34.

Ενότητα 12

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής

$f(0)=0 \qquad f(1)=1$

f γν. μονότονη

Ν.δ.ο $\exists!\, x_0\in(0,1)$ τ.ω $f(x_0)=1-x_0^3$

$$f(x)=1-x^3$$

$$\underbrace{f(x)-1+x^3}_{g(x)}=0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως π.δ.σ

$g(0)=f(0)-1=-1<0$

$g(1)=f(1)=1>0$

Bolzano $\exists x_0\in(0,1)$ τ.ω $g(x_0)=0$

$f(x_0)=1-x_0^3$

- $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ (1)
- $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3-1<x_2^3-1$

$g\nearrow$ το x_0 μοναδικό.

Αφού f γν. μονότονη

η $f \nearrow$ ή $f \searrow$

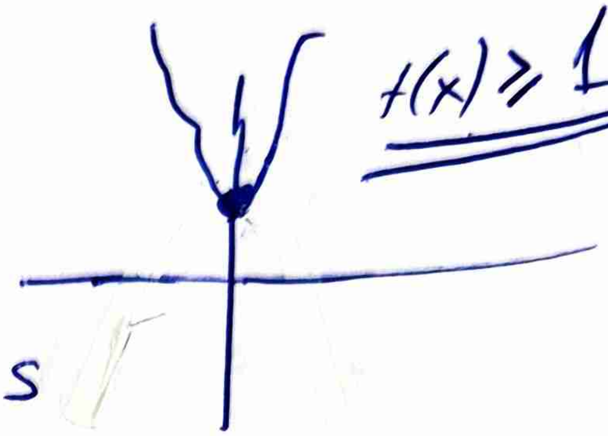
$$0 < 1$$

$$\overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0}{\underset{\|}{f(0)}} < \underset{1}{\underset{\|}{f(1)}}$$

38. Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχη

Εχω ελαχιστο το 1 στο 0



$\underline{\underline{f(x) \geq 1}}$

(β1) $\dfrac{f(\alpha)-1}{x-1} + \dfrac{f(\beta)-1}{x-2} = 5$

$(1,2)$

$(x-2)(f(\alpha)-1) + (x-1)(f(\beta)-1) = 5(x-1)(x-2)$

$\underbrace{(x-2)(f(\alpha)-1) + (x-1)(f(\beta)-1) - 5(x-1)(x-2)}_{g(x)} = 0$

$g(1) = -(f(\alpha)-1) = 1-f(\alpha) < 0$

$g(2) = f(\beta)-1 > 0$

$f(\alpha) > 1 \Rightarrow 1-f(\alpha) < 0$

$f(\beta) > 1 \Rightarrow f(\beta)-1 > 0$

Bolzano $\exists\, x_0 \in (1,2)$ τ.ω $g(x_0) = 0$.

(B) $g(x)=e^x+x-2$ νδο η εξίσωση

$f(g(x))=1$ έχει ακριβώς

μία ρίζα στο $(0,1)$.

Αναγκαστικά $g(x)=0$

αν $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>1$

αν $x<0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>1$

$\boxed{\text{Το "=" για } x=0 \text{ μόνον } f(0)=1}$

$g(x)=0.$

$e^x+x-2=0$

$g(0)=-1$

$g(1)=e-1$

$\Big\}$ Bolzano $\exists!\, \xi \in (0,1)$

$g \nearrow$ Τ.Ι. $g(\xi)=0$

39. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $\downarrow$

Ν.δ.ο $\exists!\, x_0 \in (a, 3a)$ $\quad a > 0$

Τ.ω $f(a) + f(3a) = 2f(x_0)$

$$\boxed{g(x) = f(a) + f(3a) - 2f(x)}$$

$$g(a) = f(a) + f(3a) - 2f(a) = f(3a) - f(a)$$

$$g(2a) = f(a) + f(3a) - 2f(3a) = f(a) - f(3a)$$

$$g(a)\,g(2a) = -\left(f(a) - f(3a)\right)^2 < 0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (a, 3a)$ Τ.ω $g(x_0) = 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -2f(x_1) < -2f(x_2)$

$$f(a) + f(3a) - 2f(x_1) < f(a) + f(3a) - 2f(x_2)$$

$$g(x_1) < g(x_2).$$

40. $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1) - 1$

νδο η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} - \frac{f(\beta)}{x-2} = 1$

$\alpha \in (-1,0)$ έχει $(1,2)$

$\beta > 0$

$$\underbrace{(x-2)f(\alpha) - (x-1)f(\beta) - (x-1)(x-2)}_{g(x)} = 0$$

$g(1) = -f(\alpha)$

$g(2) = -f(\beta)$

$g(1)g(2) = f(\alpha)f(\beta) \leq 0$

Bolzano $\exists x_0 \in (1,2)$

τ.ω. $g(x_0) = 0$,

$$\alpha < 0 < \beta$$

$$f \downarrow$$

$$f(\alpha) > f(0) > f(\beta)$$

$$f(\alpha) > 0 > f(\beta)$$

$f(\alpha), f(\beta)$ ετερόσημοι

6. $f: [-1,3] \to \mathbb{R}$ **Ενότητα 14**

συνεχής και $f \downarrow$

Νδο $\exists!\ x_0 \in (-1,3)$ τ.ω

$$6f(x_0) = 2f(-1) + f(0) + 3f(3)$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[-1,3]$

ΘΜΕΤ $\quad m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [-1,3]$

$$\left.\begin{array}{ll} m \le f(-1) \le M & \Rightarrow 2m \le 2f(-1) \le 2M \\ m \le f(0) \le M & \\ m \le f(3) \le M & \Rightarrow 3m \le 3f(3) \le 3M \end{array}\right\} \oplus$$

$$6m \le 2f(-1) + f(0) + 3f(3) \le 6M$$

$$m \le \frac{2f(-1) + f(0) + 3f(3)}{6} \le M$$

Ο αριθμός

$$\frac{2f(-1)+f(0)+3f(3)}{6} \in \Sigma T_f$$

άρα $\exists!\, x_0 \in [-1,3]$

τω

$$f(x_0) = \frac{2f(-1)+f(0)+3f(3)}{6}$$

$$6f(x_0) = 2f(-1)+f(0)+3f(3)$$

Ασκηση SOS

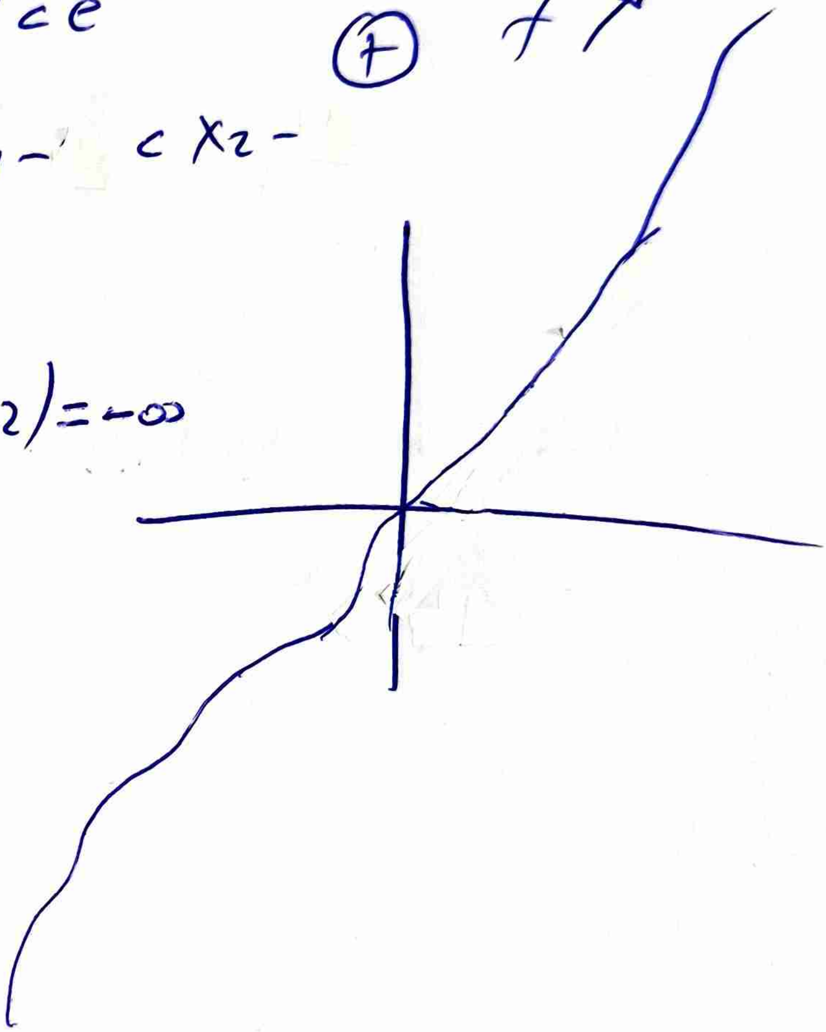
Εστω $f(x) = e^x + x - 1$.

$D_f = \mathbb{R}$.

1. Συνολο Τιμων

• $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (+) $f \nearrow$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - \quad < x_2 -$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + x - 2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. Νδο η εξίσωση $f(e^x+x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

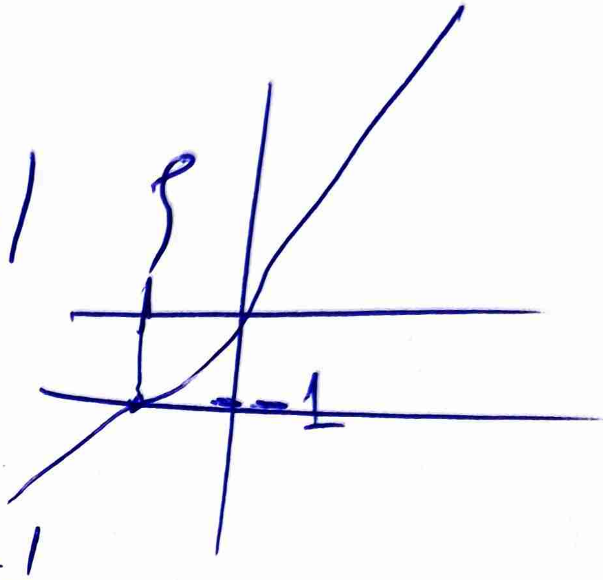
$f(e^x+x)=0$

$f(e^x+x)=f(0)$

f 1-1

$e^x+x=0$

$e^x+x-1=-1$



$\boxed{f(x)=-1}$

Άρα νδο η $f(x)$ τέμνει την $y=-1$ ακριβώς μία φορά

- f συνεχής.
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$

Το $-1 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists!\ \xi$ τ.ω $f(\xi)=-1$.

Θεωρημα Ενδιαμεσων Τιμων

Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$

το $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τοτε $\forall$ αριθμο η μεταξυ

των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$

τ.ω $f(x_0) = \eta$

Αποδειξη

$$f(x_0) = \eta \Rightarrow f(x) = \eta \Rightarrow \underbrace{f(x) - \eta}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$ ως π.σ.δ.

$$\boxed{f(\alpha) < \eta < f(\beta)}$$

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$$

Αρα $g(\alpha) g(\beta) < 0$ Bolzano $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$

τ.ω $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \eta$.

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : 14/9/26.

Ώρα μαθήματος : 19:30

~~**Ασκήσεις**~~

Τεστ Θεωρια

Την 1η ωρα

1.1
1.3
1.6
1.7
1.10

1.11
1.12
1.13
1.14

1.15
1.18
1.21
1.22
1.23

1.24
1.26
3.4

παρατηρήσεις