

Διαγώνισμα

A₁: Πότε μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται γνήσιως
υθινοσα σ' ένα διαστημα Δ του πεδίου
οριζμου της ; (5)

A₂: Ποτε λερε οτι δυ συναρτησαι f, g
ειναι ισαι ; (4)

A₃: Εστω A μι κειο υποσυνολο του $\mathbb{R}$.

α) Ποτε λερε οτι μι συναρτησι
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρεφεται ;

β) Πωλ οριζεται η αντιστροφη συναρτησι
της f ; (6)

A₄: Να χαρακτηριωζουν οι παρακατω προτωται
ωλ Σωσαι η Λαδοι.

α) Ισχυα οτι $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in A$.
οπου A το πεδιο οριζμου της $f(x)$.

③ Η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ ακριβώς μια φορά εφόσον η $f(x)$ είναι 1-1.

④ Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.

⑤ Εάν τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,4)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $f(x)$ τότε η $f(x)$ είναι γνησίως αυξουσα.

⑥ Οι συναρτήσεις f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον $y'y$.

10

Θεμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bullet g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$\bullet h(x) = \ln x$$

~~Β₁~~: Βρες την $f = g \circ h$ (6)

~~Β₂~~: Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ νδo η f

αντιστρέφεται και στη συνέχεια

$$\text{νδo } f^{-1} = f \quad (8)$$

Β₃: Να βρεθούν τα κοινά σημεία

$$\text{της } \frac{h}{g} \text{ με τον } x'x. \quad (6)$$

~~Β₄~~: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln x \cdot \ln \left(\frac{1}{x-1} \right) \right] \quad (5)$$

Θερα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον
y'g σε σημείο με τεταγμένη 14.

Γ₁: Νόδο $\alpha=2$ και στη συνέχεια νόδο η
συνάρτηση f είναι 1-1. (5)

Γ₂: Να λυθεί η εξίσωση
 $f(f(x^2-4) + x - 1) - f(x+1) = 0$ (5)

Γ₃: Να λυθεί η ανίσωση
 $f(f(|x|-2) - 5) < f^{-1}(14)$ (5)

Γ₄: Να λυθεί η εξίσωση
$$f^{-1}(x) = \frac{1 - e^{x-2}}{[f^{-1}(x)]^2 + 2}$$
 (5)

Γ₅: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 6} - 3x}{|f(x)| + x^3}$$

(5).

Θεμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + e^x}$, $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της $f(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(\ln 3, -\frac{1}{2})$

Δ1: Νδο $a=1$ και στη συνέχεια νδο η $f(x)$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. (6)

Δ2: Νδο η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρει την αντιστροφή της $f(x)$ (6)

Δ3: Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$f\left(\ln(x^2+1)+x\right) + f\left(\ln \frac{1}{x^2+1} - x\right) + f(x^3) + f(2x-3) = 0$$

(6)

Δ4: Νδο η $g(x) = f^{-1}(x) + f(e^x)$

αντιστρέφεται και στη συνέχεια να

βρει το σύνολο τιμών της $g^{-1}(x)$ (7)

Λογισ

A1: Ορισμός

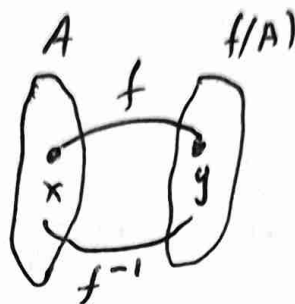
A2: Ορισμός

A3: Ορισμός.

A4: (a) Λαθος

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$x \in f(A)$$



(β) Λαθος

Το ποιο μια φορά!

(γ) Σωστο

Αν f γν. προσην $\Rightarrow f \circ f^{-1} = \text{ταυτοσην}$.

Αν $f \circ f^{-1} \neq \text{ταυτοσην}$ $\nRightarrow f$ γν. προσην!

(δ) Λαθος

$$\begin{matrix} f(2)=3 \\ f(3)=4 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2 < 3 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} f(2) < f(3) \\ 3 < 4 \end{matrix}$$

Δω που εχει να κανει
οτι ειναι γν. προσην!

(ε) Λαθος

f, f^{-1} συνημερια ω
ηλ εν $x'x$.

$$B_1: f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$x \in D_h \text{ and } h(x) \in D_g$$

$$\underline{\underline{x > 0}}$$

$$\ln x > 0$$

$$e^{\ln x} > e^0$$

$$\underline{\underline{x > 1}}$$

$$D_f = (1, +\infty)$$

$$B_2: \in \text{STW} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$$

$$(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$$

$$(\cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - 1) = \cancel{x_2 x_1} - x_2 + x_1 - 1$$

$$2x_2 = 2x_1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = x_2}} \quad f \circ I^{-1}$$

$$y = f(x)$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1 \Rightarrow yx - y = x+1$$

$$yx - x = y+1 \Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$y \neq 1$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}} \quad D_{f^{-1}} = (1, +\infty) \quad \text{loc!}$$

Tc 201

$$x > 1 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0$$

$$\frac{y+1}{y-1} - \frac{y-1}{y-1} > 0 \Rightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Rightarrow y-1 > 0$$

y > 1

$$B_3: \left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\ln x}{\frac{e^x+1}{e^x-1}} = \frac{\ln x (e^x-1)}{e^x+1}$$

Период $x \in D_h \cap D_g$ так $g(x) \neq 0$

x > 0

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} \neq 0$$

now now

$$D_{h/g} = (0, +\infty)$$

$$\rightarrow \left(\frac{h}{g}\right)(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x (e^x-1)}{e^x+1} = 0$$

$$\ln x = 0$$

x=1 ✓

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

~~x=0~~

$$\text{Bu: } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln x \cdot \ln \left(\frac{1}{x-1} \right) \right]$$

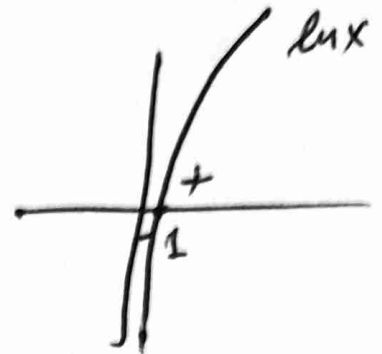
$$-1 \leq \ln \frac{1}{x-1} \leq 1$$

$$\left| \ln \frac{1}{x-1} \right| \leq 1$$

$$|\ln x| \left| \ln \frac{1}{x-1} \right| \leq |\ln x|$$

$$\left| \ln x \ln \frac{1}{x-1} \right| \leq |\ln x|$$

$$-|\ln x| \leq \ln x \ln \frac{1}{x-1} \leq |\ln x|$$

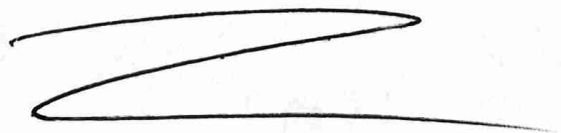


$$\lim_{x \rightarrow 1} -|\ln x| = 0$$

Ans k.o

$$\lim_{x \rightarrow 1} |\ln x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln \frac{1}{x-1} = 0$$



11:

$$f(x) = x^3 + ax + 2$$

$$(f \circ f)(0) = 14$$

$$f(10) = 14$$

$$\underline{\underline{f(2) = 14}}$$

$$\bullet f(0) = 2$$

$$f(2) = 8 + 2a + 2 = 14$$

$$10 + 2a = 14$$

$$2a = 4$$

$$\underline{\underline{a = 2}}$$

$$f(x) = x^3 + 2x + 2$$

$$f \nearrow = f \circ f - 1 \Rightarrow \text{answer.}$$

12:

$$f\left(\frac{f(x^2-4)+x-1}{f(0)-1}\right) - f(x+1) = 0$$

$$\frac{f\left(\frac{f(x^2-4)+x-1}{f(0)-1}\right)}{f(0)-1} = \frac{f(x+1)}{f(0)-1}$$

$$\frac{f(x^2-4)+x-1}{f(0)-1} = x+1$$

$$f(x^2-4) = 2$$

$$f(x^2-4) = f(0)$$

$$f(0) = 2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\textcircled{x = 2}$$

$$\textcircled{x = -2}$$

$$T_3: f(|x|-2) - 5 < f^{-1/24}.$$

$$f(|x|-2) - 5 < 2$$

$f \nearrow$

$$f(|x|-2) - 5 < f(0)$$

$f \nearrow$

$$f(|x|-2) - 5 < 0$$

$$f(|x|-2) < 5$$

$$f(|x|-2) < f(1)$$

$f \nearrow$

$$|x|-2 < 1$$

$$|x| < 3$$

$$\underline{\underline{-3 < x < 3}}$$

$\Gamma_u:$ $f^{-1}(x) = \frac{1 - e^{x-2}}{[f^{-1}(x)]^2 + 2}$

$$f^{-1}(x) \left((f^{-1}(x))^2 + 2 \right) = 1 - e^{x-2}$$

$$(f^{-1}(x))^3 + 2f^{-1}(x) + 2 = 3 - e^{x-2}$$

$$f(f^{-1}(x)) = 3 - e^{x-2}$$

$$x = 3 - e^{x-2}$$

$$\underbrace{e^{x-2} + x - 3}_{\varphi(x)} = 0$$

φ 

$$\Rightarrow \varphi(x) = 0$$

$$\varphi(x) = \varphi(2)$$

$$\varphi(2) = 0$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$$Ts: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 6} - 3x}{|H(x)| + x^3} =$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 6} - 3x}{-\cancel{x^3} - 2x - 2 + \cancel{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 6} - 3x}{-2x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} - 3x}{x \left(-2 - \frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} - 3x}{x \left(-2 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{-1 - 3}{-2} = \boxed{2}$$

$$\Delta: f(x) = \frac{a - e^x}{1 + e^x}$$

$$f(\ln 3) = \frac{a - e^{\ln 3}}{1 + e^{\ln 3}} = \frac{a - 3}{1 + 3} = \frac{a - 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$2(a - 3) = -4$$

$$2a - 6 = -4 \Rightarrow 2a = 2$$

$$\underline{\underline{a = 1}}$$

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

Αρκε να δούμε αν περνάει.

$$f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} =$$

$$= - \frac{1 - e^x}{e^x + 1} = -f(x)$$

περνάει.

Μια συνάρτηση έχει κάποια συμμετρία
των αρχών των αξόνων όταν
είναι περλιττη ενώ είναι συμμετρική
ως προς τον y'y όταν είναι αρτι.

$$\Delta_2: f(x_1) = f(x_2) \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1-e^{x_1}}{1+e^{x_1}} = \frac{1-e^{x_2}}{1+e^{x_2}}$$

$$\Rightarrow (1-e^{x_1})(1+e^{x_2}) = (1+e^{x_1})(1-e^{x_2})$$

ooo

$$x_1 = x_2$$

$$y = \frac{1-e^x}{1+e^x} \quad \Rightarrow \quad y(1+e^x) = 1-e^x$$

$$y + ye^x = 1 - e^x \quad \Rightarrow \quad ye^x + e^x = 1 - y$$

$$e^x(y+1) = 1-y$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{1-y}{y+1} \quad y+1 \neq 0$$

$$y \neq -1$$

$$x = \ln \frac{1-y}{y+1} \quad \frac{1-y}{y+1} > 0$$

y	-1	1
1-y	+	+
y+1	-	+
$\frac{1-y}{y+1}$	-	-

$$y \in (-1, 1)$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{1-x}{x+1}$$

$$D_{f^{-1}} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\Delta_3: f(\ln(x^2+1) + x) + f\left(\ln \frac{1}{x^2+1} - x\right) + f(x^3) \\ + f(2x-3) = 0$$

$$f(\ln(x^2+1) + x) + f(\cancel{\ln} - \ln(x^2+1) - x) + f(x^3) = -f(2x-3)$$

f нечетная

$$\cancel{f(\ln(x^2+1) + x) - f(\ln(x^2+1) + x)} + f(x^3) = f(-2x+3)$$

$$f(x^3) = f(-2x+3)$$

$$f(3)-1$$

$$x^3 + 2x - 3 = 0$$

$$x=1$$

$$\sum T_{g^{-1}} = D_g = (-1, 1)$$

$\eta_{\text{που}} \quad x \in D_{f^{-1}} \quad \text{και} \quad e^x \in D_f$
 $-1 < x < 1$
 $e^x \in \mathbb{R}.$ ✓

$$\sum T_{g^{-1}} = (-1, 1) .$$