ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

μαθητών
ΕΡΕΙΣΜΑ
φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat (2 μονάδες)

και στη συνέχεια να το αποδείξετε (5 μονάδες).

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f.

(4 μονάδες)

Α3. Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται κοίλη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(4 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος:

a) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου του 3 δεν έχουν ασύμπτωτες. Σ

b) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda,\ \lambda\in R^*$, τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Σ

c) Αν $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f. Σ

d) Έστω f κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$. Λ

e) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 3] και ισχύει $f'(1)=f'(3)$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής με τετμημένη $x_0\in(1,\ 3)$. Σ

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x+1}$, $x \in R$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το R και η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο $x_0 = 0$.

(6 μονάδες)

Β2. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία y=x και στο $+\infty$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία y=x-2.

Επίσης να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται ανάμεσα στις δύο παραπάνω ασύμπτωτες. Δηλαδή $x - 2 < f(x) < x$, $x \in R$.

(6 μονάδες)

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0, $x \in R$, έχει ακριβώς μία λύση x_1, με $x_1 \in (1, 2)$.

(6 μονάδες)

Β4. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη για κάθε $x \in R$, και συνάρτηση g ορισμένη στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xf(x) - \eta\mu x}{e^{x^2}-1} = 1$
- $g(x) = x^2 + x - 2 - f(2) \cdot lnx,\ x > 0$
- $g(x) \geq 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x > 0$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ *και* $f(2) = 3$.

(4 μονάδες)

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(3 μονάδες)

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $g(x) + |x^2 - 1| = 0$

(4 μονάδες)

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

(3 μονάδες)

Γ5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και να χαράξετε τη C_g.

(4 μονάδες)

Γ6. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = lna,\ a > 0$.

(4 μονάδες)

Γ7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) - 2x = (1 - x) \cdot f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 2).

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, x < 0 & (-\infty, 0) \\ 1, x = 0 & \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, x > 0 & (0, +\infty) \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής (3 μονάδες) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης. (2 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

i. $e^x < f(x) < 1, \text{για κάθε } x < 0.$

ii. $f(x) > \frac{1}{x+1}, \text{για κάθε } x > 0.$

(6 μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι το $x_0=0$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f και ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$.

(6 μονάδες)

Δ4.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(-\infty,\ 0]$. (4 μονάδες)

ii. Αν η F είναι μία παράγουσα της f στο $(-\infty,\ 0]$, να λύσετε την ανίσωση $F(2x^3) - F(2x) < F(x^3) - F(x) + x^3 - x,\quad x < 0.$ (4 μονάδες)

A1. Ορισμος και αποδειξη

A2. Ορισμος.

A3. Ορισμος

A4. α Σ β Λ γ Λ δ Λ ε Λ

Επισημανση

Αφου $f'(1)=f'(3)$ Rolle $\exists\, \xi \in (1,3)$

τ.ω $f''(\xi)=0$.

x		ξ	
f''	;	0	;
f			

B1. $f(x) = x - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 - \frac{(2e^x)'(e^x+1) - 2e^x \cdot (e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x(e^x+1) - 2e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\cancel{2e^x e^x} + 2e^x - \cancel{2e^x e^x}}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2\cancel{e^x} + 1 - 2\cancel{e^x}}{(e^x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0} \qquad f \nearrow$$

ΣT_f

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(x - \frac{2e^x}{e^x+1}\right) = -\infty - \frac{0}{0+1}$$

$$= -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(x - \frac{2e^x}{e^x+1}\right) = +\infty - 2 = +\infty$$

$$\to \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 2$$

$$\Sigma T_f = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{(2e^x)'(e^x+1)^2 - 2e^x \cdot \left[(e^x+1)^2\right]'}{(e^x+1)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{2e^x(e^x+1)^2 - 2e^x 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{2e^x(e^x+1) - 4e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{2e^x e^x + 2e^x - 4e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{2e^{2x} + 2e^x - 4e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{2e^x - 2e^{2x}}{(e^x+1)^3} = -\frac{\overset{+}{2e^x}(1-e^x)}{\underset{+}{(e^x+1)^3}}$$

x		0	
f''	$+$		$-$
f	$\cup$		$\cap$

B2. Όταν θέλω νδο η $y=x$ είναι ασύμπτωτη στο $-\infty$ έχω δύο τρόπους

1ος

Να την βρω!

2ος

Νδο $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \cancel{x} - \frac{2e^x}{e^x+1} - \cancel{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{2e^x}{e^x+1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x} - \frac{2e^x}{e^x+1} - \cancel{x}+2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{2e^x}{e^x+1} + 2 = 0 \quad \checkmark$$

Νδο $x-2 < f(x) < x$

$$\cancel{x}-2 < \cancel{x} - \frac{2e^x}{e^x+1} < \cancel{x}$$

$$-2 < -\frac{2e^x}{e^x+1} < 0$$

$$-2 < -\frac{2e^x}{e^x+1} \quad \text{και} \quad -\frac{2e^x}{e^x+1} < 0$$

$$2 > \frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$2(e^x+1) > 2e^x$$

$$\cancel{2e^x} + 2 > \cancel{2e^x}$$

$$2 > 0$$

B3. $f(1) = 1 - \dfrac{2e}{e+1} = \dfrac{e+1-2e}{e+1} = \dfrac{1-e}{e+1} < 0$

$$f(2) = 2 - \frac{2e^2}{e^2+1} = \frac{2(e^2+1)-2e^2}{e^2+1} =$$

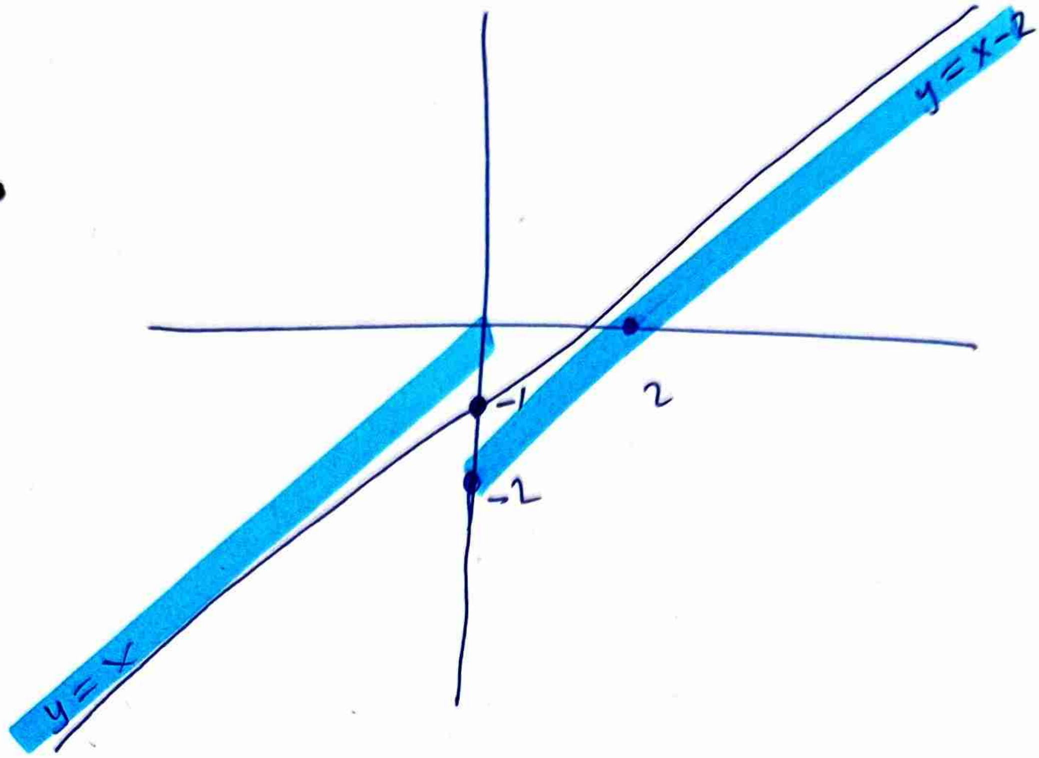
$$= \frac{\cancel{2e^2}+2-\cancel{2e^2}}{e^2+1} = \frac{2}{e^2+1} > 0.$$

$f(1)f(2) < 0$ Bolzano $\exists x_1 \in (1,2)$

τ.ω $f(x_1) = 0$ και αφού $f \nearrow$

Το x_1 μοναδικό

Β4.



Γ1. $\lim_{x\to 0} \frac{x f(x) - \eta\mu x}{e^{x^2}-1} = 1$ νδο $f(0)=1$

$g(x) = \frac{x f(x) - \eta\mu x}{e^{x^2}-1}$ $\lim_{x\to 0} g(x) = 1.$

$g(x)\left(e^{x^2}-1\right) = x f(x) - \eta\mu x$

$g(x)\left(e^{x^2}-1\right) + \eta\mu x = x f(x)$

$f(x) = \frac{g(x)\left(e^{x^2}-1\right) + \eta\mu x}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)\left(e^{x^2}-1\right) + \eta\mu x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)\,(e^{x^2}-1)}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1\cdot 0+1$$

$$= \underline{1}$$

$$\to \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x e^{x^2}}{1} = 0$$

Αφού f συνεχής $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

$f(0) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{c} g(x) = x^2+x-2-f(2)\ln x \geq 0 \\ \text{νδο } f(2)=3. \end{array}}$$

$g(x) \geq 0$

$g(x) \geq g(1)$

Ακρότατο στο 1

Fermat $g'(1) = 0$

$$g'(x) = 2x+1 - f(2)\,\frac{1}{x}$$

$$g'(1) = 3 - f(2) = 0 \qquad f(2)=3$$

Γ2. $g(x) = x^2 + x - 2 - 3\ln x \quad , x > 0$

$$g'(x) = 2x + 1 - 3\frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x}$$

x	0	1	
g'	$-$	0	$+$
g	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

$g(x) \geq g(1)$

$g(x) \geq 0$

$\rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x = \frac{-1 \pm 5}{4}$ $\left\langle \begin{matrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix} \right.$

Γ3. $g(x) + |x^2 - 1| = 0$

$\oplus \quad \oplus$

$g(x) = 0$ και $x^2 - 1 = 0$

$x = 1$ ✓ $\qquad x = 1$ ✓ $\qquad x = -1$

γιατί ω $(1, 0)$

ολικό ελάχιστο

$$x = 1$$

Γ4. $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + x - 2 - 3\ln x) = -2 + \infty = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + x - 2 - 3\ln x) =$ $[\ T_f = [0, +\infty)$

$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - 3\frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty.$

$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

Γ5. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ Επομένως $x=0$ κατακόρυφη

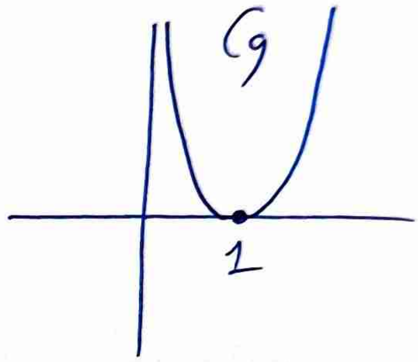
$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ δεν έχει οριζόντια.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-2-3\ln x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1-3\frac{1}{x}}{1} = +\infty$$ δεν έχει πλάγια

Γ6. $g(x) = \ln a = \lambda$

$g(x) = \lambda$



1. Αν $\lambda < 0$ καμία ρίζα
$\ln a < 0$
$a < 1$

$$g''(x) = \frac{(4x+1)x-(2x^2+x-3)}{x^2}$$

$$g''(x) = \frac{4x^2+x-2x^2-x+3}{x^2}$$

2. Αν $\lambda = 0$ 1 ρίζα
$\ln a = 0$
$a = 1$

$$g''(x) = \frac{2x^2+3}{x^2} > 0$$

3. Αν $\lambda > 0$ 2 ρίζες
$\ln a > 0$
$a > 1$.

g κυρτή

17.

$$f(x) - 2x = (1-x) f'(x)$$

$$f(x) - 2x - (1-x) f'(x) = 0 \qquad (0,2)$$

$$\underbrace{f(x) + (x-1) f'(x)} - 2x = 0$$

$$\Big(\underbrace{f(x)(x-1) - x^2}_{h(x)} \Big)' = 0$$

$$h(0) = -f(0) = -1$$

$$h(2) = f(2) - 4 = 3 - 4 = -1$$

$h(0) = h(2)$ Rolle $\exists \xi \in (0,2)$

T.w $h'(\xi) = 0$

$$f(\xi) + (\xi - 1) f'(\xi) - 2\xi = 0.$$

Δ1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

Άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ και $f(0) = 1$

Άρα συνεχής στο 0.

Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ως π.σ.σ άρα συνεχής.

$D_f = \mathbb{R}$ και συνεχής

δεν έχει κατακόρυφη.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x} = 0$$

$\varepsilon_1 : y=0$
$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$\varepsilon_2 : y=0$
$+\infty$

Δ2. i) νδο $e^x < f(x) < 1 \quad \forall x<0$

$$e^x < \frac{e^x-1}{x} < 1 \quad \forall x<0$$

$$e^x < \frac{e^x-1}{x} \quad \text{και} \quad \frac{e^x-1}{x} < 1$$

$$xe^x > e^x-1 \qquad\qquad e^x-1 > x$$

$$\underbrace{xe^x - e^x + 1}_{\varphi(x)} > 0 \qquad\qquad e^x > x+1$$

$$\varphi'(x) = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x}$$

$$\varphi'(x) = xe^x < 0 \quad \forall x<0$$

φ ↘

$$x<0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) > 0$$

11). Νδο $f(x) > \frac{1}{x+1}$ $\forall x > 0$

$$\frac{\ln(x+1)}{\cancel{x}} > \frac{1}{x+1}$$

$$(x+1)\ln(x+1) > x$$

$$\underbrace{(x+1)\ln(x+1) - x}_{\varphi(x)} > 0$$

$$\varphi'(x) = \ln(x+1) + \cancel{(x+1)}\frac{1}{\cancel{x+1}} - 1$$

$$\varphi'(x) = \ln(x+1) > 0$$

$\varphi \nearrow$

Αν $x > 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$

$\varphi(x) > 0$ ✓

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{e^x-1}{x} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{1}-x-\cancel{1}}{2x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\cancel{x}}{2\cancel{x}(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$

Η f όχι παρ/μη

στο 0 αφού το 0 κρίσιμο σημείο.

$\underline{x < 0}$

$f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

$f_1'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}$

$f_1'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$ (+)

$f \nearrow$

$\underline{x > 0}$

$f_2(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

$f_2'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}x - \ln(x+1)}{x^2}$ (−)

$f \searrow$

Δεν έχει Κρίσιμα σημεία
αλλά.

x		0	
f_1'	+		////
f_2'	////		−
f'	+		−
f	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x) \leq f(0)$

$f(x) \leq 1$.

Δ4. i) $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$, $x < 0$

$$f''(x) = \frac{(xe^x - e^x + 1)'x^2 - (xe^x - e^x + 1)2x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{(\cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x})x - 2(xe^x - e^x + 1)}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}$$

$$\varphi'(x) = \cancel{2xe^x} + x^2e^x - \cancel{2e^x} - \cancel{2xe^x} + \cancel{2e^x}$$

$$\varphi'(x) = x^2e^x > 0$$

x	$-\infty$ 0
φ'	$+$
φ	$\nearrow$ $-$
x^3	$-$
f''	$+$
f	$\cup$

$x < 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0$

11). $F(2x^3) - F(2x) < F(x^3) - F(x) + x^3 - x$

$F(2x^3) - F(x^3) - x^3 < F(2x) - F(x) - x$

$$\boxed{g(x) = F(2x) - F(x) - x}$$

$g(x^3) < g(x)$

$g'(x) = 2f(2x) - f(x) - 1$

$g'(x) = f(2x) + f(2x) - f(x) - 1$

$g'(x) = \underbrace{f(2x) - 1}_{\ominus} + \underbrace{f(2x) - f(x)}_{\ominus} < 0$

- $x > 2x \Rightarrow f(x) > f(2x) \Rightarrow f(2x) - f(x) < 0$
- $f(x) < 1 \Rightarrow f(2x) < 1 \Rightarrow f(2x) - 1 < 0$

$\forall x < 0.$

$g \downarrow$

$x^3 > x$

$x^2 > 1$

$x^2 - 1 > 0$

x		-1		1	
x^2-1	$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$