Ασκηση 4

1. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 8$

$f'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 0$

$\boxed{f'(x) = 9x^2 - 4x + 5}$

2. $f(x) = 4\ln x - 3συν x - 7ημ x$

$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot (-ημ x) - 7 \cdot συν x$

$\boxed{f'(x) = \frac{4}{x} + 3ημ x - 7συν x}$

3. $f(x) = x^2 \ln x - e^x ημ x$

$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} - (e^x ημ x + e^x συν x)$

$f'(x) = 2x \ln x + x - e^x ημ x - e^x συν x$.

4. $f(x) = \frac{4}{x^2} - (2x^2-4)\ln x$

$$f'(x) = \frac{0\cdot x^2 - 4\cdot 2x}{x^4} - \left(4x\ln x + (2x^2-4)\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{8x}{x^4} - 4x\ln x - \left(2x - \frac{4}{x}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{8}{x^3} - 4x\ln x - 2x + \frac{4}{x}}$$

5. $f(x) = e^{x^2} - x^2\ln(2x+1)$

$$f'(x) = e^{x^2}2x - \left(2x\ln(2x+1) + x^2\frac{1}{2x+1}\cdot 2\right)$$

$$\boxed{f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x\ln(2x+1 - \frac{2x^2}{2x+1}}$$

6. $f(x) = x^3 - 2x^2 ημx - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 3x^2 - (4x\, ημx - 2x^2 συνx) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 4x\, ημx + 2x^2 συνx + \frac{1}{x^2}}$$

7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x)'(x^2-1) - (x^2-4x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2-1) - (x^2-4x) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - 4x^2 + 4 - \cancel{2x^3} + 8x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4x^2 - 2x + 4}{(x^2-1)^2}}$$

8. $f(x) = \ln(e^x - 1) - e^{x^2-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x-1}\, e^x - e^{x^2-x}(2x-1)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - (2x-1)e^{x^2-x}}$$

9. $f(x) = (x+1)\sqrt{x} - x^2 \ln x$

$$f'(x) = \sqrt{x} + (x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(2x\ln x - x^2\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} - 2x\ln x + x}$$

10. $f(x) = \dfrac{e^x\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

$$f'(x) = \frac{(e^x\,\eta\mu x)'\,\sigma\upsilon\nu x - e^x\,\eta\mu x\,(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x\,\eta\mu x + e^x\,\sigma\upsilon\nu x)\,\sigma\upsilon\nu x - e^x\,\eta\mu x\,(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

11. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1} - \ln\sqrt{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x - 1}} (\ln x - 1)' - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left(\sqrt{x^2-1}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x-1}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} \cancel{2}x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} - \frac{x}{x^2-1}$$

Ενότητα 15

5. ⓐ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} x^3 = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$f(0) = 0$

Συνεχής στο 0!

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

Παραγωγίσιμη στο 0

$f'(0) = 0$

(γ) $f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x - 2, & x \leq 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\sigma\upsilon\nu x - 2) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

$f(0) = -1$

Συνεχής στο 0.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 2 - (-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$ Βασικό όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Η f παραγ/μη στο 0

$$f'(0) = 0$$

(δ) $f(x) = \begin{cases} x^3 \, ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^3 \, ημ\frac{1}{x}\right)$$

$$-1 \leq ημ\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$|x^3|\left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq 1 \cdot |x^3|$$

$$\left|x^3 \, ημ\frac{1}{x}\right| \leq |x^3|$$

$$\boxed{-|x^3| \leq x^3 \, ημ\frac{1}{x} \leq |x^3|}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} -|x^3| = 0 \\ &\lim_{x\to 0} |x^3| = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} x^3 \, ημ\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$f(0) = 0$

Η f συνεχής στο 0!

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\eta\mu\frac{1}{x}$$

$$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$$

$$\boxed{-x^2 \le x^2\eta\mu\frac{1}{x} \le x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \\ &\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} x^2\eta\mu\frac{1}{x} = 0.$$

$$f'(0) = 0$$

(ε) $f(x) = |x-3|$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0 \\ f(3) = 0\end{array}\right\} \text{ Συνεχής στο 3!}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{|x-3|-0}{x-3}$$

x		3	
$x-3$	$-$	0	$+$

$$\to \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = -1$$

$$\to \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

Το όριο δεν υπάρχει.

η f όχι παρ/μη στο 3.

13. $f(x)=\begin{cases}3x^2-\alpha^2x, & x<1\\ 5x+\alpha-4, & x\geq 1\end{cases}$

(α) Συνεχής στο 1.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} 3x^2-\alpha^2x = 3-\alpha^2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} 5x+\alpha-4 = 1+\alpha$

Αφού είναι συνεχής στο 1 $\quad 3-\alpha^2=1+\alpha$

$\alpha^2+\alpha-2=0$

$\alpha=-2 \qquad \alpha=1$

(β) Παρ/μη στο 1

Για $\alpha=1$ $\longrightarrow$ αποδεκτό!

$f(x)=\begin{cases}3x^2-x, & x<1\\ 5x-3, & x\geq 1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x^2-x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+2)}{\cancel{x-1}}=5$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{5x-3-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{5(x-1)}{x-1}=5$

Για $\alpha = -2$ $\longrightarrow$ απορ/τοι.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x, & x < 1 \\ 5x - 6, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(3x-1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

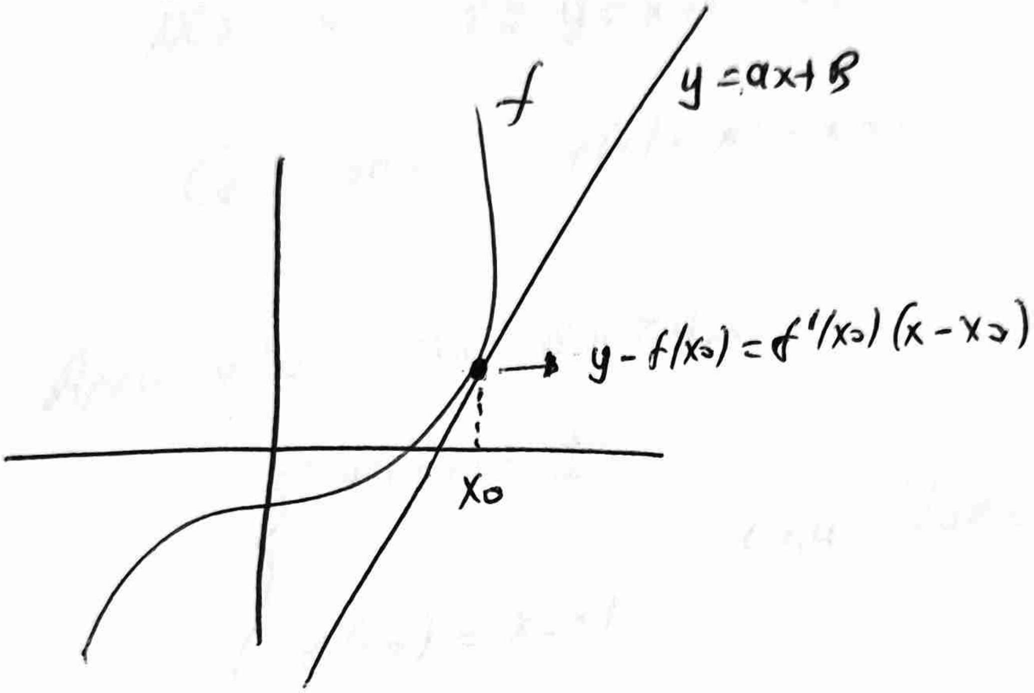
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{5x - 6 + 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{5\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 5$$

Το όριο δεν υπάρχει.

Στο προηγουμενο μαθημα 5/11 αναφεραμε σε 3 ασκησεις τα βασικα σεναριο που θα ζητηθει εφαρμογη.

Συνεχιζουμε σημερα 10/11. με τα υπολοιπα πιθανα σεναρια.

Συνθήκη για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ στη $f(x)$ στο σημείο $x = x_0$



$$\begin{cases} f'(x_0) = \alpha \\ \\ f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \end{cases}$$

Ασκηση 5

α Ενοτητα 17 ασκ. 19

Νδο η ε: $y=x+1$ εφαπτεται την

C_f οπου $f(x)=x^2-x+2$

Αρκει νδο το συστημα

$$\begin{cases} f'(x_0)=1 \\ f(x_0)=x_0+1 \end{cases}$$ εχει λυση.

$$\begin{cases} 2x_0-1=1 \Rightarrow 2x_0=2 \Rightarrow \underline{\underline{x_0=1}} \\ x_0^2-x_0+2=x_0+1 \end{cases}$$

$1^2-1+2=1+1$

$2=2$ ✓

Συμπερασμα

Η εφαπτομενη της C_f στο $x_0=1$

ειναι $y=x+1$

(B) Πανελλήνιες 2019 Δ1

Δίνεται $f(x) = (x-1)\ln(x^2-2x+2) + ax + \beta$

και η $\varepsilon : y = -x+2$ εφάπτεται της C_f

στο $A(1,1)$. Βρείτε a, β.

$$\begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = -1+2 \Rightarrow f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \ln(x^2-2x+2) + (x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + a$$

$$f'(1) = \ln 1 + 0 \cdot \frac{0}{1} + a$$

$\downarrow$

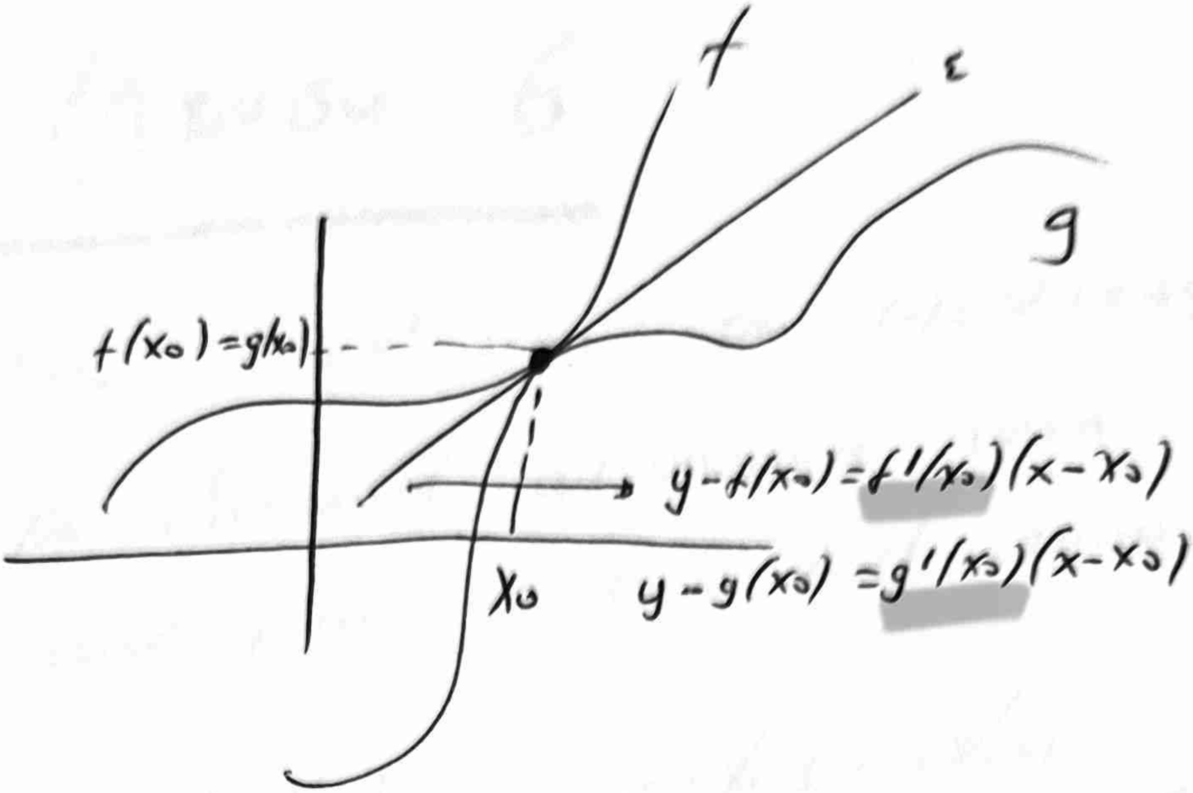
$$\boxed{-1 = a}$$

$$f(1) = a + \beta$$

$\downarrow$

$$1 = -1 + \beta$$

$$\underline{\beta = 2}$$



$$\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases}$$

Αν υπαρχει x_0 που

να επαληθευει το παραπανω

συστημα τοτε η

εφαπτομενη στο x_0

ειναι κοινη!

Ασκηση 6

(α) Εστω $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 + x + 4$

Να εξετασετε αν υπαρχει κοινη εφαπτομενη σε κοινο τους σημειο.

$$\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2x_0} - 3 = \cancel{2x_0} + 1 \\ \quad -3 = 1 \text{ Ατοπο!} \\ x_0^2 - 3x_0 + 4 = x_0^2 + x_0 + 4 \end{cases}$$

Το συστημα ειναι αδυνατο.

αρα δεν υπαρχει κοινη

εφαπτομενη σε κοινο σημειο.

(B) Έστω $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2$

$g(x) = x^2 + 2\beta x + \alpha$.

Να βρεί τα α, β ώστε C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 1.

$$\begin{cases} f'(1) = g'(1) \Rightarrow \alpha + \cancel{2\beta} = 2 + \cancel{2\beta} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}} \\ f(1) = g(1) \Rightarrow \beta = 1 + 2\beta + \alpha \end{cases}$$

$0 = \beta + 3$

$f'(x) = \frac{\alpha}{x} + 2\beta x$

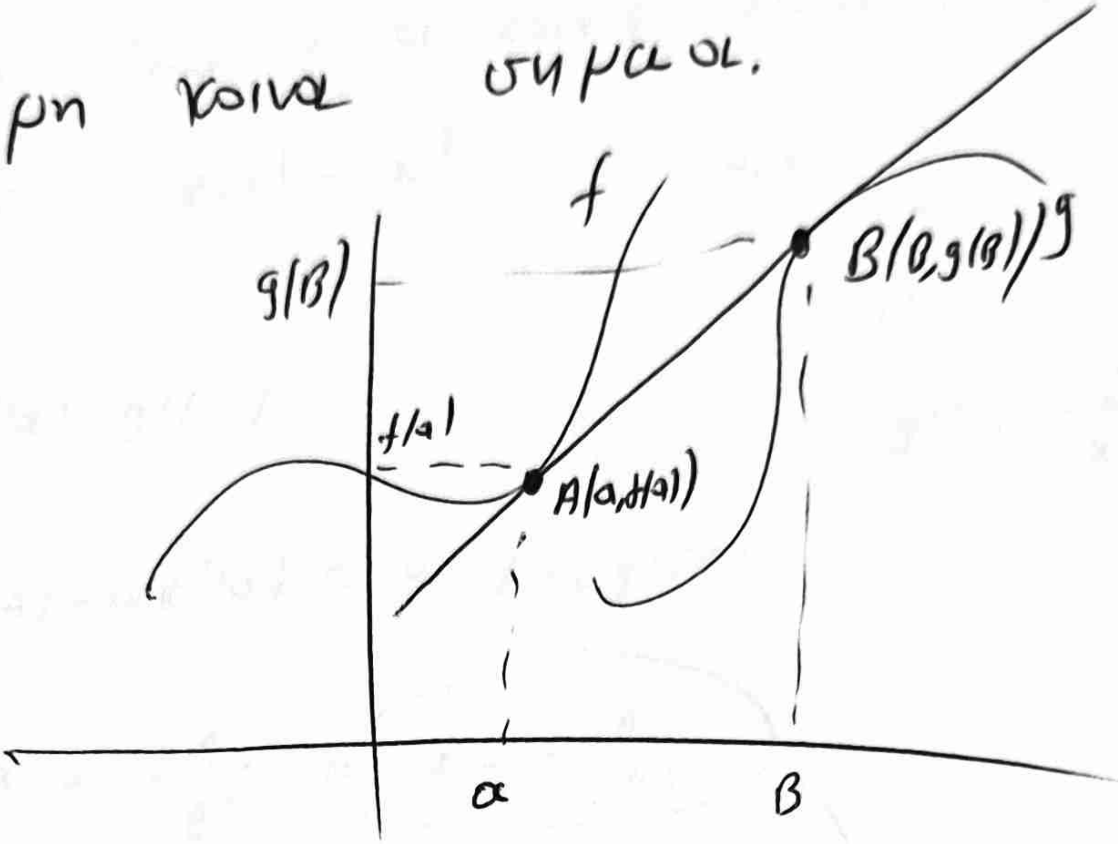
$\underline{\underline{\beta = -3}}$

$g'(x) = 2x + 2\beta$

1

Κοινές εφαπτόμενες των C_f, C_g

σε μη κοινά σημεία.



Οπτική γωνία της $f(x)$

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow \boxed{y = f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)}$$

Οπτική γωνία της $g(x)$

$$y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Rightarrow \boxed{y = g'(\beta)x + g(\beta) - \beta g'(\beta)}$$

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta), \end{cases}$$

Ασκηση 7

Ενοτητα 17 (30)

(a) Να βρεθουν οι κοινες εφαπτομενες

των $f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\begin{cases} f'(a) = g'(\beta) \\ f(a) - a f'(a) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{\beta^2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2\beta^2} \\ a^2 - a \cdot 2a = \frac{1}{\beta} - \beta \cdot \left(-\frac{1}{\beta^2}\right) \end{cases}$$

$$a^2 - 2a^2 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}$$

$$-a^2 = \frac{2}{\beta}$$

$$-\left(-\frac{1}{2\beta^2}\right)^2 = \frac{2}{\beta}$$

$$-\frac{1}{4\beta^4} = \frac{2}{\beta} \Rightarrow -\beta = 8\beta^4$$

$$-1 = 8\beta^3$$

$$(-1)^3 = (2\beta)^3 \qquad -1 = 2\beta$$

$$\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2\,\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$\alpha = -2$ και $\beta = -\frac{1}{2}$

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$$

$$y - 4 = -4(x+2)$$

$$y = -4x - 4$$

B Πανελληνιες 2019 Δ

Δεδομενα : $f(x) = (x-1)\ln(x^2-2x+2) - x + 2$

$\varepsilon : y = -x+2$ εφαπτεται της C_f στο 1

Νδο η C_f, C_g εχουν τουλαχιστον μια κοινη εφαπτομενη την οποια και να βρειτε αν $g(x) = -x^3 - x + 2$

$$g'(x) = -3x^2 - 1$$

Γνωριζω οτι η $y = -x+2$ εφαπτεται της C_f

Αν καταφερω νδο εφαπτεται της C_g ειναι κοινη!

$$\begin{cases} g'(x_0) = -1 \\ g(x_0) = -x_0 + 2 \end{cases}$$

Αν αυτο το συστημα εχει λυση

$$\begin{cases} -3x_0^2 - \cancel{1} = -\cancel{1} \Rightarrow -3x_0^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = 0}} \\ -x_0^3 - \cancel{x_0} + \cancel{2} = -\cancel{x_0} + \cancel{2} \end{cases}$$

$\underline{\underline{x_0 = 0}}$

Συμπέρασμα

Η $y = -x+2$ εφάπτεται την

C_f στο 1 και εφάπτεται

την C_g στο 0

άρα είναι κοινή

κανονες De L' Hospital

---

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπο δυο προυποθεσεις

→ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ να υπαρχει.

→ f, g παρ/μες.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπο τις ιδιες προυποθεσεις.

Ενότητα 18

1. ε) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x + 1 - 1}{2(x-1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{2(x-1)} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2} = \dfrac{1}{2}$

στ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

3. στ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty.$

4. γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \ln^2 x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x \, \frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\frac{1}{x}}{1} = 0.$

5. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x+\etaμ x}$$

$$-1 \leq \etaμ x \leq 1$$

$$e^x-1 \leq e^x+\etaμ x \leq e^x+1$$

$$\frac{1}{e^x-1} \geq \frac{1}{e^x+\etaμ x} \geq \frac{1}{e^x+1}$$

$$\boxed{\frac{x}{e^x-1} \geq \frac{x}{e^x+\etaμ x} \geq \frac{x}{e^x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Άρα κ.π. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x+\etaμ x} = 0.$

6. (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x + 1) \underset{}{\overset{+\infty-\infty}{=\!=\!=}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\cancel{\frac{\ln x}{x}}^{\,0} - 1 + \cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right) = +\infty(0-1) = -\infty$$

$$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

(δ) $$\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x + e^x - 1) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\cancel{\frac{x}{e^x}}^{\,0} - \cancel{\frac{\ln x}{e^x}}^{\,0} + 1 - \cancel{\frac{1}{e^x}}^{\,0}\right) = +\infty$$

$$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

$$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x} = 0$$

<u>Προσοχη</u> αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - g(x)\right] \overset{+\infty-\infty}{=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty} f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

$$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} \underset{DLH}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

7. (δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-\ln x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x-\frac{1}{x}} = 0$

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cancelto{0}{\dfrac{\ln x}{x^2}}\right) = +\infty$

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$

8. (β) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(1+e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}\right)$

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

Δε βγαίνει έτσι! $+\infty(1-1) = +\infty\cdot 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(1+e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln e^x - \ln(1+e^x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) = \ln 1 = 0$.

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x^2+e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln e^x - \ln(x^2+e^x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^2+e^x}\right) = \ln 1 = 0.$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2+e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

11. (β) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln x \overset{0\cdot\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \underset{DLH.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3x^2}{x^6}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{-3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-3} = 0$$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \cancel{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}$

$$= +\infty .$$

(στ) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x \ln(x^2+1) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\frac{1}{e^x}}$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-(x^2+1)e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{2x}{x^2+1} e^x$$

$$= 0 \cdot 0$$

$$= 0.$$

$\to \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{x^2} = 0$

12. γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\underset{+}{e^x} \ln(1+e^{-x})} = +\infty$

$\to \lim\limits_{x \to -\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cancel{(-e^{-x})}}{\cancel{-e^{-x}}} = 0$