

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το A .

A) Πότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A ; (4μ.)

B) Πότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι άρτια στο A ; (4μ.)

A2. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7μ.)

A3. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

A) Αν η γραφική παράσταση της $f(x)$ διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,2)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Υπάρχει γωνία x για την οποία ισχύει ότι $\eta\mu x = \frac{1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2}{3}$. $\wedge$

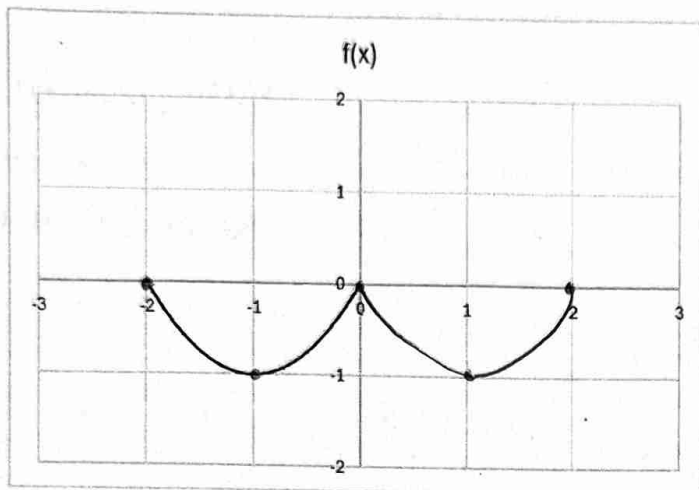
Γ) Ισχύει ότι $\eta\mu 1^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 359^\circ > 0$.

Δ) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$.

Ε) Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει ρίζα το 1 και είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι $f(2025) < 0$. (10μ.)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f: [\lambda^2 - 3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια.



~~B1.~~ Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να συμπληρωθεί η γραφική παράσταση της $f(x)$. (7μ.)

~~B2.~~ Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x)$, τα ακρότατα αυτής καθώς και οι θέσεις των ακροτάτων. (6μ.)

~~B3.~~ Να λυθεί το σύστημα $\frac{\alpha}{2} - 3\beta = -2$ και $2\alpha - \beta = 3$. (7μ.)

~~B4.~~ Αν το ζεύγος $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ είναι η λύση του συστήματος του ερωτήματος B3 να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1 > 0$. (5μ.)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{\beta x} + x^2 + \sqrt{-\alpha x}$

απουσιάζει
x ≠ 0
και x ≠ 0

όπου $\alpha = \eta\mu 450^\circ$ και $\beta = 4 \cdot \left(\eta\mu^2 \frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{3} \right)$

~~Γ1.~~ Να αποδειχθεί ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$. (6μ.)

Γ2. Να βρεις το πεδίο ορισμού της $f(x)$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μονοτονία της. (6μ.)

~~Γ3.~~ Αν η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι $A_f = (-\infty, 0)$ να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - 4) < 1$. (7μ.)

~~Γ4.~~ Να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{f(-51) - f(-5,1)}{1 - f(-3)}$ (6μ.)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 8 \cdot \sin \omega \cdot \frac{x}{4x^2+1}$ και γωνία ω για την οποία ισχύει
ότι $2 \cdot \eta\mu^2 \omega + 5 \cdot \sin \omega - 4 = 0$ και $\omega \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\sin \omega = \frac{1}{2}$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί η

παράσταση $A = \frac{\sigma\varphi\omega}{\varepsilon\varphi\omega} \cdot (2 \cdot \sin \omega - \sqrt{3} \cdot \eta\mu\omega)$. (8μ.)

Δ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η
γραφική παράσταση της $f(x)$ έχει κέντρο ασύμμετρίας την αρχή των αξόνων.

(3μ.)

ΠΕΡΙΤΤΗ

Δ3. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{1}{2}$ και ολικό
ελάχιστο για $x = -\frac{1}{2}$. (6μ.)

≤

Δ4. Αν η $f(x)$ είναι περιττή και το σύνολο τιμών της είναι το $[-1, 1]$

A) Να αποδείξετε ότι $f(2026) + f(-2026) \leq 1 - f(2025)$ (4μ.)

B) Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) - 1 = \alpha^2$, $\alpha \neq 0$ (4μ.)

Σας ευχόμαστε επιτυχία!

20 6
4√3
3-16

Λυσας Διαγωνισματος Α28CΒΡ4

A.: (α) ορισμός (β) ορισμός.

A₂: Анодування.

A3: $\odot$ $1 < 2$ και $f(1) < f(2)$ φαινομενικά $\nearrow$

ορμή δε λαεί πορεύεται οτι η δ
είναι γν. πορεύεται

(B) A

$$\mu^2 x + \sigma^2 x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9} \neq 1$$

⑧ $np \cdot 1.5w35g > 0$

④

④

Σ

(3) $f(x) = x^3$ पर त्रि

1

©. 2025 > 1

fb

$$f(\omega_2) < f(1)$$

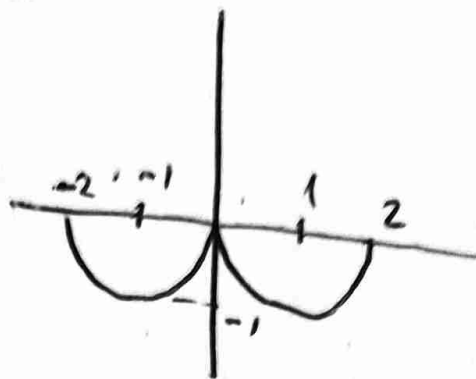
Σ

$$f(2025) < 0$$

$$B_1: x^2 - 3 = -2$$

$$x^2 = 1$$

$$\underline{x=1} \quad \text{u} \quad \underline{x=-1}$$



$$B_2: f \downarrow [-2, -1] \text{ u} [0, 1]$$

$$f \uparrow [-1, 0] \text{ u} [1, 2]$$

$$A(-2, 0) \text{ O.M.}$$

$$D(-1, -1) \text{ O.E.}$$

$$B(0, 0) \text{ O.M.}$$

$$E(1, -1) \text{ O.E.}$$

$$C(2, 0) \text{ O.M.}$$

$$B_3: \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - 3B = -2 & \Rightarrow \alpha - 6B = -4 \\ 2\alpha - B = 3 & \Rightarrow 2\alpha - B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 12B = 8 \\ 2\alpha - B = 3 \end{cases} \quad \oplus$$

$$11B = 11$$

$$(B=1)$$

$$(a=2)$$

$$B_u: \text{Ndo } f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > -1$$

$$\bullet \frac{1}{2} < 1 \quad \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1) \quad \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > -1 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 > 0}}$$

$$\Gamma_1: \alpha = \eta \rho 450 = \eta \rho (360 + 90) = \eta \rho 90 = 1$$

$$B = 4 \left(\eta \rho^2 \frac{\rho}{6} + \omega \omega^2 \frac{\eta}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = 2$$

$$\Gamma_2: \boxed{f(x) = \frac{1}{x} + x^2 + \sqrt{-x}}$$

$$\text{πρσππ } x \neq 0 \quad \text{και } -x \geq 0 \\ x \leq 0.$$

$$\underline{\underline{A_f = (-\infty, 0)}}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow \sqrt{-x_1} > \sqrt{-x_2}$$

⊕ f ✓

3.

$$f(x^2 - 4) < 1$$

$$f(x^2 - 4) < f(-1)$$

$$f \downarrow$$

$$x^2 - 4 > -1$$

$$x^2 - 3 > 0$$

x	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$x^2 - 3$	+	-

$$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

$$A_f = (-\infty, 0)$$

или $x^2 - 4 < 0$

x	-2	2
$x^2 - 4$	+	-

$$x \in (-2, 2)$$

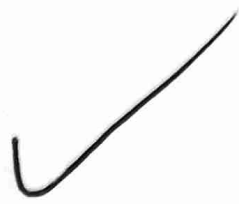
$$x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$$

(+)

$$4: A = \frac{f(-s_1) - f(-s, 1)}{1 - f(-3)} < 0$$

(-)

$$-s_1 < -s, 1$$



f↓

$$f(-s_1) > f(-s, 1)$$

$$f(-s_1) - f(-s, 1) > 0$$

Again $f(-1) = 1$.

$$-3 < -1$$

f↓

$$f(-3) > f(-1)$$

$$f(-3) > 1$$

$$0 > 1 - f(-3)$$

1:

$$2 \cdot \eta p^2 w + 5 \sigma w w - 4 = 0$$

$$2(1 - \sigma w^2 w) + 5 \sigma w w - 4 = 0$$

$$2 - 2 \sigma w^2 w + 5 \sigma w w - 4 = 0$$

$$-2 \sigma w^2 w + 5 \sigma w w - 2 = 0$$

$$\sigma w w = \frac{1}{2}$$

~~$$\sigma w w = 2$$~~

2:

$$\eta p^2 w + \sigma w^2 w = 1$$

$$\eta p^2 w + \frac{1}{4} = 1$$

$$\eta p^2 w = \frac{3}{4}$$

~~$$\eta p w = \frac{\sqrt{3}}{2}$$~~

$$\eta p w = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon \psi w = \frac{\eta p w}{\sigma w w} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \epsilon \psi w = -\sqrt{3}$$

$$\sigma \psi w = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \sigma \psi w = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\sqrt{3}} \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

$$A = +\frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \right)$$

$$A = +\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{5}{6}$$

Δ2: $f(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4x^2+1}$

$$f(x) = \frac{4x}{4x^2+1}$$

причем

$$4x^2+1 \neq 0$$

$$A_f = \mathbb{R}.$$

$$x \in A, -x \in A.$$

$$f(-x) = \frac{-4x}{4(-x)^2+1} = \frac{-4x}{4x^2+1} = -f(x)$$

ответ:

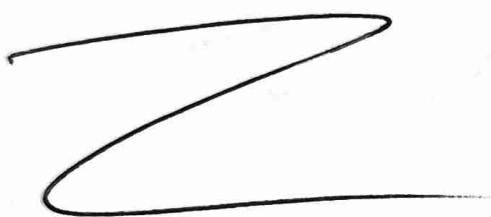
Δ3: Априк үдө $f(x) \leq f(1/2)$ кон $f(x) \geq f(1/2)$

$$\frac{4x}{4x^2+1} \leq 1$$

$$4x \leq 4x^2 + 1$$

$$0 \leq 4x^2 - 4x + 1$$

$$0 \leq (2x-1)^2$$



$$\frac{4x}{4x^2+1} \geq -1$$

$$4x \geq -4x^2 - 1$$

$$4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

$$(2x-1)^2 \geq 0$$



Δ4: (a) $f(2026) + f(1-2026) \leq 1 - f(2025)$

и оқушта $f(2026) - f(2026) \leq 1 - f(2025)$

$$f(2025) \leq 1$$

оқушта $-1 \leq f(x) \leq 1$ оқушта оқушта

$$f(2025) \leq 1$$

3)

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

$$f(x) \leq 1 \quad \text{To}$$

$$f(x) - 1 \leq 0$$

$$\text{To } a^2 \geq 0$$

$$f(x) - 1 \leq a^2 \Rightarrow f(x) - 1 < a^2$$

To " " else how as $a=0$

only case as $a \neq 0$ since

Proven!