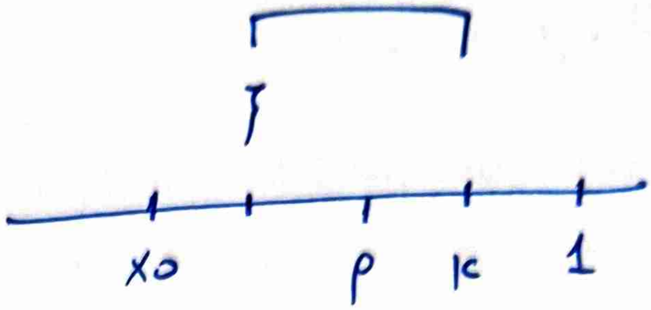
$$\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)$$

$$\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0} < f'(\kappa) \Rightarrow f'(\xi) < f'(\kappa)$$

$f' \uparrow$

$\xi < \kappa$

Β' τρόπος Γ



$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}$$

$\xi < \kappa$

$f' \nearrow$

$$f'(\xi) < f'(\kappa)$$

$$\frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(\kappa)$$

$$\frac{f(\rho) - f(x_0)}{-f(\rho)} < f'(\kappa)$$

$$f(\rho) - f(x_0) < -f(\rho) f'(\kappa)$$

$$f(\rho) + f(\rho) f'(\kappa) < f(x_0)$$

$$f(\rho)\left(1 + f'(\kappa)\right) < f(x_0) \quad \checkmark$$

Ολοκληρώματα

1. $\int_0^1 2x\,dx = (x^2)_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$

2. $\int_0^\pi \eta\mu x\,dx = (-\sigma\upsilon\nu x)_0^\pi = -(\sigma\upsilon\nu x)_0^\pi =$

$= -(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = -(-1-1) =$

$= 2$

3. $\int_0^1 e^x\,dx = (e^x)_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

4. $\int_1^2 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2 = \frac{1}{3}(x^3)_1^2 =$

$= \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) =$

$= \frac{1}{3}7$

Γενικός κανόνας

$$\int x^\rho\,dx = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$$

5. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{x}\right)_{-1}^{1} =$

$= -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -(1+1) = -2$

6. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = \int_{-1}^{1} x^{-4}\,dx = \left(\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right)_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3}\right)_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\left(1-(-1)\right)$

$= -\frac{2}{3}.$

7. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln|x|\right)_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln|-1| =$

$= 0 - \ln 1 = 0-0=0$

8. $\int_{1}^{2} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int_{1}^{2} \frac{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int_{1}^{2} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

$= \int_{1}^{2} x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}\,dx = \int_{1}^{2} x^{\frac{5}{6}}\,dx = \left(\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1}\right)_{1}^{2}$

$$= \left(\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}}\right)_1^2 = \frac{1}{\frac{11}{6}}\cdot\left(x^{11/6}\right)_1^2 = \frac{6}{11}\left(\sqrt[6]{x^{11}}\right)_1^2$$

$$= \frac{6}{11}\left(\sqrt[6]{x^6\cdot x^5}\right)_1^2 = \frac{6}{11}\left(\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{x^5}\right)_1^2$$

$$= \frac{6}{11}\left(x\sqrt[6]{x^5}\right)_1^2 = \frac{6}{11}\left(2\sqrt[6]{2^5}-1\right).$$

9. $$\int_0^\pi 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_0^\pi 2\eta\mu x\,dx - \int_0^\pi 3\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

$$= 2\int_0^\pi \eta\mu x\,dx - 3\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x\,dx$$

$$= 2\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)_0^\pi - 3\left(\eta\mu x\right)_0^\pi =$$

$$= -2\left(\sigma\upsilon\nu x\right)_0^\pi - 3\left(\eta\mu\pi - \eta\mu 0\right) =$$

$$= -2\left(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0\right) - 3(0-0) =$$

$$= -2(-1-1) = 4.$$

10. $\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left(-e^{-x}\right)_0^1 = -\left(e^{-x}\right)_0^1$

$= -\left(e^{-1}-1\right)$

$= -\frac{1}{e}+1$

Γενικούς κανόνας

$$\int e^{ax+\beta}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+\beta}$$

$$\int \eta\mu(ax+\beta) = -\frac{1}{a}\,\sigma\upsilon\nu(ax+\beta)$$

$$\int \sigma\upsilon\nu(ax+\beta) = -\frac{1}{a}\,\eta\mu(ax+\beta)$$

$$\int \frac{1}{ax+\beta}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+\beta|.$$

11. $\int_0^{\pi} 2\eta\mu(2x-1) - \frac{1}{2}e^{3-x}\,dx =$

$= 2\int_0^{\pi}\eta\mu(2x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{3-x}\,dx$

$= 2.\left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(2x-1)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1}e^{3-x}\right)_0^{\pi}$

$= -\left(\sigma\upsilon\nu(2\pi-1) - \sigma\upsilon\nu(1)\right) + \frac{1}{2}\left(e^{3-\pi} - e^{3}\right)$

Ρητά ολοκληρώματα

1. $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{x^2-2x+1}{x}\,dx =$

$= \int_1^2 \frac{x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 x - 2 + \frac{1}{x}\,dx$

$= \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$= \left(\frac{x^2}{2}\right)_1^2 - (2x)_1^2 + (\ln|x|)_1^2$

$= \frac{1}{2}(x^2)_1^2 - 2(x)_1^2 + \ln 2 - \ln 1$

$= \frac{1}{2}(4-1) - 2\cdot 1 + \ln 2 =$

$= \frac{3}{2} - 2 + \ln 2.$

2. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx = \left(\ln|x^2+3x+4|\right)_0^1$

Παρατηρω οτι ο αριθμητης ειναι η παραγωγος του παρονομαστη.

$= \ln 8 - \ln 4 = \ln\frac{8}{4} = \ln 2$

3. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+2x|\right)_1^2 =$

$= \frac{1}{2}\left(\ln 8 - \ln 3\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.$

4. $$\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx \;\underline{\underline{\circledast}}$$

Παρατηρω οτι ο παρονομαστης παραγοντοποιειται και ο αριθμητης εχει μικροτερο βαθμο απο τον παρονομαστη.

Μεθοδος των A, B.

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \boxed{\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.}$$

$$x+3 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x+3 = Ax + A + Bx - B$$

$$x+3 = (A+B)x + A - B.$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=3 \end{cases} \;\oplus\; 2A=4 \Rightarrow \underline{\underline{A=2}}$$

$$\hookrightarrow 2-B=3 \quad \underline{\underline{B=-1}}$$

$$\underline{\underline{\circledast}} \int_2^3 \frac{2}{x-1}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx = 2\left(\ln|x-1|\right)_2^3 - \left(\ln|x+1|\right)_2^3$$

$$= 2(\ln 2 - \ln 1) - (\ln 4 - \ln 3) = 2\ln 2 - \ln\frac{4}{3}.$$

5. $$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)x - x}{x^2+1}\,dx \overset{*}{=}$$

Ο Βαθμος του αριθμητη ειναι μεγαλυτερος ή ισος του Βαθμου του παρονομαστη.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline -(x^3+x) & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$$\boxed{x^3 = (x^2+1)\cdot x - x}$$

$Δ = δ \cdot π + υ$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^1 \frac{\cancel{(x^2+1)}x}{\cancel{x^2+1}} - \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

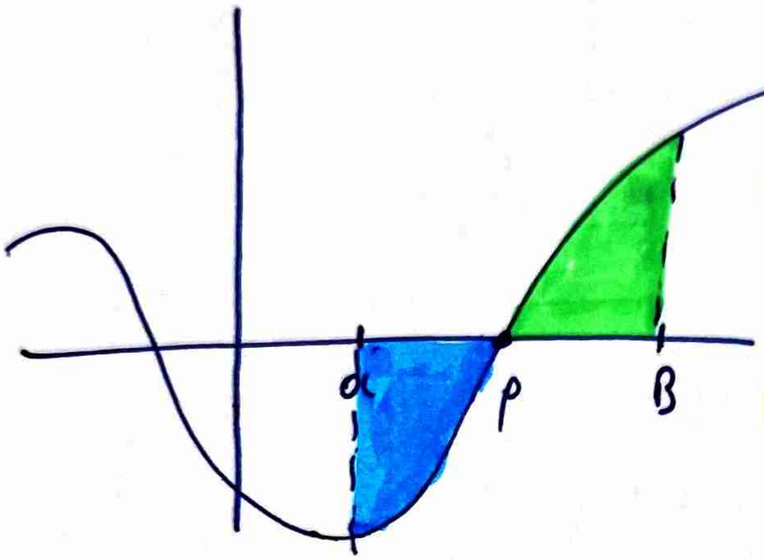
$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\right)_0^1 - \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+1|\right)_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Εμβαδον Επιπεδου χωριου

1.



Γενικος Τυπος

$E: C_f, x'x, x=\alpha, x=\beta$

$E=\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$

$E: C_f, x'x, x=\rho, x=\beta$

$$E=\int_\rho^\beta |\overset{+}{f(x)}|\,dx = \int_\rho^\beta f(x)\,dx$$

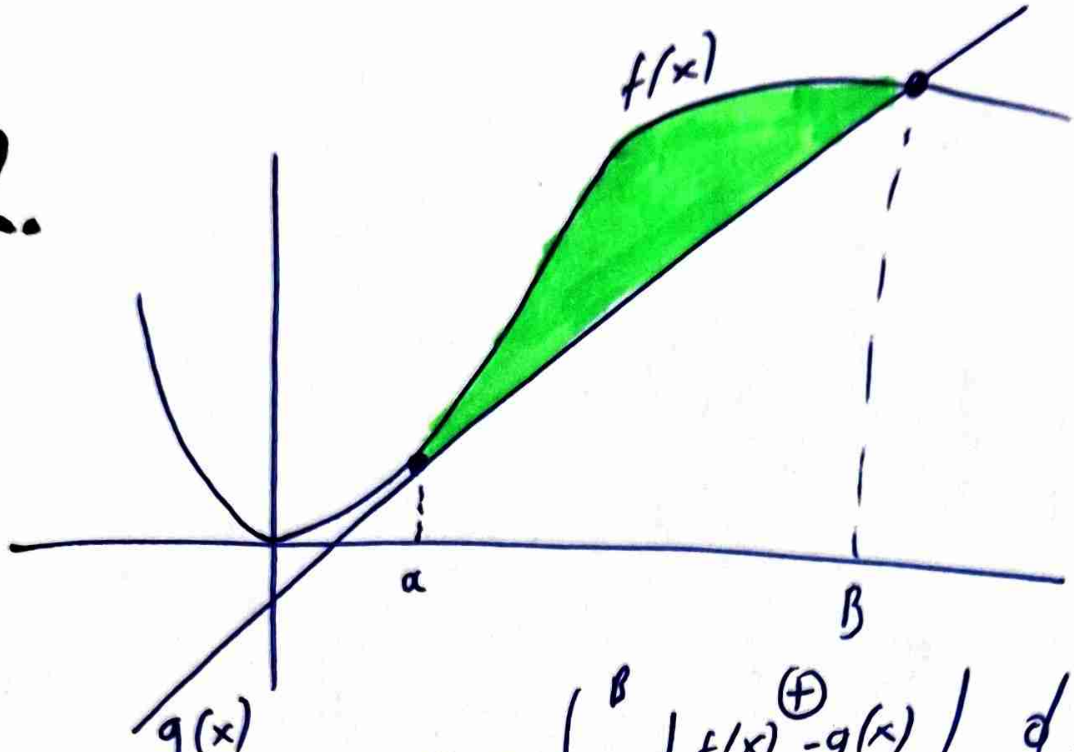
$E: C_f, x'x, x=\alpha, x=\rho$

$$E=\int_\alpha^\rho |\overset{-}{f(x)}|\,dx = \int_\alpha^\rho -f(x)\,dx$$

$E: C_f, x'x, x=\alpha, x=\beta$

$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = \int_\alpha^\rho -f(x)\,dx + \int_\rho^\beta f(x)\,dx$$

2.



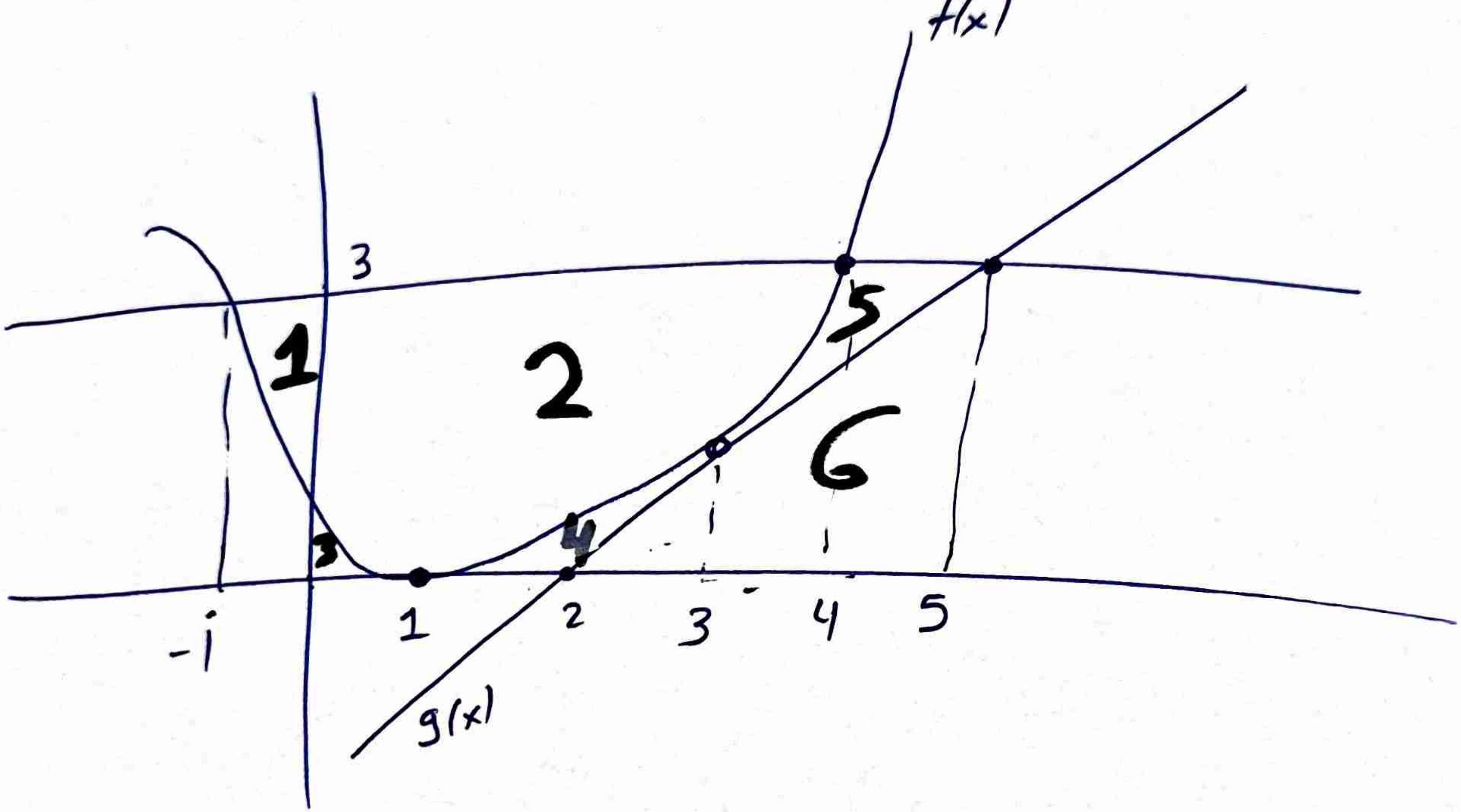
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} | f(x) \overset{+}{-} g(x) | \, dx$$

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) \, dx$$

Γενικός κανόνας

$E: C_f, C_g, x = \alpha, x = \beta$

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} | f(x) - g(x) | \, dx$$



f(x)
g(x)
3
1
2
3
4
5
6
-1
1
2
3
4
5

1: $\in = \int_{-1}^{0} 3 - f(x)\, dx$

2: $\in = \int_{0}^{4} 3 - f(x)\, dx$

3: $\in = \int_{0}^{1} f(x)\, dx$

4: $\in = \int_{1}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{3} f(x) - g(x)\, dx$

5: $\in = \int_{3}^{4} f(x) - g(x)\, dx + \int_{4}^{5} 3 - g(x)\, dx$

6: $\in = \int_{2}^{5} g(x)\, dx$

kavoval

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

Θεμελιωδες Θεωρημα ολοκληρωτικου λογισμου

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^\beta = G(\beta) - G(a)$$

Αποδειξη

Συναρτηση ολοκληρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
ειναι παραγουσα της $f(x)$

Εστω $G(x)$ μια αλλη παραγουσα της f

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ G'(x) &= f(x) \end{aligned}\right\} \; F'(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + c$$

Αρα $F(x) = G(x) + c$

$\underline{x = a}$

$$F(a) = G(a) + c$$

$$\int_a^a f(t)\,dt = G(a) + c$$

$$0 = G(a) + c$$

$$\underline{\underline{c = -G(a)}}$$

$\longrightarrow F(x) = G(x) - G(a)$

$\underline{x = \beta}$

$$F(\beta) = G(\beta) - G(a)$$

$$\int_a^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(a)$$

Σχολιο

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\beta f(t)\,dt = \int_a^\beta f(\omega)\,d\omega$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Επομενο Μαθημα

34	35	32
6	20	1
7	21	3 αγ
8	22	
9	23	
10		
11		