1ο ΤΕΣΤ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρία - Ισότητα - Πράξεις - Σύνθεση - 1-1 - Αντίστροφη

Ονοματεπώνυμο:	**Ημερομηνία:**

ΘΕΜΑ Α - ΘΕΩΡΙΑ

Α1. Ορισμοί

Να γράψετε με ακρίβεια τους παρακάτω ορισμούς:

α΄) Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$.

β΄) Συνάρτηση 1-1.

γ΄) Αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f.

15

Α2. Σωστό / Λάθος

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λάθος**.

1	Αν $f = g$, τότε $A_f = A_g$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A_f$.	Σ Λ
2	Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική της παράσταση.	Σ Λ
3	Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και αντιστρέψιμη, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.	Σ Λ
4	Για το πηλίκο $\frac{f}{g}$ ισχύει πάντοτε $A_{f/g} = A_f \cap A_g$.	Σ Λ
5	Αν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A_f)$.	Σ Λ

5

ΘΕΜΑ Β - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1 - Ισότητα συναρτήσεων

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας εξετάζοντας πρώτα τα πεδία ορισμού.

α΄) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = 2x - \ln(e^{2x} - 1),$$

και $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}\right).$$

5

β΄) $f : (3, +\infty) \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \ln(x - 2) - \ln(x - 3),$$

και $g : ((-\infty, 2) \cup (3, +\infty)) \to \mathbb{R}$, με

$$g(x) = \ln\left(\frac{x - 2}{x - 3}\right).$$

Άσκηση 2 - Πράξεις συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2 - \frac{1}{x},$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{x - 1}{x - 3}.$$

5

Να βρείτε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f + g, \qquad f - g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{f}{g}.$$

Άσκηση 3 - Σύνθεση συναρτήσεων
Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x-2),$$
$$g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x-1} + 3.$$

10

Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f \circ g \quad \text{και} \quad g \circ f.$$

Άσκηση 4 - 1-1 και αντίστροφη
Δίνεται η συνάρτηση

$$f : (0, 2) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right).$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β΄) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης f^{-1}.

10

γ΄) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Άσκηση 5 - Αντίστροφη σε περιορισμένο διάστημα
Δίνεται η συνάρτηση

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

10

α΄) Να αποδείξετε, χωρίς χρήση παραγώγων, ότι η f είναι 1-1 στο $[0, 2]$.

β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ΄) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Άσκηση 6 - Αντίστροφη, μονοτονία και εξισώσεις
Δίνεται η επί συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 + 2x.$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς 1-1. Να αιτιολογήσετε γιατί η f αντιστρέφεται.

β΄) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

γ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(x^5 + 3x - 3\right) = x^5 + 2x.$$

δ΄) Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(f^{-1}(x)\right)^5 + 2f^{-1}(x) < 1 - \ln x, \quad x > 0.$$

ε΄) Γνωρίζοντας ότι $f(2) = 36$, να λύσετε την εξίσωση

40

$$f^{-1}\left(f\left(e^{x+1}\right)\right) - f^{-1}(36) = 0.$$

ς΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(2x) - f(x) + x = 0.$$

ζ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 3 + f^{-1}(1-x).$$

η΄) Να λύσετε στο $[0, +\infty)$ την εξίσωση

$$f(x^2) + x = f(x) + 1.$$

Να αιτιολογείτε όλα τα βήματα και να γράφετε πάντοτε τα σωστά πεδία ορισμού.

Α1: Θεωρία

Α2: 1. Σ 2. Σ 3. Σ 4. Λ 5. Σ

Άσκηση 1

(α) $A_f = A_g = (0, +\infty)$

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right) = \ln e^{2x} - \ln(e^{2x}-1) =$$

$$= 2x - \ln(e^{2x}-1) = f(x) \quad \text{ίσες!}$$

(β) $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x-3) = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right) = g(x)$

ίσες μόνο στο $(3, +\infty)$.

Άσκηση 2

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x-3}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2 - \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x-3}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{0, 3\}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x-3}} = \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x-1}{x-3}} = \frac{(2x-1)(x-3)}{x(x-1)}$$

πρεπει $g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-3} \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 0$

$x \neq 1.$

$D_{f/g} = R - \{0, 3, 1\}.$

Άσκηση 3

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(\sqrt{x-1} + 3 - 2) = \ln(\sqrt{x-1} + 1)$

  $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

  $x \geq 1$

  $\sqrt{x-1} + 3 > 2$

  $\sqrt{x-1} > -1$

  που ισχύει!

  $D_{f \circ g} = [1, +\infty).$

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\ln(x-2) - 1} + 3$

  $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

  $x > 2$

  $\ln(x-2) \geq 1$

  $e^{\ln(x-2)} \geq e^1$

  $x - 2 \geq e$

  $x \geq e + 2$

  $D_{g \circ f} = [e+2, +\infty).$

Άσκηση 4

(α) $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{2-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{2-x_2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{x_1}{2-x_1} = \frac{x_2}{2-x_2} \quad \Leftrightarrow x_1(2-x_2) = x_2(2-x_1)$

$2x_1 - x_1x_2 = 2x_2 - x_1x_2 \quad \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ 1-1

(β) $y = \ln\frac{x}{2-x}$

$e^y = \frac{x}{2-x} \quad \Rightarrow e^y(2-x) = x \quad \Rightarrow e^y 2 - xe^y = x$

$\Rightarrow 2e^y = x + xe^y \quad \Rightarrow 2e^y = x(1+e^y)$

$x = \frac{2e^y}{1+e^y}$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}}$$

(γ) πρεπει $1+e^y \neq 0$ που ισχυει.

$0 < x < 2 \quad \Rightarrow 0 < \frac{2e^y}{1+e^y} < 2$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

- $\frac{2e^y}{1+e^y} < 2 \quad \Rightarrow 2e^y < 2 + 2e^y \quad \Rightarrow 0 < 2$ ✓

Άσκηση 5

$f:[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2-4x+2 = (x-2)^2$

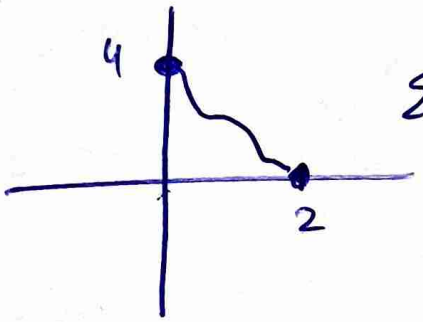
(α) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1-2 < x_2-2 \Rightarrow (x_1-2)^2 > (x_2-2)^2$

$f(x_1) > f(x_2)$

$f \downarrow \rightarrow f:1-1$

(β) $f(0) = (-2)^4 = 4$

$f(2) = (2-2)^2 = 0$



$\Sigma T_f = [0,4]$

(γ) $y = (x-2)^2$

$\sqrt{y}^2 = (x-2)^2$

$|\sqrt{y}| = |x-2|$ (⊕) (⊖)

$\sqrt{y} = 2-x$

$x = 2-\sqrt{y}$

$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f = [0,4]$

$\boxed{f^{-1}(x) = 2-\sqrt{x}}$

Ασκηση 6

$f(x) = x^5 + 2x$

(α) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$

(+) $x_1^5 + 2x_1 < x_2^5 + 2x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1

$\Rightarrow f$ ανταστρ.

(β) Εστω $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

$f \nearrow$

$f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2))$ $\quad f^{-1} \nearrow$

$x_1 < x_2$

(γ) $f(x^5 + 3x - 3) = x^5 + 2x$

$f(x^5 + 3x - 3) = f(x)$

f 1-1

$x^5 + 3x - 3 = x$

$x^5 + 2x = 3$

$f(x) = f(1)$

f 1-1

$x = 1$

(δ) $\left[f^{-1}(x)\right]^5 + 2f^{-1}(x) < 1 - \ln x$

$f(f^{-1}(x)) < 1 - \ln x$

$x < 1 - \ln x$

$\ln x + x - 1 < 0$

$g(x) < 0$

$g(x) < g(1)$

$g \nearrow$

$0 < x < 1$

Μονοτονία

$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$

(+)

$g \nearrow$

(ε) Άμεσο $f(2) = 36$ τότε $f^{-1}(36) = 2$

$f^{-1}(f(e^{x+1})) - f^{-1}(36) = 0$

$f^{-1}(f(e^{x+1})) - 2 = 0$

$e^{x+1} = 2$

$x + 1 = \ln 2$

$x = \ln 2 - 1$

(5) $f(2x) - f(x) + x = 0$

$f(2x) + x - f(x) + x = x$

$f(2x) + 2x = f(x) + x$

$g(x) = f(x) + x$

$g(2x) = g(x)$

g 1-1

$2x = x$

$2x - x = 0$

$x = 0$

• $x_1 < x_2$ (+)

• $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$g(x_1) < g(x_2)$

$g \nearrow$

(11) $f(x) = 3 + f^{-1}(1-x)$

$\underbrace{f(x) - 3 - f^{-1}(1-x)}_{\varphi(x)} = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$

$\varphi(x) = \varphi(0)$

φ 1-1

$x = 0$

$\varphi(1) = f(1) - 3 - f^{-1}(0) = 3 - 3 - 0 = 0$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - 3 < f(x_2) - 3$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow f^{-1}(1-x_1) > f^{-1}(1-x_2)$

$\oplus$

$-f^{-1}(1-x_1) < -f^{-1}(1-x_2)$

$y \nearrow$

⊖ $f(x^2) + x = f(x) + 1$ $\quad [0, +\infty)$

Για $x=1$ έχω προφανη ρίζα

• $x > 1$

$\rightarrow x > 1$

$\rightarrow x^2 > x \Rightarrow f(x^2) > f(x)$ $\Big\}\oplus$ $\underline{f(x^2) + x > f(x) + 1}$

• $0 < x < 1$

• $x < 1$

• $x^2 < x \Rightarrow f(x^2) < f(x)$ $\Big\}\oplus$ $\underline{f(x^2) + x < f(x) + 1}$

Μοναδική ρίζα $x = 1$.