



ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1 Να αποδειχθεί ότι $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (10 μ.)

A2 Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

A) Εάν ισχύει ότι $x^2 + y^2 = 0$ τότε $x = 0$ ή $y = 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

B) Δύο πραγματικοί αριθμοί x και y είναι αντίθετοι αν ισχύει ότι $x + y = 0$.

Γ) Εάν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Δ) Ισχύει ότι $a < \beta \Leftrightarrow a^v < \beta^v$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$.

Ε) Εάν $\alpha \leq 0$ τότε $|\alpha| = -\alpha$.

(15 μ.)

ΘΕΜΑ Β

B1 Να παραγοντοποιηθούν οι αλγεβρικές παραστάσεις

A) $9x^2 - 16$ B) $4x^2 - 4x + 1$ Γ) $3x^2 - 6x$ (6 μον.)

B2 Να αποδειχθεί ότι $(x^2 - 2)^2 - x^2(x - 2)(x + 2) = 4$ και στην συνέχεια

να υπολογιστεί η παράσταση $A = 9998^2 - 100^2 \cdot 98 \cdot 102$ (9 μον.)

B3 Να βρεθεί το x ώστε: A) $|x - 1| < 1$ B) $|2x - 3| \geq 1$ Γ) $|3x + 1| = 1$

Δ) $|2x| = |3x - 2|$ (10 μον.)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες

A) $3(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta \geq -2(\alpha + 2\beta)^2$

B) $4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

Γ) Αν $\alpha \leq 2 \leq \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^2 + 2\beta \geq \alpha\beta + 2\alpha$

Δ) Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^9 - \frac{1}{\alpha^2} < \beta^9 - \frac{1}{\beta^2}$ (20 μον.)

Γ2 Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $2x^2 - 6xy + 1 = 2x - 9y^2$ (5 μον.)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ότι $1 < x < 2$ και $1 < y < 3$.

Δ1 Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

A) $2x - 5$ B) $1 - xy$ Γ) $(x + 1)^2 - \frac{x}{y}$ (6 μον.)

Δ2 Να λυθεί η εξίσωση $(x - 3)^3 + x^3 + (3 - 2x)^3 = 0$. (5 μον.)

Δ3 Έστω $0, 3, \frac{3}{2}$ οι λύσεις της εξίσωσης του Δ2.

Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \frac{|2x-5| - |1-xy| + xy}{(x-3)^3 + x^3 + (3-2x)^3}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $A = \frac{2}{3x(2x-3)}$. (8 μον.)

Δ4 Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A \cdot \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 3}{x^2 - x}$ όπου A η αλγεβρική παράσταση του Δ3. (6 μον.)

Καλή επιτυχία!!!

A1 Αναδομή

A2 (a) \wedge (b) Σ (γ) \wedge (δ) \wedge (ε) Σ

B1

(α) $9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$

(β) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

(γ) $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

B2

(α) $(x^2-2)^2 - x^2(x-2)(x+2) =$

$= x^4 - 4x^2 + 4 - x^2(x^2-4) =$

$= \cancel{x^4} - 4x^2 + 4 - \cancel{x^4} + 4x^2 = 4$

Γα $x=100$ εχω $(100^2-2)^2 - 100^2(100-2)(100+2) = 4$

$9998^2 - 100^2 \cdot 98 \cdot 102 = 4$

$A = 4$

B3

(α) $|x-1| < 1$

$\Rightarrow -1 < x-1 < 1$

$\Rightarrow 0 < x < 2$

(β) $|2x-3| > 1$

$\Rightarrow 2x-3 > 1$

$\vee 2x-3 \leq -1$

$2x > 4$

$2x \leq 2$

$x > 2$

$x \leq 1$

$x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

$$\textcircled{\gamma} \quad |3x+1|=1 \quad \Rightarrow \quad 3x+1=1 \quad \vee \quad 3x+1=-1$$

$$3x=0 \quad \quad \quad 3x=-2$$

$$x=0 \quad \quad \quad x=-\frac{2}{3}$$

$$\textcircled{\delta} \quad |2x|=|3x-2|$$

$$2x=3x-2 \quad \vee \quad 2x=-3x+2$$

$$-x=-2 \quad \quad \quad 5x=2$$

$$x=2$$

$$x=\frac{2}{5}$$

ii

$$\textcircled{a} \quad 3(a^2+B^2) + 2aB \geq -2(a+2B)^2$$

$$3a^2 + 3B^2 + 2aB \geq -2(a^2 + 4aB + 4B^2)$$

$$3a^2 + 3B^2 + 2aB \geq -2a^2 - 8aB - 8B^2$$

$$5a^2 + 10aB + 5B^2 \geq 0$$

$$a^2 + 2aB + B^2 \geq 0$$

$$(a+B)^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{b} \quad 4a^2 - 4aB + 2B^2 \geq 0$$

$$2a^2 - 2aB + B^2 \geq 0$$

$$a^2 + a^2 - 2aB + B^2 \geq 0$$

$$a^2 + (a-B)^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$D) \quad \forall a \quad a \leq 2 \leq B \quad \forall \delta \quad a^2 + 2B \geq aB + 2a$$

$$\underbrace{a^2 + 2B - aB - 2a} \geq 0$$

$$a(a-B) - 2(a-2) \geq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} (a-B) & (a-2) \geq 0 \\ \ominus & \ominus \end{array}} \quad \checkmark$$

$$\bullet a \leq 2 \Rightarrow a-2 \leq 0$$

$$\bullet a \leq B \Rightarrow a-B \leq 0$$

$$E) \quad \forall a \quad 0 < a < B \quad \forall \delta \quad a^9 - \frac{1}{a^2} < B^9 - \frac{1}{B^2}$$

$$\bullet a < B \Rightarrow a^9 < B^9$$

$$\bullet a < B \Rightarrow a^2 < B^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{1}{B^2} \Rightarrow -\frac{1}{a^2} < -\frac{1}{B^2}$$

$$\boxed{a^9 - \frac{1}{a^2} < B^9 - \frac{1}{B^2}} \quad \checkmark$$

$$\underline{F_2} \quad 2x^2 - 6xy + 1 = 2x - 9y^2$$

$$2x^2 - 6xy + 1 - 2x + 9y^2 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 6xy + 1 - 2x + 9y^2 = 0$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-3y)^2 + (x-1)^2 = 0$$

$$(x-3y)^2 + (x-1)^2 = 0$$

$$x-3y=0$$

$$\text{atau } x-1=0$$

$$1-3y=0$$

$$x=1$$

$$1=3y$$

$$y = \frac{1}{3}$$

Δ

Ⓐ $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4 \Rightarrow -3 < 2x-5 < -1$

Ⓑ $\left. \begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ 1 < y < 3 \end{array} \right\} \circ \begin{array}{l} 1 < xy < 6 \\ 0 > 1-xy > -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 > -xy > -6 \\ 0 > 1-xy > -5 \end{array}$

Ⓒ $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < x+1 < 3 \Rightarrow 4 < (x+1)^2 < 9$

$\left. \begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ 1 < y < 3 \end{array} \right\} \circ \begin{array}{l} 2 > x > 1 \\ 1 > \frac{1}{y} > \frac{1}{3} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 > \frac{x}{y} > \frac{1}{3} \\ -2 < -\frac{x}{y} < -\frac{1}{3} \end{array} \quad \text{Ⓓ}$

$$2 < (x+1)^2 - \frac{x}{y} < 9 - \frac{1}{3}$$

Δ2

$$(x-3)^3 + x^3 + (3-2x)^3 = 0$$

$$(x-3) + x + (3-2x) =$$

$$= x-3+x+3-2x =$$

$$= 0$$

$$3(x-3)x(3-2x) = 0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

$$x=0$$

$$3-2x=0$$

$$x=\frac{3}{2}$$

Δ3

$$A = \frac{|2x-5| - |1-xy| + xy}{(x-3)^3 + x^3 + (3-2x)^3}$$

Για να ορίσουμε η A πρέπει

$$(x-3)^3 + x^3 + (3-2x)^3 = 0.$$

Πρέπει $x \neq 3$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$.

$$\frac{|2x-5| - |1-xy| + xy}{3(x-3)x(3-2x)} = \frac{5-2x+1-xy+xy}{3x(x-3)(3-2x)}$$

$$= \frac{6-2x}{3x(x-3)(3-2x)} = \frac{-2(\cancel{x-3})}{3x(\cancel{x-3})(3-2x)} = \frac{-2}{3x(3-2x)}$$

$$A = \frac{2}{3x(2x-3)}$$

Q4

$$\frac{-2}{3x(3-2x)} \cdot \frac{2x^3-3x^2-2x+3}{x^2-x} =$$

$$= \frac{-2}{3x(3-2x)} \cdot \frac{x^2(2x-3)-(2x-3)}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{2}{3x(2x-3)} \cdot \frac{(\cancel{2x-3})(x^2-1)}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{2(\cancel{x-1})(x+1)}{3x^2(\cancel{x-1})} = \frac{2x+2}{3x^2}$$