

A λγ ε Βρα

Β' Λυκείου

Συστήματα

Συναρτήσεις

2024 - 2025

Γραμμική εξίσωση

κάθε εξίσωση που έχει τη μορφή

$$ax + by = \gamma \quad \mu\epsilon \quad a \neq 0 \quad \eta \quad b \neq 0$$

και $a, b, \gamma, x, y \in \mathbb{R}$

λεγεται γραμμική εξίσωση.

Προσοχή

Εστω $ax + by = \gamma$ γραμμική εξίσωση τότε

1. Οι x και y λέγονται αγνώστοι
2. Οι a και b λέγονται συντελεστές των αγνώστων
3. Ο γ λέγεται σταθερός όρος.
4. Το ζεύγος $(x, y) = (k, l)$ το οποίο ενοικληθώντι
τη γραμμική εξίσωση λέγεται λύση
της γραμμικής εξίσωσης.
5. Μια γραμμική εξίσωση έχει απείρες λύσεις
ή είναι αδύνατη

Προσοχή

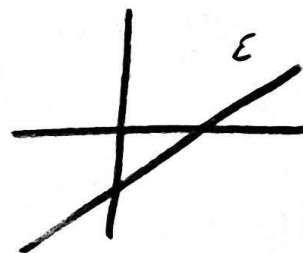
Η γραμμική εξίσωση $ax+by=\gamma$, $a \neq 0$ ή $b \neq 0$
παριστάει πάντα ευθεία γραμμή

Είδη ευθειών

1. Εξ $ax+by=\gamma$ με $a \neq 0$ και $b \neq 0$

2. Εξ $y=k$ οριζόντια ευθεία.

3. Εξ $x=k$ κατακόρυφη ευθεία.



Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης

1. Αν εξ $ax+by=\gamma$ τότε $\lambda = -\frac{a}{b}$

2. Αν εξ $y=k$ τότε $\lambda = 0$

3. Αν εξ $x=k$ τότε δεν ορίζεται λ

Σημια τομής με άξονες

$x'x$

Θέτω $y=0$

και βρούμε το
σημείο $A(x, 0)$

$y'y$

Θέτω $x=0$

και βρούμε το
σημείο $B(0, y)$

ΟΡΕΓΟΥΣΕΣ

Εστω σύστημα

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική

$$\text{λύση } x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$$

Αν $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ τότε το σύστημα

έχει άπειρες λύσεις.

Αν $D = 0$ και $(D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0)$

τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Σχέση Συστημάτων - Ευθειών

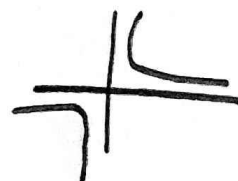
1. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (κ, λ)$ τότε οι ευθείες $ε_1, ε_2$ τέρνονται στο $A(κ, λ)$
2. Αν το σύστημα είναι αδύνατο τότε οι ευθείες $ε_1, ε_2$ είναι παράλληλες.
3. Αν το σύστημα είναι αόριστο τότε οι ευθείες $ε_1, ε_2$ ταυτίζονται.

Βασικές γραφικές παραστάσεις

1. κύκλος κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνα $ρ$

$$C: x^2 + y^2 = ρ^2$$

2. υπερβολή $C: xy = α, α > 0$



Άσκηση 1

Να λύσει το σύστημα $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$\begin{cases} 2x + y = -4 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \boxed{y = -2x - 4} \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$x + 3(-2x - 4) = 3$$

$$x - 6x - 12 = 3 \quad (\Rightarrow) \quad -5x = 15$$

$$\boxed{x = -3}$$

$$\text{Άρα } y = -2(-3) - 4$$

$$y = 6 - 4$$

$$\boxed{y = 2}$$

Άσκηση 2

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 16 \\ 3x + 4y = -10 \end{cases}$$

με τη μέθοδο των αντεθέσεων συντελεστών.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 16 \\ 3x + 4y = -10 \end{cases}$$

($\Rightarrow$)

$$\begin{cases} 6x - 9y = 48 \\ -6x - 8y = 20 \end{cases} \quad (+)$$

$$-17y = 68$$

$$\boxed{y = -4}$$

$$3x + 4(-4) = -10$$

$$3x - 16 = -10$$

$$3x = 6$$

$$\boxed{x = 2}$$

Άσκηση 3

Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο των
ορίσμων.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 16 \\ 3x + 4y = -10 \end{cases}$$

Αρχικά βρίσκω τις ορίσμων.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 9 = 17$$

Αφού $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$D_x = \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 64 - 30 = 34$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = -20 - 48 = -68$$

$$\text{Άρα } x = \frac{D_x}{D} = \frac{34}{17} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-68}{17} = -4$$

Άσκηση 4

Να λύσω τα παρακάτω συστήματα.

$$\textcircled{a} \begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$$

Λοιπόν, $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 4 \quad (+) \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$

$$0 = -3$$

Το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\textcircled{b} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -\frac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$$

Λοιπόν $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -\frac{x}{2} + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \quad (+) \\ -x + 2y = -4 \quad (=) \end{cases}$

$$0 = 0$$

Το σύστημα είναι αόριστο (έχει άπειρα λύσεις).

Οπότε τους ορως έχω τη μορφή

$$\boxed{y = \frac{x}{2} - 2.}$$

Άσκηση 5

Δίνεται η γραμμική εξίσωση $3x - 2y = 8$

α) Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(2, -1)$ και $(-3, -7)$ αποτελούν λύση της παραπάνω εξίσωσης

Ένα ζεύγος (a, b) αποτελεί λύση της γραμμικής εξίσωσης εάν την επαληθεύει.

Έτσι, για $x=2$ και $y=-1$ έχω $3 \cdot 2 - 2(-1) = 8$
 $(\Rightarrow) 6 + 2 = 8 \quad (\Rightarrow) 8 = 8.$

Τέλος, για $x=-3$ και $y=-7$ έχω $-3 \cdot 3 - 2(-7) = 8$
 $(\Rightarrow) -9 + 14 = 8 \quad (\Rightarrow) 5 = 8$

Αυτό το ζεύγος δεν αποτελεί λύση της γραμμικής εξίσωσης.

③ Βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το ζεύγος $(\alpha, 6-\alpha)$ να είναι λύση της εξίσωσης

$$\text{Είναι, } 3\alpha - 2(6-\alpha) = 8 \quad (\Rightarrow) 3\alpha - 12 + 2\alpha = 8$$

$$5\alpha = 20$$

$$\boxed{\alpha = 4}$$

④ Να βρεθεί η γενική μορφή λύσεων της παραπάνω γραμμικής εξίσωσης

$$3x - 2y = 8$$

$$(\Rightarrow) -2y = 8 - 3x$$

$$(\Rightarrow) y = \frac{8-3x}{-2}$$

Κάθε ζεύγος λύσεων της μορφής

$$\left(t, \frac{8-3t}{-2} \right)$$

Άσκηση 6

α) Να βρούμε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-1)$

Έστω $\varepsilon: y = ax + b$

$$A(1,2) : 2 = a \cdot 1 + b \quad (\Leftrightarrow) \quad a + b = 2$$

$$B(2,-1) : -1 = a \cdot 2 + b \quad (\Leftrightarrow) \quad 2a + b = -1$$

Από
$$\begin{cases} -a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \quad (+) \quad \boxed{a = -3}$$

$$-3 + b = 2$$
$$\boxed{b = 5}$$

Από $\varepsilon: y = -3x + 5$.

Ⓔ Να βρω ευθεία ℓ η οποία είναι
παράλληλη στην ε και διέρχεται από
την αρχή των αξόνων.

$$\text{Αφού } \ell \parallel \varepsilon \Rightarrow \ell: y = -3x$$

γιατί η ℓ διέρχεται από αρχή αξόνων

άρα είναι της μορφής $\ell: y = ax$ και

$$\ell \parallel \varepsilon \Rightarrow \lambda_\ell = \lambda_\varepsilon = -3.$$

Άσκηση 7

Να βρούμε το σημείο M

ε_1

Αφού δα διέρχεται
από την αρχή των
αξόνων

$$\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$$

$$\bullet \varepsilon_{45} = \alpha = 1$$

$$\text{αρα } \varepsilon_1: y = x + \beta$$

$$(0, 2) \ni 2 = 0 + \beta \quad (\Rightarrow) \quad \beta = 2 \quad \text{αρα} \quad \boxed{\varepsilon_1: y = x + 2}$$

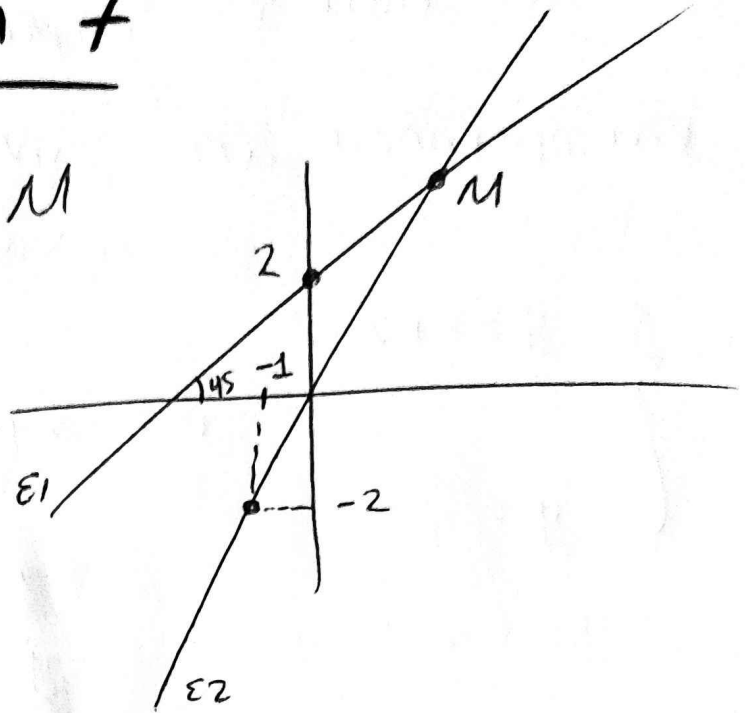
ε_2

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι

$$\varepsilon_2: y = \alpha x$$

$$(-1, -2) \ni -2 = \alpha(-1) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$$

$$\boxed{\varepsilon_2: y = 2x}$$



Το M είναι το σημείο τομής των ϵ_1, ϵ_2
και προκύπτει από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 2x$$

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$\text{Άρα } M(2, 4).$$

Άσκηση 8

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x + 6y = 5$ και

$$\varepsilon_2: x + 2y = \alpha$$

(α) Υπάρχουν τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να τέμνονται;

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \quad \text{αρα το σύστημα}$$

δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση αρα
οι ευθείες δεν τέμνονται.

(β) Για ποιά τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι ευθείες
είναι

i παράλληλες;

$$\varepsilon_1: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

$$\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Αν } \frac{5}{6} = \frac{\alpha}{2} \quad (\Rightarrow) \quad \alpha = \frac{5}{3}$$

τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

ii συμπίπτουν;

Αν $\alpha \neq \frac{5}{3}$ συμπίπτουν.

Άσκηση 9

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma) \equiv \begin{cases} (\lambda+1)x - y = -\lambda \\ -4x + (\lambda+1)y = \lambda+1 \end{cases}$

α) Να λυθεί το σύστημα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -4 & (\lambda+1) \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\lambda \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$$

1. Αν $\lambda \neq 1, \lambda \neq -3$ τότε το $D \neq 0$ συνεπώς

το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{-(\lambda+1)(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda+3)} = \frac{-\lambda+1}{\lambda+3}$$

$$y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)(\lambda+3)} = \frac{\lambda-1}{\lambda+3}.$$

2. Αν $\lambda=1$ τότε $D=0, D_x=0, D_y=0$ συνεπώς
το σύστημα έχει άπειρα λύσεις.

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ -4x+2y=2 \end{cases} \quad \text{όλες τούτες έχουν τη μορφή } (x,y)=(x, 2x+1).$$

3. Αν $\lambda=-3$ τότε $D=0$ όμως $D_y \neq 0$
συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

③ Να βρεθεί το λ αν το ζεύγος (x_0, y_0)
είναι μοναδική λύση και ισχύει $y_0^2 - 2x_0 = 1$.

$$\text{Από } \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+3}\right)^2 + 2 \frac{\lambda+1}{\lambda+3} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda+3)^2} + 2 \frac{\lambda+1}{\lambda+3} = 1$$

$$(\lambda-1)^2 + 2(\lambda+1)(\lambda+3) = (\lambda+3)^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 2(\lambda^2 + 3\lambda + \lambda + 3) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

$$-2\lambda + 1 + 2\lambda^2 + 6\lambda + 2\lambda + 6 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 \quad (\Leftrightarrow) \quad \lambda=1 \quad \text{ή} \quad \boxed{\lambda=-1}$$

Άσκηση 10

Ισχύει ότι
$$\begin{vmatrix} D_x - D_y & \\ D_y & D_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & D \\ D & D - 2Dy - 5 \end{vmatrix}$$

Να λύσει το σύστημα.

Έχω ότι
$$D_x^2 + D_y^2 = 4D - 8Dy - 20 - D^2$$

$$D_x^2 + D^2 - 4D + 4 + D_y^2 + 8Dy + 16 = 0$$

$$D_x^2 + (D-2)^2 + (Dy+4)^2 = 0$$

Αρα πρέπει

$$D_x = 0$$

$$D = 2$$

$$Dy = -4$$

Αντικαθιστώντας $x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{2} = 0$

$$y = \frac{Dy}{D} = -\frac{4}{2} = -2$$

Άσκηση 11

Αν το σύστημα $\begin{cases} ax+by=\gamma \\ a'x+b'y=\gamma' \end{cases}$ έχει

μοναδική λύση και ισχύουν $D_x + 2D_y = 3D$

και $x - 2y = -1$ να βρεθούν τα x, y .

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση

τότε $D \neq 0$ οπότε

$$\frac{D_x}{D} + 2 \frac{D_y}{D} = 3 \frac{D}{D}$$

$$x + 2y = 3$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\oplus \quad 2x = 2 \quad \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$1 + 2y = 3$$

$$2y = 2$$

$$\boxed{y = 1}$$

Άσκηση 12

Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με x, y αγνώστους έχει μοναδική λύση και

$$D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 - 2DD_x + 4DD_y = 0$$

Βρίλ x, y .

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση τότε $D \neq 0$

$$\text{αρα } \frac{D_x^2}{D^2} + \frac{D_y^2}{D^2} + 5 \frac{D^2}{D^2} - 2 \frac{D}{D} \frac{D_x}{D} + 4 \frac{D}{D} \frac{D_y}{D} = 0$$

$$\left(\frac{D_x}{D}\right)^2 + \left(\frac{D_y}{D}\right)^2 + 5 - 2 \frac{D_x}{D} + 4 \frac{D_y}{D} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5 - 2x + 4y = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{y=-2}$$

Άσκηση 13

Σε έναν χώρο στάθμευσης υπάρχουν 50 οχήματα αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες. Αν όλα τα οχήματα έχουν 170 ποδες, να βρούμε πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσυκλέτες.

Έστω x αυτοκίνητα και y μοτοσυκλέτες.

Παραπλήν $x+y=50$ και $4x+2y=170$

$$\begin{cases} x+y=50 \\ 4x+2y=170 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} -2x-2y=-100 \\ 4x+2y=170 \end{cases} \quad (+)$$

$$2x=70 \quad (=) \quad \boxed{x=35}$$

$$\boxed{y=15}$$

Askun 14

Na žadu to sustava

$$\begin{cases} 2x - y + 3w = 4 \\ 3x + 2y - w = -7 \\ x - 3y + 2w = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1 + 3y - 2w}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1 + 3y - 2w) - y + 3w = 4 \\ 3(1 + 3y - 2w) + 2y - w = -7 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + 6y - 4w - y + 3w = 4 \\ 3 + 9y - 6w + 2y - w = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5y - w = 2 \\ 11y - 7w = -10 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} -35y + 7w = -14 \\ 11y - 7w = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -24y = -24 \quad (\Rightarrow) \boxed{y = 1}$$

$$\downarrow 5 - w = 2$$

$$\boxed{w = 3}$$

$$\boxed{x = -2}$$

Άσκηση 15

α) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} -x+y = -3 \\ x^2+2y^2=9 \end{cases}$$

Λοιπόν, δοθέν με αντικατάσταση

$$\begin{cases} \boxed{y = x-3} \\ x^2+2y^2=9 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad x^2+2(x-3)^2=9$$

$$(\Rightarrow) x^2+2(x^2-6x+9)=9 \quad (\Rightarrow) x^2+2x^2-12x+18=9$$

$$3x^2-12x+9=0$$

$$(\Rightarrow) x^2-4x+3=0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\boxed{y=-2}$$

$$\boxed{y=0}$$

β) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 11 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \frac{-4}{x} - \frac{2}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 11 \end{cases}$$

$$(\oplus) \quad -\frac{5}{y} = 15 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{y = -\frac{1}{3}}$$

$$\text{Αρα } \frac{4}{x} - \frac{3}{-\frac{1}{3}} = 11 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4}{x} + 9 = 11 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4}{x} = 2 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{x=2}$$

① Να λύσει το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \boxed{y = -\frac{4}{x}} \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{x}\right)^2 = 17$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{16}{x^2} = 17 \Rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Θέτω $x^2 = t$ άρα $t^2 - 17t + 16 = 0$

$$t = 16 \quad \vee \quad t = 1$$

$$x^2 = 16 \quad \vee \quad x^2 = 1$$

$$\boxed{x = 4}$$

$$\boxed{x = -4}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$\boxed{y = 1}$$

$$\boxed{y = -4}$$

$$\boxed{y = 4}$$

Άσκηση 16

Να λυθούν τα συστήματα

$$\textcircled{α} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 + 2x - 2y = -3 \\ x^2 + y^2 - x = 3 \end{cases}$$

$\textcircled{+}$

$$x - 2y = 0$$

$$\boxed{x = 2y}$$

$$(2y)^2 + y^2 - 2y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4y^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$5y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = 1 \\ x = 2 \end{matrix}}$$

$$\vee \quad y = -\frac{3}{5}$$

$$\boxed{x = -\frac{6}{5}}$$

$$\textcircled{β} \quad \begin{cases} (x - 2y)(x - 1) = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Είχαν

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2 \quad y = 1}$$

$\vee$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1 \quad y = \frac{4}{3}}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \begin{cases} (x-2y)^2 - |x-2y| - 6 = 0 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

Θετω $|x-2y|=t$

αρα $t^2 - t - 6 = 0$

$t=3$ ή $t=-2$

$|x-2y|=3$ ή $|x-2y|=-2$

Αδυνατον!

$x-2y=3$ ή $x-2y=-3$

Αρα $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+2y=1 \end{cases}$

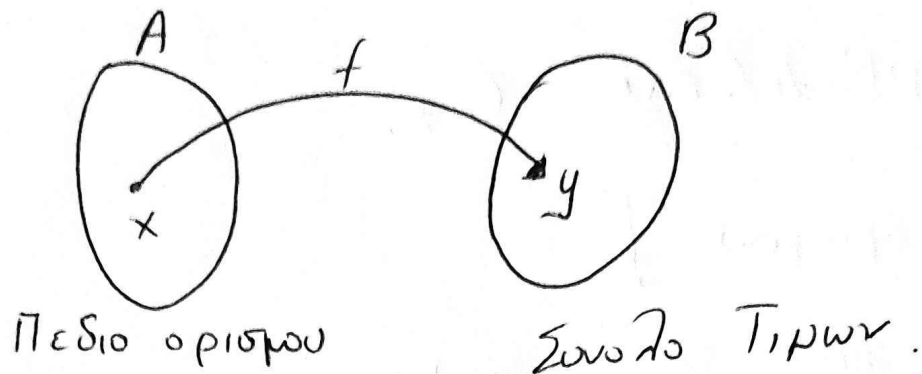
$$\boxed{x=2 \quad y=-\frac{1}{2}}$$

ή $\begin{cases} x-2y=-3 \\ x+2y=1 \end{cases}$

$$\boxed{x=-1 \quad y=1}$$

Συναρτήσεις

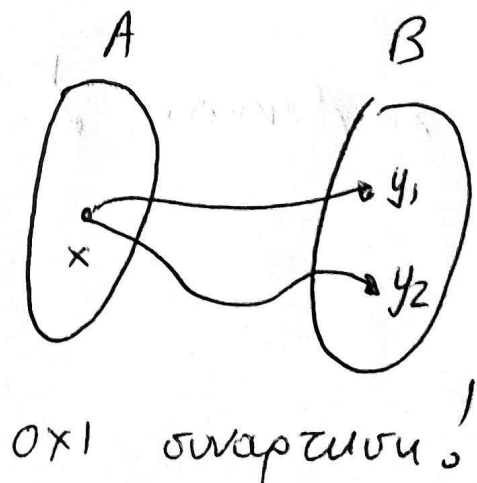
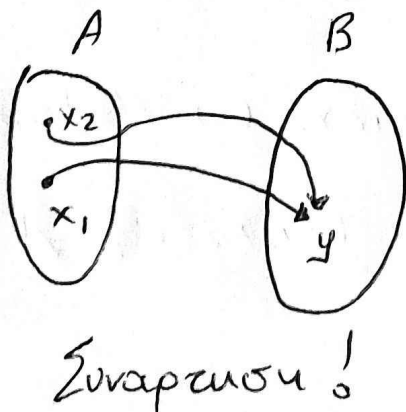
Συναρτηση είναι μια διαδικασία αντιστοιχισμού τιμών από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Βασικές αρχές

- i) Συμβολισμοί: $f(x)=y$ όπου $f: A \rightarrow B$
- ii) Το x αντιστοιχίζεται σε μοναδικό y
- iii) Το x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το y είναι εξαρτημένη.

Προσοχή



Γραφική παράσταση

Το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ αποτελούν
τη γραφική παράσταση της $f(x)$
και συμβολίζεται C_f .

Πεδίο ορισμού

1. $f(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ προση $A(x) \neq 0$
2. $f(x) = \sqrt{A(x)}$ προση $A(x) \geq 0$
3. $f(x) = \frac{B(x)}{\sqrt{A(x)}}$ προση $A(x) > 0$

Μονοτονία συνάρτησης

1. Η f γν. αύξουσα $\nearrow$ στο Δ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 $\forall x_1, x_2$ στο Δ
2. Η f γν. φθίνουσα $\searrow$ στο Δ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 $\forall x_1, x_2$ στο Δ .

Προσέγγιση

1. Αν $f \nearrow$ ή $f \searrow$ στο Δ τότε f γν. μονοτονική στο Δ .
2. Αν f γν. μονοτονική στο Δ τότε $f \nearrow$ στο Δ ή $f \searrow$ στο Δ . Δεν γνωρίζω τι από τα δύο είναι ορθώς.

Ακρότατα

1. Αν $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \Delta$ τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ολικό μέγιστο στο Δ όπου το x_0 θέση μέγιστου και το $f(x_0)$ μέγιστο τιμή f στο Δ ή μέγιστη τιμή τιμή f στο Δ .
2. Αν $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \Delta$ τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ολικό ελάχιστο στο Δ όπου το x_0 θέση ελάχιστου και το $f(x_0)$ ελάχιστο τιμή f στο Δ ή ελάχιστη τιμή τιμή f στο Δ .

Προσοχή

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης λέγονται ακρότατα αυτής.

Προσοχή

Αν $f \nearrow$ στο Δ_1 και $f \nearrow$ στο Δ_2

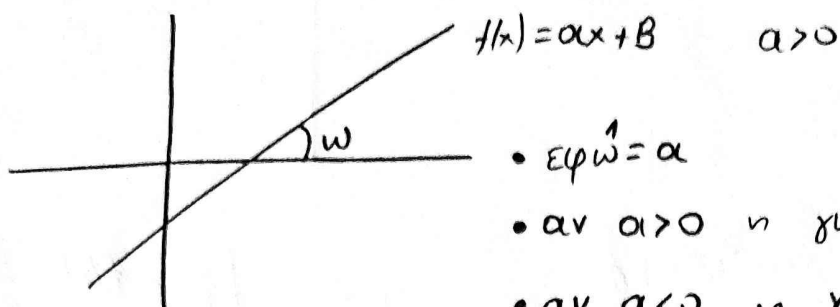
τότε $\nrightarrow f \nearrow$ στην $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Προσοχή

1. Αν η f συνάρτηση τότε $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
2. Αν η f γν. ποσότητα τότε $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

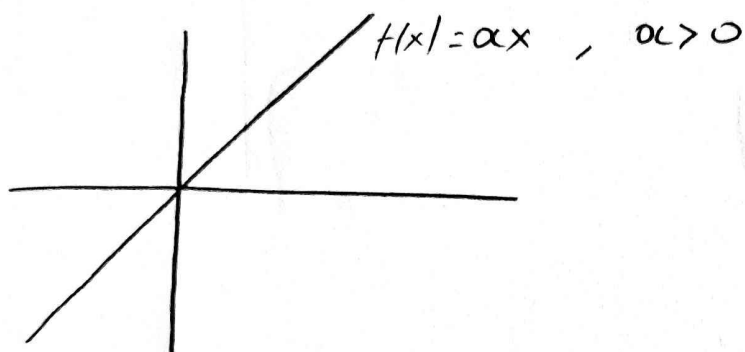
Βασικές συναρτήσεις

1.

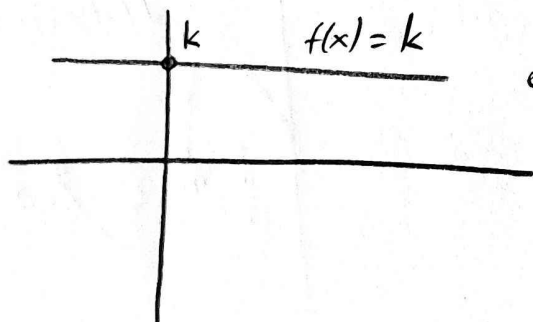


- $\epsilon\varphi\omega = a$
- αν $a > 0$ η γωνία ω οξεία.
- αν $a < 0$ η γωνία ω αμβlyα.

2.



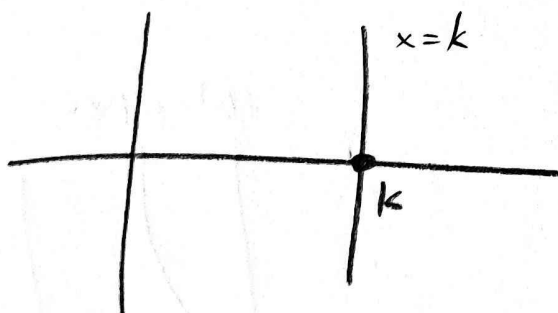
3.



οριζόντια ευθεία.

- $a = 0$

4.

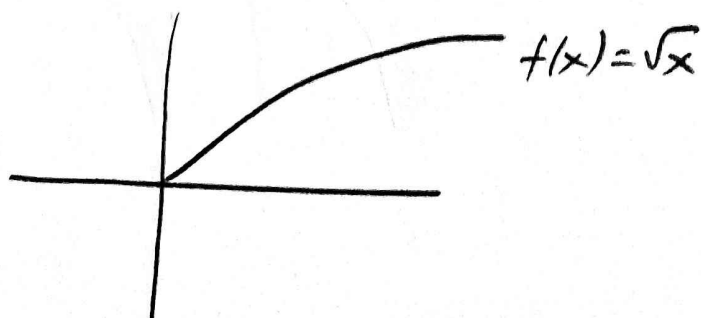


• ΔΕΝ είναι συνάρτηση

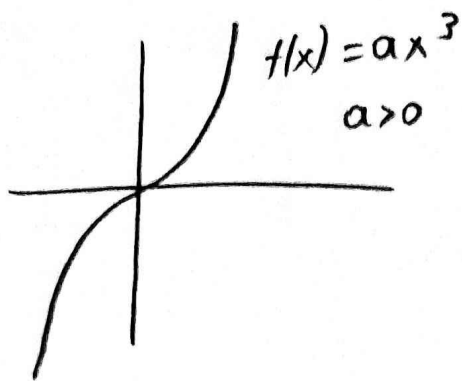
• κατακόρυφη ευθεία.

• Το a δεν ορίζεται.

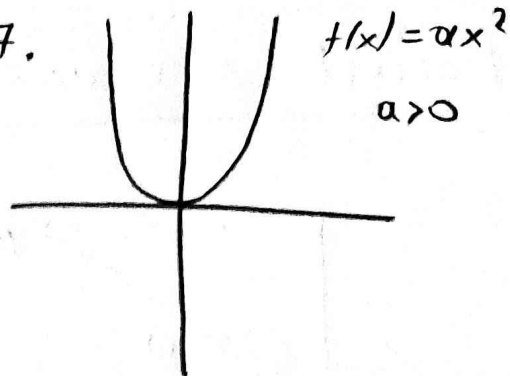
5.



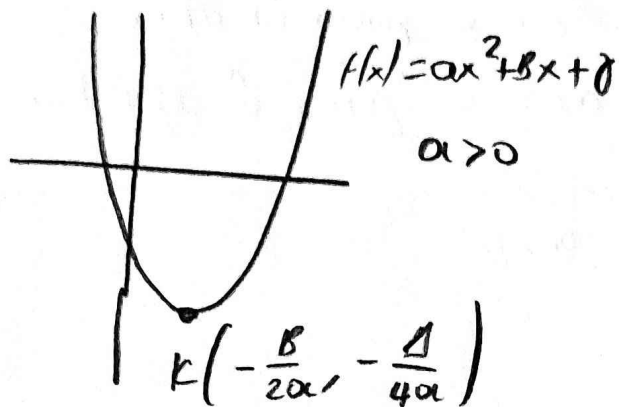
6.



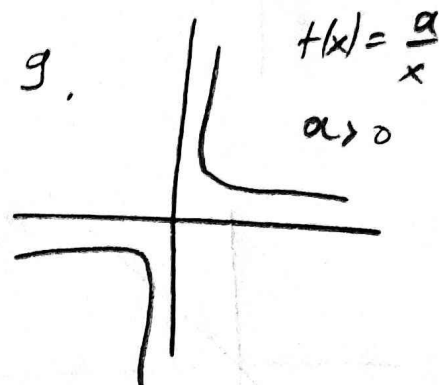
7.



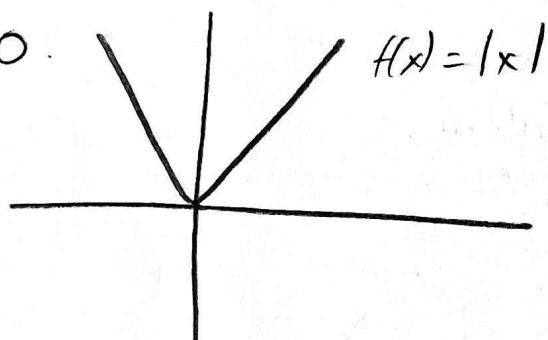
8.



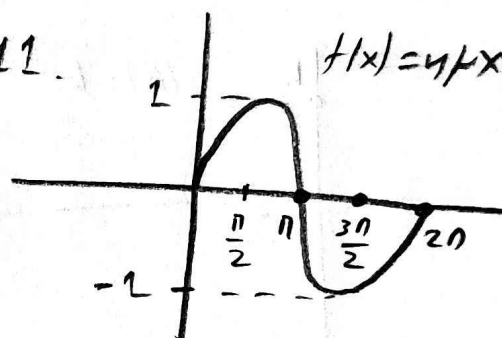
9.



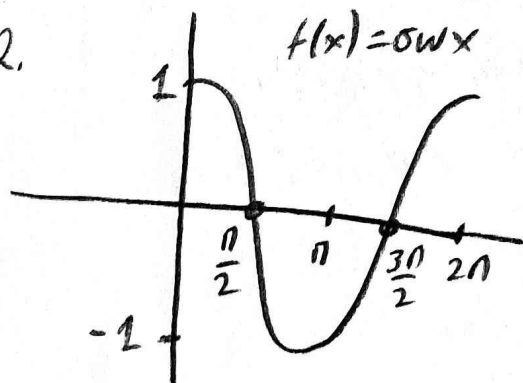
10.



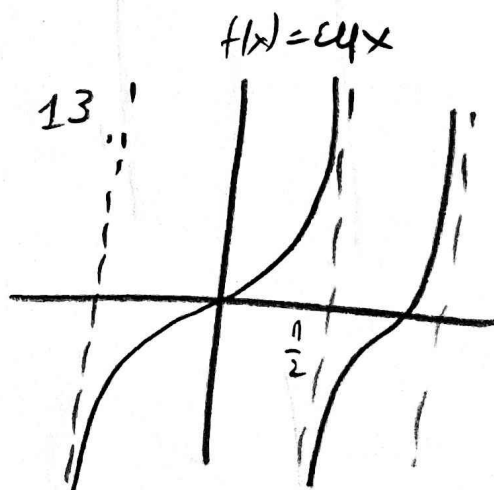
11.



12.



13.



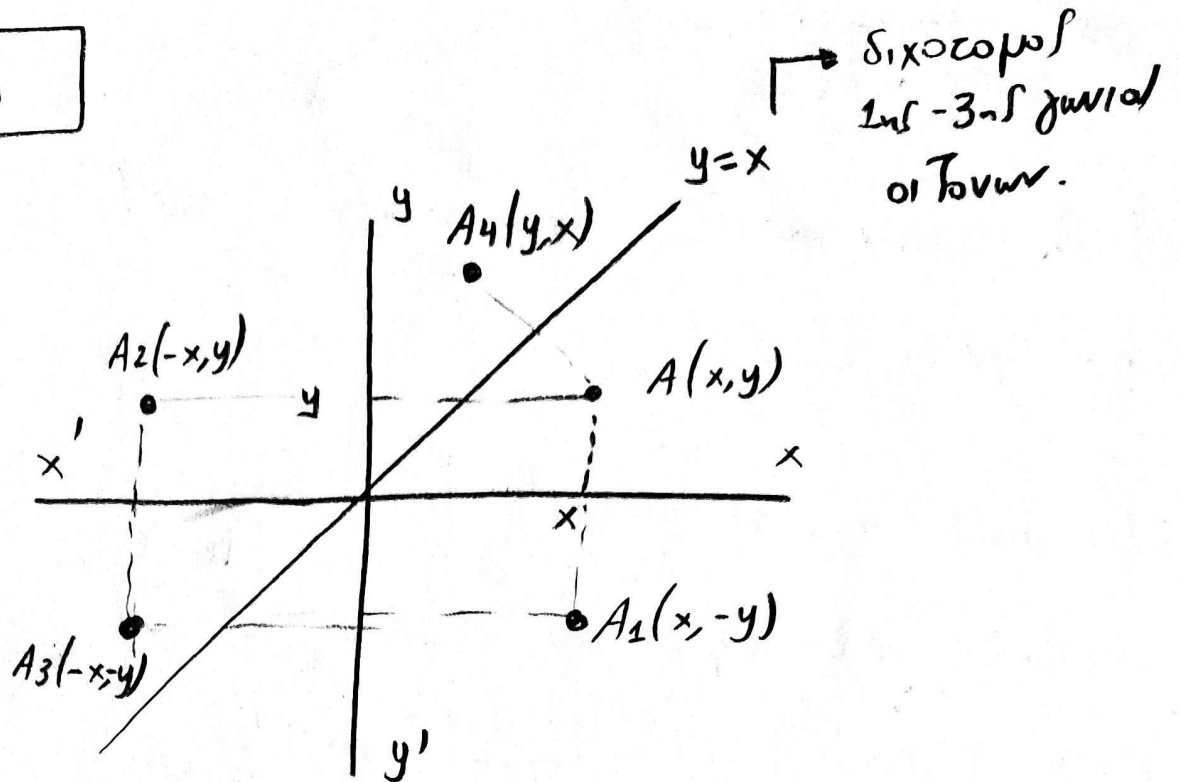
Προσοχή

1. Η $f(x)$ τέμνει τον $x'x$ σε σημείο με τετμημένη $\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$
2. Η $f(x)$ τέμνει τον $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $\alpha \Leftrightarrow f(0) = \alpha$
3. Η $f(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta) \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$.
4. Η $f(x)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow f(0) = 0$.
5. Η ευθεία $\varepsilon \varnothing y = \alpha x + \beta$ σχηματίζει γωνία
i) 45° με τον $x'x \Leftrightarrow \alpha = 1$.
ii) 135° με τον $x'x \Leftrightarrow \alpha = -1$
6. Η ευθεία $\varepsilon \varnothing y = \alpha x + \beta$ είναι παράλληλη
i) στον $x'x \Leftrightarrow \alpha = 0$

7. Η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ είναι παράλληλη στην
ευθεία $\lambda: y = \kappa x + \lambda \Leftrightarrow \alpha = \kappa$.

8. Η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ είναι κάθετη στην
ευθεία $\lambda: y = \kappa x + \lambda \Leftrightarrow \alpha \cdot \kappa = -1$.

Προβολή



Εάν $A(x, y)$ σημείο τότε το συμμετρικό του A ως προς

- ① $x'x$ είναι $A_1(x, -y)$
- ② $y'y$ είναι $A_2(-x, y)$
- ③ αρχή αξόνων είναι $A_3(-x, -y)$
- ④ τμήν $y=x$ είναι $A_4(y, x)$.

Προβολή

Εστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

Η απόσταση $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Προσοχή

1. Όταν θελω να βρω τα σημεία τομής της $f(x)$ με :

- (i) τον x -αξονα λύνω την εξίσωση $f(x)=0$
- (ii) τον y -αξονα βρίσκω το $f(0)$
- (iii) την $g(x)$ λύνω την εξίσωση $f(x)=g(x)$

2. Όταν θελω να βρω τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x)$ να είναι :

- (i) πάνω από τον x -αξονα λύνω την ανίσωση $f(x) > 0$
- (ii) κάτω από τον x -αξονα λύνω την ανίσωση $f(x) < 0$
- (iii) πάνω από την $g(x)$ λύνω την ανίσωση $f(x) > g(x)$
- (iv) κάτω από την $g(x)$ λύνω την ανίσωση $f(x) < g(x)$

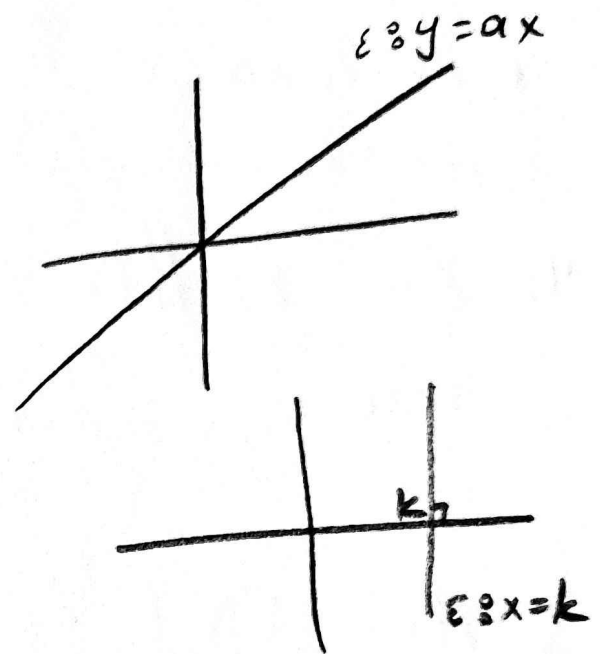
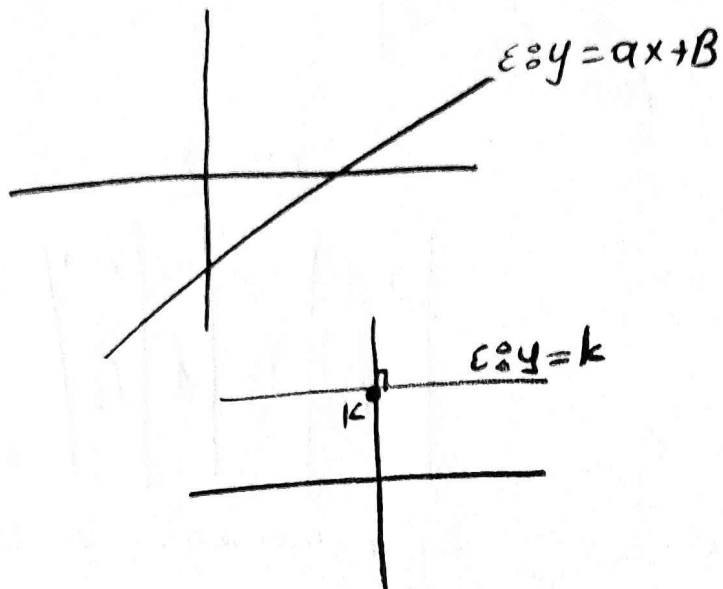
3. Όταν η $f(x)$ διέρχεται από το σημείο

$A(a, b)$ αυτό σημαίνει ότι $f(a)=b$

Ανάλυση Βαλω όπου $x \rightarrow a$ και $f(x) \rightarrow b$.

$$f(x) = ax + B$$

1. Υπάρχουν 4 ειδών ερωτήσεων.



2. Κάθε ερώτηση έχει έναν μοναδικό αριθμό που λέγεται κλίση ή συντελεστή διακρίνουσας.

$$\varepsilon_1: y = ax + B$$

$$\lambda_{\varepsilon_1} = a$$

$$\varepsilon_2: y = ax$$

$$\lambda_{\varepsilon_2} = a$$

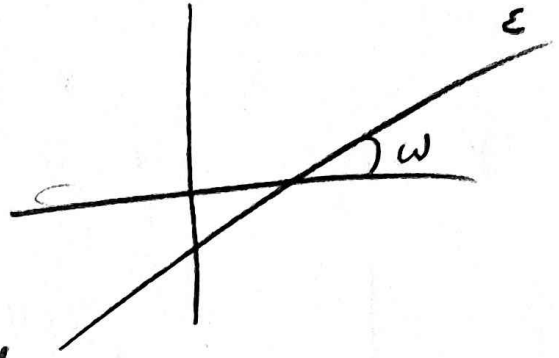
$$\varepsilon_3: y = k$$

$$\lambda_{\varepsilon_3} = 0$$

$$\varepsilon_4: x = k$$

$$\lambda_{\varepsilon_4} = \ominus$$

3. βάθρε ευθεία σχηματίζει μια γωνία με τον $x'x$



- $\epsilon\varphi\hat{\omega} = \lambda_\epsilon$
- Αν $\lambda_\epsilon > 0$ η $\hat{\omega}$ οξεία.
- Αν $\lambda_\epsilon < 0$ η $\hat{\omega}$ αμβλυσία.

4. Αν $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$

τότε $\lambda_{\epsilon_1} = \lambda_{\epsilon_2}$

5. Αν $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$

τότε $\lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon_2} = -1$.

Χρήσιμο

x	30	45	60
$\epsilon\varphi x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Οι παρατηρησιακές
των έχων
αντίθετη $\epsilon\varphi\hat{\omega}$

$$\textcircled{\alpha} \quad D_f = (-\infty, 3]$$

$$\textcircled{\beta} \quad \Sigma T_f = (-\infty, 2]$$

$$\textcircled{\gamma} \quad f \nearrow (-\infty, 0] \text{ και } [1, 3]$$

$$f \searrow [0, 1]$$

$T_0 \quad A(0, 2)$ είναι ολικό μέγιστο

$T_0 \quad B(1, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο

$T_0 \quad \Gamma(3, 1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

$$\textcircled{\delta} \quad f(-2) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0, \quad f(3) = 1.$$

$$\textcircled{\varepsilon} \quad \text{i) } f(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = -2, \quad x = 1.$$

$$\text{ii) } f(x) = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 0$$

$$\text{iii) } f(x) = 3 \quad \text{αδυνατόν.}$$

$$\textcircled{\zeta} \quad \text{i) } f(x) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in (-\infty, -2)$$

$$\text{ii) } 0 \leq f(x) < 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in [-2, 0) \cup (0, 3]$$

⑦ i) $f(x) = a, a \in \mathbb{R}.$

$\forall \alpha < 0$ τότε 1 ρίζα

$\forall \alpha = 0$ τότε 2 ρίζες.

$\forall 0 < \alpha \leq 1$ τότε 3 ρίζες.

$\forall 1 < \alpha < 2$ τότε 2 ρίζες.

$\forall \alpha = 2$ τότε 1 ρίζα.

$\forall \alpha > 2$ τότε καμία ρίζα.

ii). $f(x) = 2x - 4, \alpha > 1.$

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 \quad \text{δηλαδή} \quad 2x - 4 = 1$

Από πριν

$\forall 1 < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 2 \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha \in (1, 2) \quad 1 \text{ ρίζα.}$

$\forall 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2, \quad 2 \text{ ρίζες}$

$\forall 0 < 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 2x - 4 \leq 1$

$0 < 2x - 4 \quad \text{και} \quad 2x - 4 \leq 1$

$4 < 2x$

$2x \leq 5$

$2 < x$

$\alpha \leq \frac{5}{2}$

$\text{δηλαδή} \quad \alpha \in (2, \frac{5}{2}] \quad 3 \text{ ρίζες.}$

$$Av \quad 1 < \lambda < 2 \quad (\Rightarrow) \quad 1 < 2\alpha - 4 < 2$$

$$1 < 2\alpha - 4 \quad \text{και} \quad 2\alpha - 4 < 2$$

$$5 < 2\alpha \quad 2\alpha < 6$$

$$\alpha > \frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \alpha < 3$$

$$\text{Συνολικά} \quad \alpha \in \left(\frac{5}{2}, 3 \right) \quad \text{τότε} \quad 2\pi i \mathcal{A},$$

$$Av \quad \lambda = 2 \quad (\Rightarrow) \quad 2\alpha - 4 = 2 \quad (\Rightarrow) \quad 2\alpha = 6$$

$$\alpha = 3$$

$$\text{τότε} \quad 1 \pi i \mathcal{A}.$$

$$Av \quad \lambda > 2 \quad (\Rightarrow) \quad 2\alpha - 4 > 2 \quad \Rightarrow 2\alpha > 6$$

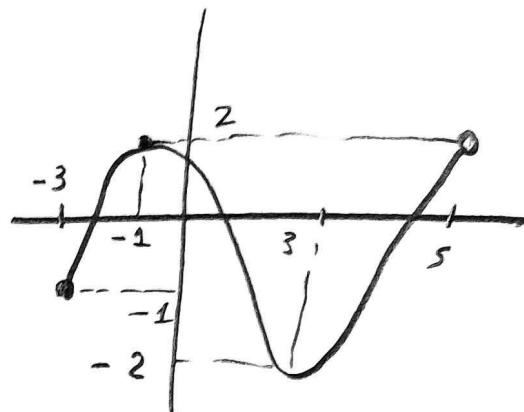
$$\alpha > 3$$

$$\text{και} \quad \pi i \mathcal{A}.$$

Άσκηση 18

Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης $f(x)$ φαίνεται στο διηλεκτικό σχήμα.

Να γραφτεί τα διαστήματα μονotonίας και τα ακρότατα της $f(x)$



Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα $[-3, -1]$ και $[3, 5]$

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 3]$

Το $A(-3, -1)$ είναι τοπικό ελάχιστο

Το $B(-1, 2)$ είναι ολικό μέγιστο

Το $\Gamma(3, -2)$ είναι ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 19

Να μελετηθούν ως προς τη μονotonia οι συναρτήσεις.

α) $f(x) = 2 - \sqrt{5-x}$

πρέπει $5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$ άρα $D_f = (-\infty, 5]$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 5-x_1 > 5-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{5-x_1} > \sqrt{5-x_2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{5-x_1} < -\sqrt{5-x_2}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{5-x_1} < 2 - \sqrt{5-x_2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 5]$

$$\textcircled{B} \quad g(x) = \frac{3}{x} - 6x^4 - \sqrt{x}$$

πριν $x \neq 0$ και $x \geq 0$ από $D_f = (0, +\infty)$.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} &\Leftrightarrow \frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2} \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1^4 > x_2^4 &\Leftrightarrow -6x_1^4 > -6x_2^4 \\ \bullet \quad x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} &\Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \end{aligned} \right\} \textcircled{+}$$

$$\text{από} \quad \frac{3}{x_1} - 6x_1^4 - \sqrt{x_1} > \frac{3}{x_2} - 6x_2^4 - \sqrt{x_2}$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

από $\therefore f$ είναι γρ. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\textcircled{8} \quad f(x) = -2x^4 + 5$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{Отан } x \in (-\infty, 0]$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x_1^4 > x_2^4 \quad (\Leftrightarrow) \quad -2x_1^4 < -2x_2^4$$

$$-2x_1^4 + 5 < -2x_2^4 + 5$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

аға $f \nearrow$ сз $(-\infty, 0]$

$$\text{Отан } x \in [0, +\infty)$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x_1^4 < x_2^4 \quad (\Leftrightarrow) \quad -2x_1^4 > -2x_2^4$$

$$-2x_1^4 + 5 > -2x_2^4 + 5$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

аға $f \searrow$ сз $[0, +\infty)$.

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{6-2x} & , \quad x \leq 1 \\ \frac{3}{x} - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Όταν $x \in (-\infty, 1]$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \quad (\Rightarrow) \quad 6-2x_1 > 6-2x_2 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad \sqrt{6-2x_1} > \sqrt{6-2x_2}$$

$$(\Rightarrow) \quad f(x_1) > f(x_2) \quad f \downarrow$$

Όταν $x \in (1, +\infty)$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{3}{x_1} - 2 > \frac{3}{x_2} - 2$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$f \downarrow$

Αν $x_1 \leq 1 < x_2$

Τότε αφού η $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1]$ και $(1, +\infty)$

Τότε $f(x_1) \geq f(1)$ και $f(1) < f(x_2)$

$$f(x_1) \geq 2 \quad \text{και} \quad 2 > f(x_2)$$

και έστω $x_1 < x_2$ και $f(x_1) > f(x_2)$

$f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 20

Να βρεθούν τα ακρόατα των συναρτήσεων.

α) $f(x) = 5 - 4|x-1|$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Ισχύει ότι $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow -4|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow 5 - 4|x-1| \leq 5$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 5$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή την 5.

$$\text{Άρα } f(x) = 5 \Leftrightarrow 5 - 4|x-1| = 5 \Leftrightarrow -4|x-1| = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Άρα το $A(1, 5)$ είναι μέγιστο της $f(x)$.

β) $g(x) = -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}}$

πρέπει $4-x \geq 0$ και $2 + \sqrt{4-x} \neq 0$
 $x \leq 4$. που είναι!

$$D_g = (-\infty, 4]$$

Ισχύει ότι $\sqrt{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-x} \geq 2$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}} \geq -5 \Leftrightarrow g(x) \geq -5$$

Συνεπώς η C_g έχει ελάχιστη τιμή -5

$$\text{Είναι } g(x) = -5 \quad (\Leftrightarrow) \quad -\frac{10}{2+\sqrt{4-x}} = -5$$

$$(\Leftrightarrow) -10 = -5(2+\sqrt{4-x}) \quad (\Leftrightarrow) 2 = 2+\sqrt{4-x}$$

$$(\Leftrightarrow) 0 = \sqrt{4-x} \quad (\Leftrightarrow) x = 4$$

Το $A(4, -5)$ είναι ολικό ελάχιστο της $g(x)$.

$$\textcircled{\gamma} \quad f(x) = x^2 - 2|x| + 3$$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f(x) = x^2 - 2|x| + 1 + 2 = (|x| - 1)^2 + 2.$$

$$\text{Ισχύει ότι } (|x| - 1)^2 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (|x| - 1)^2 + 2 \geq 2 \\ f(x) \geq 2$$

$$\text{Αρα } f(x) = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad (|x| - 1)^2 + 2 = 2$$

$$(|x| - 1)^2 = 0$$

$$|x| = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

Το $A(1, 2)$ και $B(-1, 2)$ είναι ολικό
ελάχιστο της $f(x)$

$$\textcircled{\delta} \quad g(x) = -2x^2 - 12x + 13$$

Η $g(x)$ είναι τριώνυμο συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και παλινδρομική με ολικό μέγιστο ($a < 0$)

$$\text{Το } A\left(-\frac{B}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{-12}{-4}, -\frac{144 - 4(-2)13}{-8}\right) \Rightarrow A(-3, -5)$$

$$\textcircled{\epsilon} \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x} \quad \text{με } D_f = (0, +\infty)$$

$$f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$$

$$\left[\text{Γνωστή ανισότητα: } x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{για } x > 0 \right]$$

$$\text{Άρα } x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} + 3 \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 5$$

$$f(x) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0$$

$x=1$

Άρα το $A(1, 5)$ ολικό ελάχιστο.

$$\textcircled{3} \quad g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x} \quad \text{στο } (-\infty, 0)$$

$$g(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$\left[\text{Γνωστή ανίσωση: } x + \frac{1}{x} \leq 2 \quad \text{για } x < 0 \right]$$

$$\text{Αρα } x + \frac{1}{x} \leq 2 \quad (\Rightarrow) \quad x + \frac{1}{x} - 1 \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad g(x) \leq 1$$

$$\text{Συνεπώς } g(x) = x - 1 + \frac{1}{x} = 1 \quad (\Rightarrow) \quad x + \frac{1}{x} = 2$$

$$(\Rightarrow) x^2 + 1 = 2x \quad (\Rightarrow) (x-1)^2 = 0 \quad (\Rightarrow) x = 1$$

Το $A(1, 1)$ είναι μέγιστο.

Άσκηση 21

Δίνεται $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3}$. Να η f έχει

ελάχιστο στο $\frac{3}{2}$ και μέγιστο το 2.

Άρκου να $f(x) \geq f(\frac{3}{2})$ και $f(x) \leq 2$.

$$\bullet f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3} \geq \frac{4 \cdot \frac{9}{4} - 4 \cdot \frac{3}{2} + 5}{4 \cdot \frac{9}{4} + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3} \geq \frac{9 - 6 + 5}{9 + 3} \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3} \geq \frac{8}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12(4x^2 - 4x + 5) \geq 8(4x^2 + 3)$$

$$\Leftrightarrow 3(4x^2 - 4x + 5) \geq 2(4x^2 + 3)$$

$$12x^2 - 12x + 15 \geq 8x^2 + 6$$

$$4x^2 - 12x + 9 \geq 0$$

$$(2x - 3)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

$$\bullet f(x) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 5 \leq 8x^2 + 6$$

$$-4x^2 - 4x - 1 \leq 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 \geq 0$$

$$(2x+1)^2 \geq 0 \quad \text{now is true!}$$

Άσκηση 22

Να εξετασθεί ως προς τη μονotonία τη

συνάρτηση $f(x) = -2x^3 - 3x + 5$ και

στα συνεκτικά νδο $f(123) > f(124)$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 5 > -3x_2 + 5 \quad \left. \vphantom{\bullet x_1 < x_2} \right\} \oplus$$

$$-2x_1^3 - 3x_1 + 5 > -2x_2^3 - 3x_2 + 5$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα $f \downarrow$.

$$\text{Το } 123 < 124 \Leftrightarrow f(123) > f(124)$$

από $f \downarrow$

Άσκηση 23

Να μελετηθεί η $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ ως προς τη μονotonία και ότι συνεχώς νδo

για κάθε $x > 1$ είναι $3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x} > 3$

πρην $x \neq 0$ και $x \geq 0$ άρα $D_f = (0, +\infty)$.

$$\left. \begin{aligned} \bullet x_1 < x_2 &\Rightarrow 3x_1^2 < 3x_2^2 \\ \bullet x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \\ \bullet x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{aligned} \right\} \textcircled{+} f \nearrow$$

Αν $x > 1$ τότε $f(x) > f(1)$ άρα $f \nearrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x} > 3$$

Άσκηση 24

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη τμή οποιας
η γραφική παράσταση διέρχεται από
τα $A(1, 4)$ και $B(2, 3)$

α) Να βρεί τη μονotonία τμή $f(x)$

Αφού f γν. μονότονη τότε θα είναι γνησίως
αυξουσα ή γν. φθίνουσα.

$$1 < 2 \text{ όμως } \underset{4}{f(1)} > \underset{3}{f(2)} \text{ άρα } f \downarrow$$

β) Νόο αν $x > 1$ τότε $f(x) < 4$

$$\text{Αν } x > 1 \underset{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 4.$$

γ) Αν η f τέρνη του x 's στο -3 νόο $|f(0)| < 0$

$$\text{Είναι } -3 < 0 \underset{f \downarrow}{\Rightarrow} f(-3) > f(0) \Rightarrow 0 > f(0)$$

δ) Να λυθι η ανίσωση $f(2x-1) < 3$

$$\text{Είναι } f(2x-1) < 3 \underset{f \downarrow}{\Rightarrow} f(2x-1) < f(2) \Rightarrow 2x-1 > 2 \\ 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

Άσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 3$

α) Να δειχθεί ότι f είναι γνησίως αυξανόμενη.

$$\left. \begin{array}{l} \cdot x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \quad x_1^5 < x_2^5 \\ \cdot x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \quad 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \end{array} \right\} \oplus \quad \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ f \nearrow \end{array}$$

β) Να δειχθεί ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$f(1) = 1^5 + 2 \cdot 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0 \quad \text{άρα το 1 ρίζα.}$$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $x^5 + 2x > 3$

$$x^5 + 2x > 3 \quad (\Rightarrow) \quad x^5 + 2x - 3 > 0 \quad (\Rightarrow) \quad f(x) > 0$$

$$f(x) > f(1) \quad (\Rightarrow) \quad x > 1. \quad f \nearrow$$

δ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$

$$f(x) < 0 \quad (\Rightarrow) \quad f(x) < f(1) \quad (\Rightarrow) \quad x < 1. \quad f \nearrow$$

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2 - 3) = 0$

$$f(x^2 - 3) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad f(x^2 - 3) = f(1) \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{x=2} \text{ ή } \boxed{x=-2}$$

Άσκηση 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x} - 1$

(α) Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x)$.

πρέπει $x \neq 0$ και $x \geq 0$ άρα $D_f = (0, +\infty)$.

$$\bullet x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2}$$

$$-\sqrt{x_1} - 1 > -\sqrt{x_2} - 1$$

άρα $f \downarrow$

(β) Υπό ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$\text{Είναι, } f(1) = \frac{2}{1} - \sqrt{1} - 1 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

(γ) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2}{x} < \sqrt{x} + 1$ στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \frac{2}{x} - \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1)$$

$$\text{άρα επειδή } f \downarrow \Leftrightarrow x > 1.$$

(δ) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

Επειδή η f είναι γν. μονοτονία το 1 είναι μοναδική ρίζα.

Άσκηση 27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x-1} - \frac{8}{x^3}$

α) Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x)$

$$\begin{array}{l} \text{πρέπει } x-1 \geq 0 \quad \text{και } x^3 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \quad \quad x \neq 0 \end{array} \quad \left\{ D_f = [1, +\infty) \right.$$

$$\begin{array}{l} \bullet x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1 - 1} < 2\sqrt{x_2 - 1} \end{array} \quad \left. \right] \textcircled{+}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^3} > \frac{1}{x_2^3} \quad \Leftrightarrow -\frac{8}{x_1^3} < -\frac{8}{x_2^3}$$

Άρα $f \nearrow$

β) Να λυθεί η εξίσωση $2\sqrt{x-1} = \frac{x^3+8}{x^3}$

$$\text{Είναι } 2\sqrt{x-1} = \frac{x^3}{x^3} + \frac{8}{x^3} \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 + \frac{8}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} - \frac{8}{x^3} = 1 \quad \Leftrightarrow f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(2)$$

Επειδή η f είναι γρ. μονοτονική είναι

$$x = 2$$

Άσκηση 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$

Να λούσουμε την ανίσωση

$$\frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$$

Λοιπόν, $\frac{4}{x^2+1} - \sqrt{x^2+1} < \frac{4}{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2+2x+5}$

$$f(x^2+1) < f(x^2+2x+5)$$

Μονotonία της $f(x)$

πρέπει $x \neq 0$ και $x \geq 0$ από $D_f = (0, +\infty)$.

$$\bullet x_1 < x_2 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{4}{x_1} > \frac{4}{x_2}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \quad (\Leftrightarrow) \quad -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2}$$

} $\oplus$ $f \downarrow$

Από $f \downarrow$ η ανίσωση γίνεται

$$x^2+1 > x^2+2x+5$$

$$-4 > 2x$$

$$-2 > x$$

Άσκηση 29

Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και
η g είναι γνησίως αύξουσα τότε η
συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως
φθίνουσα.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } f \downarrow \text{ τότε } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \text{Αν } g \uparrow \text{ τότε } x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \\ \qquad \qquad \qquad -g(x_1) > -g(x_2) \end{array} \right\} \textcircled{+}$$

$$f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2)$$

$$h(x_1) > h(x_2)$$

$$\text{αρα } h \downarrow$$

Άσκηση 30

Δίνεται γνησίως φθίνουσα $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α) Νόο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(\alpha) + f(\alpha+5) > f(\alpha+3) + f(\alpha+7)$

Είναι $\alpha < \alpha+3$ άρα $f(\alpha) > f(\alpha+3)$
Είναι $\alpha+5 < \alpha+7$ άρα $f(\alpha+5) > f(\alpha+7)$ } $\oplus$

$$f(\alpha) + f(\alpha+5) > f(\alpha+3) + f(\alpha+7)$$

β) Νόο $f(x^2+1) \leq f(2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ισχύει ότι } (x-1)^2 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad (\Leftrightarrow) \quad f(x^2+1) \leq f(2x)$$

γ) Νόο $f(x^2+6) < f(5x)$ αν $x \in (2, 3)$

Είναι

x	2	3
$x^2 - 5x + 6$	$+0$	-4

άρα $x^2 - 5x + 6 < 0$
αν $x \in (2, 3)$

$$\text{Ενδεώς } x^2 + 6 < 5x \quad \text{αν } x \in (2, 3)$$

$$\text{άρα } f(x^2+6) > f(5x) \quad \text{αν } x \in (2, 3)$$

Άσκηση 31

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$

$$\text{και } g(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Να βρθούν τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων
και ότι συνεχώς υό $7f(x) - 5g(x) \geq 20$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ισχύει ότι } x^2 \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 + 1 \geq 1 \quad (\Rightarrow) \quad \sqrt{x^2 + 1} \geq 1$$

$$(\Rightarrow) 4 + \sqrt{x^2 + 1} \geq 5 \quad (\Rightarrow) f(x) \geq 5$$

$$\text{Επίσης } f(x) = 5 \quad (\Rightarrow) 4 + \sqrt{x^2 + 1} = 5 \quad (\Rightarrow) \sqrt{x^2 + 1} = 1$$

$$(\Rightarrow) x^2 + 1 = 1 \quad (\Rightarrow) x = 0 \quad \text{αρα το } A(0, 5) \text{ ολ. Ελάχιστο.}$$

$$\text{Ισχύει ότι } x^2 \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 + 4 \geq 4 \quad (\Rightarrow) \quad \sqrt{x^2 + 4} \geq 2$$

$$(\Rightarrow) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \leq \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow) \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4}} \leq 3 \quad (\Rightarrow) g(x) \leq 3$$

$$\text{Επίσης } g(x) = 3 \quad (\Rightarrow) \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4}} = 3 \quad (\Rightarrow) 2 = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$(\Rightarrow) 4 = x^2 + 4 \quad (\Rightarrow) x = 0 \quad \text{αρα } B(0, 3) \text{ ολ. μέγιστο.}$$

λογικά ότι $f(x) \geq 5$ και $g(x) \leq 3$

$$\begin{array}{l} \text{αρα} \quad f(a) \geq 5 \quad (\Leftrightarrow) \quad 7f(a) \geq 35 \\ \quad \quad g(b) \leq 3 \quad (\Leftrightarrow) \quad -5g(b) \geq -15 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} f(a) \geq 5 \\ g(b) \leq 3 \end{array}} \right\} \textcircled{+}$$

$$7f(a) - 5g(b) \geq 20$$

Άσκηση 32

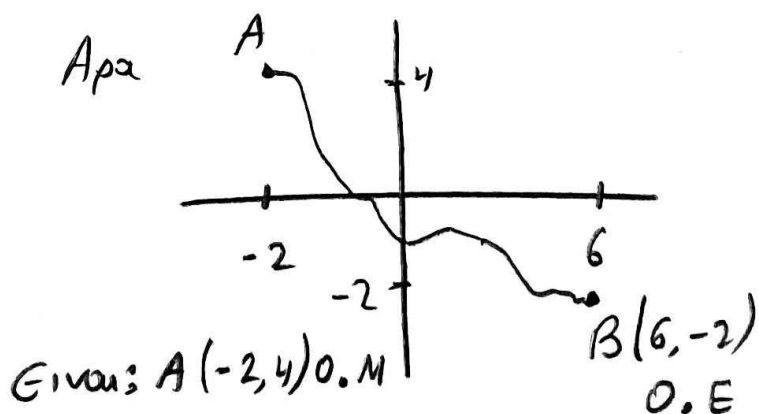
Να βρεις τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{12-2x} - \sqrt{\frac{x+2}{2}}$$

Εδώ δεν είναι μια τυπική περίπτωση εύρεσης ακροσάτων αφού δεν μπορώ να "παίξω" πάνω σε μια ανώτατη που ισχύει για να "χτίσω" την $f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{πρέπει } 12-2x \geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{x+2}{2} \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 6 \geq x \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{array} \right\} D_f = [-2, 6]$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{12-2x_1} > \sqrt{12-2x_2} \\ \cdot x_1 < x_2 \Rightarrow -\sqrt{\frac{x_1+2}{2}} > -\sqrt{\frac{x_2+2}{2}} \end{array} \right\} \nabla$$



$$-2 \leq x \leq 6$$

∇

$$f(-2) > f(x) > f(6)$$

$$4 > f(x) > -2$$

Άσκηση 33

Δίνεται $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

α) Νόο η $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$
και ελάχιστο για $x=-1$

Άρκη νόο $f(-1) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -x^2-1 \leq 2x \leq x^2+1$$

$$\text{οπόω} \quad 0 \leq x^2+2x+1 \quad \text{κόω} \quad 0 \leq x^2+2x+1 \\ 0 \leq (x+1)^2 \quad \quad \quad 0 \leq (x+1)^2$$

β) Νόο η εξίσωση $f(x) = |a|+1$, $a \neq 0$ είναι αδύατη.

Γνωρίζω ότι $f(x) \leq 1$ άρα $|f(x)| < |a|+1$ άρα η εξίσωση αδύατη.

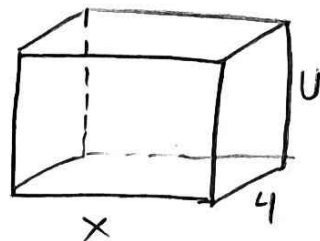
γ) Να λυθώ η εξίσωση $f(x) = (x-1)^2 + 1$

$$\text{Είνα} \quad 0 = \underbrace{(x-1)^2}_{\oplus} + \underbrace{1-f(x)}_{\oplus} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ 1-f(x) = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{x=1}$$

άρα $f(x) \leq 1$

Άσκηση 34

Ένα κουτί σχηματός ορθογωνίου παραλλήλεπipedου ανοιχτό από πάνω έχει όγκο 32 m^3 . και η βάση του έχει σταθερό πλάτος 4 m και μήκος x .
Νόο η ελάχιστη τιμή του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας του κουτιού είναι 48



Γνωρίζου ότι $32 = x \cdot 4 \cdot u$

$$\Rightarrow u = \frac{8}{x}$$

Συνολικό εμβαδόν

$$E = 4x + 2 \cdot 4 \cdot u + 2 \cdot x \cdot u \quad \text{ή} \quad E(x) = 4x + 8 \cdot \frac{8}{x} + 16$$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = 4x + \frac{64}{x} + 16}$$

$$\text{Άρκι νόο} \quad E(x) \geq 48 \quad \Rightarrow \quad 4x + \frac{64}{x} + 16 \geq 48$$

$$x + \frac{16}{x} + 4 \geq 12 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{16}{x} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 16 \geq 8x$$

$$x^2 - 8x + 16 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 \geq 0$$

Συμμετρικές συναρτήσεις

1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται αρτία όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $\exists -x \in A$ και $f(-x) = f(x)$
κάθε αρτία συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$
2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περίττη όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $\exists -x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$
κάθε περίττη συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Προσοχή

1. Αν η f είναι περίττη και $0 \in D_f$ τότε $f(0) = 0$
2. Αν το πεδίο ορισμού της f δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0 δεν είναι ούτε αρτία ούτε περίττη.

Μετατόπιση καρπούλις

1. Η γραφική παράσταση της $f(x)$

$$\text{όπου } f(x) = \varphi(x) + c$$

προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση

της γραφικής παράστασης της $\varphi(x)$

κατά c μονάδες

2. Η γραφική παράσταση της $f(x)$

$$\text{όπου } f(x) = \varphi(x+c)$$

προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση

της γραφικής παράστασης της $\varphi(x)$

κατά c μονάδες/

Άσκηση 35

Να εξετάσεται αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

$$\textcircled{a} \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-|x|}}$$

$$\text{πρέπει } 4-|x| > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad |x| < 4 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in (-4, 4)$$

$$\text{ορα } x \in D_f \text{ και } -x \in D_f$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{4-|-x|}} = \frac{x^2}{\sqrt{4-|x|}} = f(x) \quad \text{άρτια}$$

$$\textcircled{b} \quad g(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 9}$$

$$\text{πρέπει } x^2 - 9 \neq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 \neq 9 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \neq 3 \text{ κ' } x \neq -3$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

$$\text{Αρα αν } x \in D_g \text{ και } -x \in D_g$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 - 9} = \frac{-x^3 + x}{x^2 - 9} = - \frac{x^3 - x}{x^2 - 9} = -g(x)$$

ΠΕΡΙΤΤΗ.

$$\textcircled{7} \quad f(x) = \frac{x-5}{|x|-1}$$

οπότε $|x|-1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

Αρα αν $x \in D_f$ και $-x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{-x-5}{|-x|-1} = -\frac{x+5}{|x|-1} \quad \begin{array}{l} \text{ΟΥΤΕ ΑΡΙΘΜΟΣ} \\ \text{ΟΥΤΕ ΠΡΟΤΙΤΗ} \end{array}$$

$$\textcircled{8} \quad g(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

οπότε $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ οπότε $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι το $3 \in D_g$

οπότε το $-3 \notin D_g$ άρα το D_g δεν

είναι συμμετρικό διαστήμα οπότε η

$f(x)$ δεν είναι ούτε αρτία ούτε περιττή.

$$\textcircled{9} \quad f(x) = x^2 \quad \text{όπου } f: (-3, 4) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Το $(-3, 4)$ δεν είναι συμμετρικό διαστήμα

οπότε το $4 \in D_f$ οπότε το $-4 \notin D_f$ άρα

ΟΥΤΕ ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΥΤΕ ΠΡΟΤΙΤΗ

Άσκηση 36

Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Αν η f είναι αρτία ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό p τότε έχει ρίζα και τον αριθμό $-p$.

Εστω ότι η f είναι αρτία.

Τότε $f(p) = f(-p) = 0$. άρα το $-p$ ρίζα της f .

Αν f περιττή τότε $f(p) = -f(-p)$

οπότε $f(p) = 0$ άρα $-f(-p) = 0$ άρα

το $-p$ ρίζα της f

Άσκηση 37

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αρτία τότε ναι η f δεν είναι γν. μονότονη

Αν f αρτία τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ τέω

$f(a) = f(-a)$. Οπότε $-a < a$ και $f(a) = f(-a)$

Δεν μπορεί η f να είναι γν. μονότονη.

Άσκηση 38

Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ περλιτη και $0 \in A$
τοτε νδο η f διερχεται απο την
αρχη των αξονων.

Αφου f περλιτη ωχου οτι $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Για } x=0 \text{ εχω } f(0) &= -f(0) & (\Rightarrow) 2f(0) &= 0 \\ & & (\Rightarrow) f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 39

Αν η $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περλιτη να υπολογιστει
η παρασταση

$$A = g(g(3) + g(-3))$$

Αφου g περλιτη $g(-3) = -g(3)$

$$\text{Αρα } A = g(g(3) - g(3)) = g(0) = 0$$

Άσκηση 40

Έστω ότι f και g έχουν πεδίο ορισμού το A και είναι περλιττα.

Νδσ η $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x)g(x)$ είναι άρτια.

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = \\ &= f(x)g(x) = h(x) \quad \text{άρτια.} \end{aligned}$$

Άσκηση 41

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy/(x+y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Βρd $f(0)$

$$\text{Για } x=y=0 \quad \text{έχω } f(0) = f(0) + f(0) \quad (\Rightarrow) f(0) = 0$$

β) Νδσ η f περλιττα

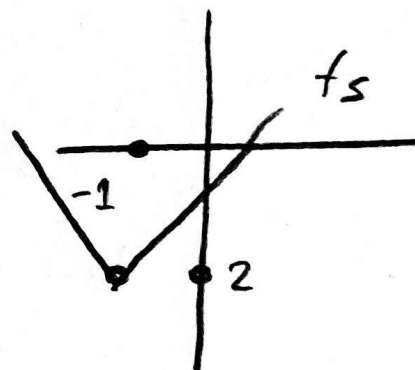
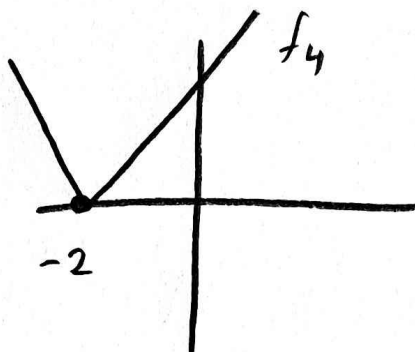
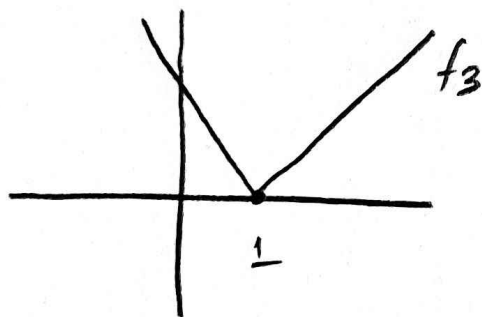
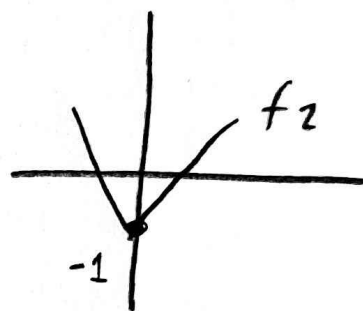
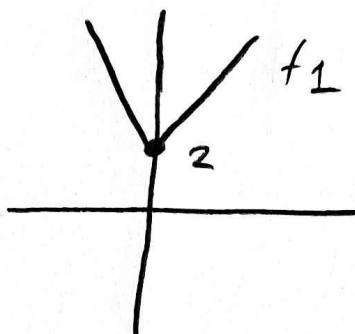
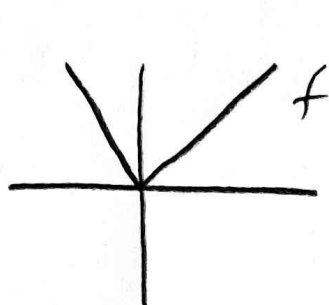
$$\text{Για } y=-x \quad \text{έχω } f(x-x) = f(x) + f(-x) + 3x(-x)/(x-x)$$

$$f(0) = f(x) + f(-x) \quad (\Rightarrow) f(-x) = -f(x)$$

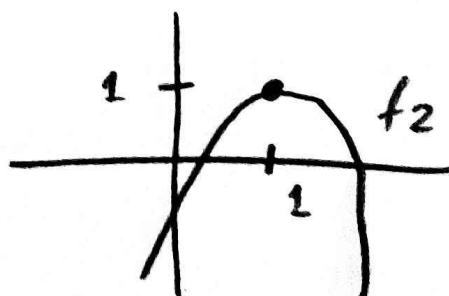
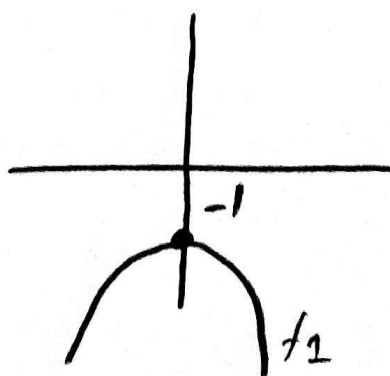
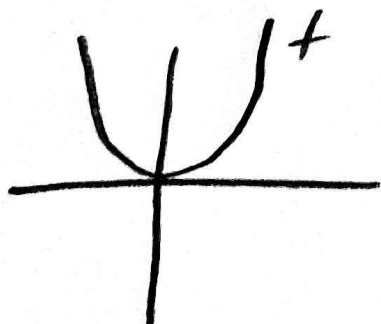
Άσκηση 42

Να σχεδιαστούν οι παρακάτω συναρτήσεις.

α) $f(x) = |x|$, $f_1(x) = |x| + 2$, $f_2(x) = |x| - 1$
 $f_3(x) = |x - 1|$, $f_4(x) = |x + 2|$
 $f_5(x) = |x + 1| - 2$



β) $f(x) = x^2$, $f_1(x) = -x^2 - 1$, $f_2(x) = -(x-1)^2 + 1$



Άσκηση 43

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2$

και $g(x) = 2x^2 - 4x - 6$

- (1) Να η C_g προκύπτει από δύο μετατοπίσεις της C_f και σει συνεχώς να τις σχεδιάσεις

$$\begin{aligned}\text{Είναι } g(x) &= 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 4) = 2(x-1)^2 - 8\end{aligned}$$

Ανέλθω $g(x) = f(x-1) - 8$.

Ανέλθω για να σχεδιάσω την $g(x)$
πρώτα να μετατοπίσω την $f(x)$ κατά
1 δεξιά και κατά 8 κάτω

