

Βασικές αρχές πολυωνύμων

1. Μονώνυμο του x καλούμε κάθε παρασέλιση της μορφής ax^v , $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$
2. Πολυώνυμο του x καλούμε κάθε παρασέλιση της μορφής $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου $a_i \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$.
3. Τα $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται όροι του πολυωνύμου ενώ οι αριθμοί $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ λέγονται συντελεστές του πολυωνύμου ενώ ο a_0 λέγεται και σταθερός όρος του πολυωνύμου.
4. Ο αριθμός n λέγεται βαθμός του πολυωνύμου, τα σταθερά πολυώνυμα έχουν βαθμό μηδέν ενώ το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

5. Δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν έχουν ίδιο βαθμό και ίδιους συντελεστές.
6. Ο αριθμός p είναι ρίζα ενός πολυωνύμου αν το μηδενίζει δηλαδή αν $P(p) = 0$.
7. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)$ είναι το $P(0)$ ενώ το γινόμενο των συντελεστών του πολυωνύμου είναι $P(1)$.

Ταυτότητα εκτελεστικής διαίρεσης

1. $\Delta(x) = \delta(x) \pi(x) + \upsilon(x)$

ο βαθμός του υπολοίπου πρέπει να είναι μικρότερος του διαιρέτη.

2. Αν το $\upsilon(x) = 0$ δηλαδή $\Delta(x) = \delta(x) \pi(x)$

τότε η διαίρεση λήγει τέλεια. Τότε λήφει:

→ Το $\Delta(x)$ διαιρείται από το $\delta(x)$

→ Το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$

→ Το $\delta(x)$ είναι διαιρετής ή παράγοντας του $\Delta(x)$

Άσκηση 1

$$P(x) = 2x(2x-1)^2 - (3x-1)(1+3x)$$

Ανάπτυξη οποιωνδήποτε

$$P(x) = 2x(4x^2 - 4x + 1) - ((3x)^2 - 1^2)$$

$$P(x) = 8x^3 - 8x^2 + 2x - (9x^2 - 1)$$

$$P(x) = 8x^3 - 8x^2 + 2x - 9x^2 + 1$$

$$P(x) = 8x^3 - 17x^2 + 2x + 1$$

→ Σου βαθμω

→ Οροι : $8x^3$, $-17x^2$, $2x$, 1

→ Συντελεστές : 8 , -17 , 2 , 1

→ Σταθερός όρος : 1 .

Διαίρεση πολυωνύμων

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^2 + x - 1 \\ - (x^4 - x^3) \\ \hline x^3 + 2x^2 + x - 1 \\ - (x^3 - x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x - 1 \\ - (3x^2 - 3x) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 1 \\ - (4x - 4) \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ \hline x^3 + x^2 + 3x + 4 \end{array}$$

$$\Delta(x) = x^4 + 2x^2 + x - 1$$

$$\delta(x) = x - 1$$

$$\eta(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$$

$$\upsilon(x) = 3$$

$$\Delta(x) = \delta(x) \eta(x) + \upsilon(x)$$

$$x^4 + 2x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + 3x + 4) + 3$$

1ο Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$
είναι $U = P(\rho)$

Απόδειξη

$$P(x) = (x - \rho) \pi(x) + u(x)$$

$$P(x) = (x - \rho) \pi(x) + u$$

$$\underline{x = \rho}$$

$$P(\rho) = (\rho - \rho) \pi(\rho) + u$$

$$\underline{\underline{P(\rho) = u}}$$

2ο Θεώρημα

Το $x - \rho$ είναι παραγοντικό του $P(x)$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$

Απόδειξη

" $\Rightarrow$ " Από το $x - \rho$ είναι παραγοντικό του $P(x)$ σημαίνει ότι $P(x) = (x - \rho) \eta(x)$

$$\underline{x = \rho}$$

$$P(\rho) = (\rho - \rho) \eta(\rho)$$

$$\underline{\underline{P(\rho) = 0}}$$

" $\Leftarrow$ " Από $P(\rho) = 0$ τότε

$$P(x) = (x - \rho) \eta(x) + \upsilon(x)$$

$$P(x) = (x - \rho) \eta(x) + \upsilon$$

$$P(x) = (x - \rho) \eta(x) + P(\rho)$$

$$P(x) = (x - \rho) \eta(x) \quad \text{Το } x - \rho \text{ παραγοντικό}$$

Η διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$

Στην ουσία μιλάμε για διαίρεση όπου
ο διαιρέτης είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού.

Εδώ γνωρίζουμε ότι :

1. $P(x) = (x - \rho) \eta(x) + \upsilon$ όπου $\upsilon = P(\rho)$.

2. Αν $P(x) = (x - \rho) \eta(x)$ δηλαδή το $x - \rho$
είναι παραγοντικό του $P(x)$ τότε $P(\rho) = 0$

Για την ακρίβεια όλα τα παρακάτω είναι
ισοδύναμα.

→ Το $x - \rho$ διαιρεί το $P(x)$

→ Η διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$ είναι τέλητη.

→ Το $x - \rho$ είναι παραγοντικό του $P(x)$

→ Το ρ είναι ρίζα του $P(x)$

→ Το $P(x)$ διαιρείται με το $x - \rho$

→ Το $x - \rho$ είναι διαίρεση του $P(x)$

} $P(\rho) = 0.$

Προσοχή

1. Εάν το $P(x)$ έχει παραγοντα το $(x-a)(x-b)$ αν και μόνο αν το $P(x)$ έχει παραγοντα το $x-a$ και το $x-b$.
2. Εάν πολωνυμο $P(x)$ με βαθμο V έχει το πολυ n ριτες. Εάν κάποια απο αυτες ριτες είναι ακεραιος αριθμος τοτε σιγουρα διαιρει τον σταθερο ορο του $P(x)$. Εάν ο σταθερος ορος δεν έχει ακεραious διαιρετη τοτε το $P(x)$ δεν έχει ακεραious ριτες.

Συμπέρασμα θεωρημάτων

στην πράξη

Όταν θεωρούμε το

$x-s$ είναι παράγοντας

του $P(x)$

$$\text{Τότε } P(s) = 0$$

Όταν θεωρούμε τη διαίρεση

του $P(x)$ με το $x-3$ οπότε

υπόλοιπο 8

$$\text{Τότε } P(3) = 8.$$