

1 T_1 είναι γραμμική εξίσωση;

$$ax + by = \gamma \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}$$

π.χ

$$2x - 7y = 9.$$

$$x - y = 0$$

$$7y = 9$$

Προσοχή

$$\text{Εστω } 6x - 3y = 12$$

Το ζεύγος $(1, -2)$ είναι λύση!

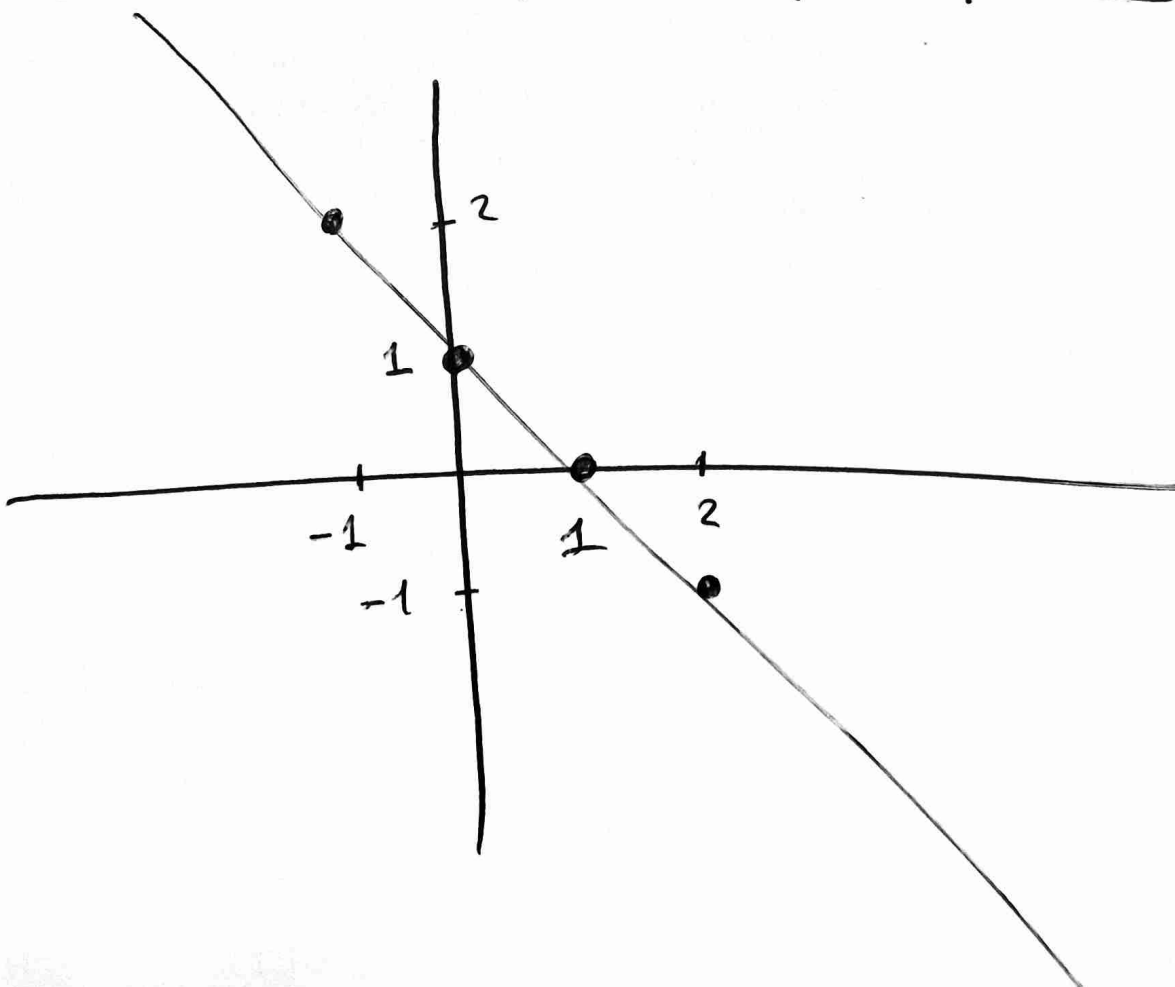
Το ζεύγος $(2, -1)$ δω είναι λύση!

κάθε γραμμική εξίσωση έχει
ακριβώς δύο και παριστάνει
ευθεία στο επίπεδο.

π.χ

$$x + y = 1$$

x	0	1	2	-1	-2	3	-3
y	1	0	-1	2	3	-2	4



Άσκηση 1

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Μεθόδus αντικατάστασης

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow -y = 3 - 2x$$

$$y = -3 + 2x$$

$$3x - 2 \cdot (-3 + 2x) = 4$$

$$3x + 6 - 4x = 4$$

$$-x + 6 = 4$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

$$y = -3 + 2 \cdot 2$$

$$y = -3 + 4$$

$$y = 1$$

Μεθόδος αναθέρμανσης συντελεστών.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \quad (+)$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

$$3 \cdot 2 - 2y = 4$$

$$6 - 2y = 4$$

$$-2y = 4 - 6$$

$$-2y = -2$$

$$y = 1$$

Μεθόδος ορίων

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -4 + 3 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 4 \cdot (-1) = -6 + 4 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$$

extra

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$$

Μεθόδus ανατάσσωνu

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 3y - 1}$$

$$3(3y - 1) + 5y = 11$$

$$9y - 3 + 5y = 11$$

$$14y = 11 + 3$$

$$\frac{14y}{14} = \frac{14}{14}$$

$$y = 1$$

$$x = 3 \cdot 1 - 1$$

$$x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

Методом алгебры свёртываем.

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 9y = 3 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases} \quad (+)$$

$$\frac{14y}{14} = \frac{14}{14}$$

$$y = 1$$

$$3x + 5 \cdot 1 = 11$$

$$3x + 5 = 11$$

$$3x = 11 - 5$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

Μεθόδus ορίzουσu

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3(-3) = 5 + 9 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 - 11(-3) = -5 + 33 = 28$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - 3 \cdot (-1) = 11 + 3 = 14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{14} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{14}{14} = 1$$

Ασκηση 2

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases} \quad (+)$$

$$0 = 0$$

Το σύστημα Αόριστο !
έχει άπειρα λύσεις!

Ασκηση 3

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -4x + 2y = -5 \end{cases} \quad (+)$$

$$0 = 1$$

Αδυνατώ!

Οριζουσες

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \delta x + \varepsilon y = \zeta \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{vmatrix} = \alpha \cdot \varepsilon - \delta \cdot \beta$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \zeta & \varepsilon \end{vmatrix} = \gamma \varepsilon - \beta \zeta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \zeta \end{vmatrix} = \alpha \zeta - \gamma \delta$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

Αν $D \neq 0$ τότε το

συστήμα έχει μοναδική λύση

$$\text{Τότε } x = \frac{P_x}{D} \quad y = \frac{P_y}{D}$$

Αν $D = 0, P_y = 0, P_x = 0$

τότε το σύστημα είναι άρριστο

Αν $D = 0$ και $(P_x \neq 0 \text{ ή } P_y \neq 0)$

το σύστημα είναι αδύνατο.

Συμπερασματα

Αν ένα σύστημα δύο γραμμικών
εξισώσεων οι οποίες παριστάνουν
ευθείες

→ έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0)
τότε οι ευθείες τέμνονται στο
σημείο $A(x_0, y_0)$

→ είναι αδύνατο τότε οι ευθείες
είναι παράλληλες.

→ είναι αδύνατο τότε οι ευθείες
είναι τανυστικές.

Askrisi 4

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+5) - \frac{1}{4}(6-y) = 2 \\ \frac{x+1}{4} - \frac{5y-2}{6} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{1}{2}(x+5) - 4 \cdot \frac{1}{4}(6-y) = 2 \cdot 4 \\ 12 \cdot \frac{x+1}{4} - 12 \cdot \frac{5y-2}{6} = 3 \cdot 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+5) - (6-y) = 8 \\ 3(x+1) - 2(5y-2) = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 10 - 6 + y = 8 \\ 3x + 3 - 10y + 4 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 10y + 7 = 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 10y = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 10y = 29 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 4 - 2x}$$



$$3x - 10 \cdot (4 - 2x) = 29$$

$$3x - 40 + 20x = 29$$

$$23x = 29 + 40$$

$$\frac{23x}{23} = \frac{69}{23}$$

$$\boxed{x = 3}$$



$$y = 4 - 2 \cdot 3$$

$$y = 4 - 6$$

$$\boxed{y = -2}$$

A' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

i) αλγεβρικά ii) γραφικά.

2. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x+y=45 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \\ 4x+3y=8 \end{cases}$

3. Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases}$

4. Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} x-3y=3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2y = x+2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών :

i) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2y=3x-8 \\ x+3y+1=0 \end{cases}$

6. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε.

i) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 6x+7y=100 \\ 3x+y=11 \\ -9x-3y=2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x-3y=40 \\ 4x-6y=80 \end{cases}$ iii)

7. Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{3}+1)y=-1-\sqrt{3} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x+4y=7 \\ \frac{1}{2}x+(\sqrt{3}-1)y=1 \end{cases}$

8. Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} 3x-2y-\omega=11 \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ 5x+y-2\omega=33 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 5x-y+3\omega=4 \\ x-3y+\omega=2 \\ 3x-2y+2\omega=2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+\frac{y}{2}-2\omega=3 \\ \frac{3x}{2}+y+\omega=5 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases}$

Τία αυπίο

Σχολικο
Βιβλίο

(2) (3)

(4) (5)