ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

μαθητών
ΕΡΕΙΣΜΑ
φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών.

(8 μονάδες)

Β. Να δώσετε τον ορισμό, πότε δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

(3 μονάδες)

Γ. Να απαντήσετε αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι σωστός ή λάθος:

i. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = 0$.
(1 μονάδα)

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (3 μονάδες)

Δ. Να απαντήσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος:

i. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

ii. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της είναι: $\left(\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to \beta^-} f(x)\right)$.

iii. Μόνο οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις έχουν αντίστροφη συνάρτηση.

iv. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε η $f(x) > 0$ *κοντά στο* x_0.

v. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.

(2x5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[2,+\infty)$. Ισχύουν ότι: $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=1$

και για κάθε $x \geq 2$ $\quad f^2(x)+3=x+2f(x)$.

B1. Να δείξετε ότι $f(3)=2$.

(2 μονάδες)

B2. Να δείξετε ότι $f(x)=1+\sqrt{x-2},\ x\in[2,+\infty)$.

(6 μονάδες)

B3.

a) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (3 μονάδες)

b) Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση: $f(x)=ln a$, 0<α<e. (4 μονάδες)

B4. Έστω $g(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$.

a. Να βρεθεί η gof. (4 μονάδες)

b. Αν Φ=gof να δείξετε ότι η Φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της Φ. (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται $f(x)=\begin{cases} x^5+2x+1, x<0 \\ 1-x-\eta\mu x, 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\end{cases}$

Γ1. Να εξετάσετε τη συνέχεια της f. (3 μονάδες)

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (3 μονάδες)

Γ3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$. (4 μονάδες)

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις: $x_1<0<x_2$.

(5 μονάδες)

Γ5. Αν x_2 είναι η θετική ρίζα του ερωτήματος **Γ4**, να αποδείξετε ότι: για κάθε $x \in (x_2, \frac{\pi}{2}]$ $\quad -\frac{\pi^5}{32} - \pi + 1 \leq f(f(x)) < 1$.

(5 μονάδες)

Γ6. Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = a, \; a \in R$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται f, g συνεχείς συναρτήσεις στο R. Ισχύουν ότι: για κάθε $x \in R$ $f(x) > 0$, επίσης για κάθε $x \in R$ $\quad f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1$, και $\lim_{h \to 0} g(1 + h) = 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

(5 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε το $\lim_{x \to 1} \frac{|f(x) - g(x)| + x^3 g(x) - f(x)}{x - 1}$.

(5 μονάδες)

Δ3. Αν $g(x) = x^2, x \in R$, να βρείτε την $f(x)$.

(5 μονάδες)

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{lnf(x)}{x-1} + \frac{συνx}{x} = 0$ έχει μία ρίζα τουλάχιστον στο διάστημα (0, 1).

(5 μονάδες)

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2) + \frac{1}{f(x^4)} > f(x^4) + \frac{1}{f(x^2)}$.

(5 μονάδες)

Καλή επιτυχία

Θεμα 1ο

Α: ΘΕΤ

Β: Ισοτητα συναρτησεων.

Γ: Αντιπαραδειγμα φ(ιων)

Δ: (α) Λ (β) Λ (γ) Λ (δ) Σ (ε) Λ

Θεμα 2ο

- f συνεχης στο $[2, +\infty)$
- $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1$
- $f^2(x) + 3 = x + 2f(x) \quad \forall x \geq 2$.

Β1: Αφου $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1$ Θετω $g(x) = \frac{f(x)-2}{x-3}$

αρα $\lim_{x \to 3} g(x) = 1$

Επομενως $g(x)(x-3) = f(x) - 2$

$$\boxed{f(x) = g(x)(x-3) + 2}$$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} g(x)(x-3) + 2$ $\qquad f(3) = 2$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$ και αφου f συνεχης.

B2 : $f^2(x)+3 = x+2f(x)$ $\forall x \geq 2$.

$$f^2(x) - 2f(x) = x-3$$

$$f^2(x) - 2f(x)+1 = x-3+1$$

$$(f(x)-1)^2 = x-2$$

$$(f(x)-1)^2 = \sqrt{x-2}^{\,2}$$

$$|\underbrace{f(x)-1}_{g(x)}| = |\sqrt{x-2}|$$

$$|g(x)| = \sqrt{x-2}$$

$$g(x) = \sqrt{x-2}$$

Rizes $g(x)$

$g(x)=0$

$|g(x)|=0$

$\sqrt{x-2}=0$

$\boxed{x=2}$

x	2	
$g(x)$	///0	+

$g(3)=f(3)-1=2-1=1$

Apa $g(x)>0$

$$f(x)-1=\sqrt{x-2}$$

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x-2}+1}$$

B3: ⓐ. $f(x) = 1+\sqrt{x-2}$, $x \geq 2$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2}$

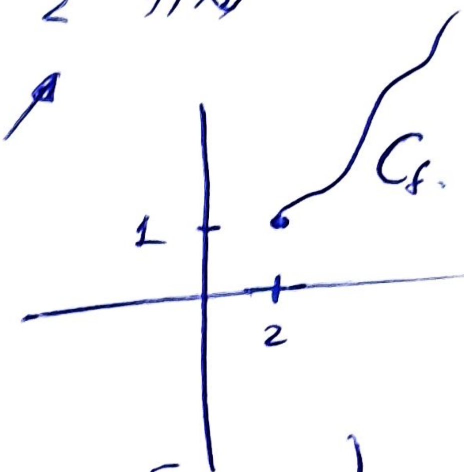
$1+\sqrt{x_1-2} < 1+\sqrt{x_2-2}$

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow$

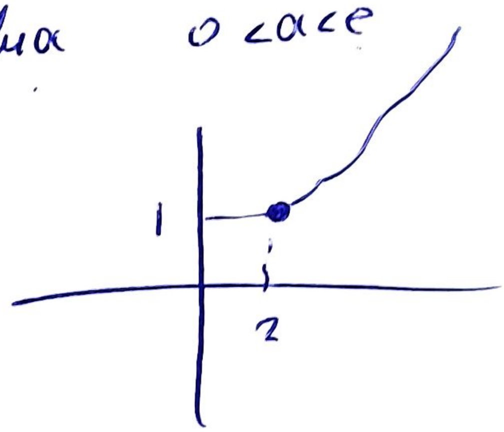
• $f(2) = 1$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\Sigma T_f = [1, +\infty)$.

ⓑ. Πληθος ριζων της $f(x) = \ln\alpha$ $0 < \alpha < e$



Αφου $0 < \alpha < e$

$\ln\alpha < \ln e$

$\ln\alpha < 1$

αρα η εξισωση $f(x) = \ln\alpha$ ειναι αδυνατη.

B4 : Έστω $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ $\quad f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$

(α) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x-2}}$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$\underline{\underline{x \geq 2}}$ $\qquad 1+\sqrt{x-2} \neq 0$ που είναι!

Άρα $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x-2}}$

$D_{g \circ f} = [2, +\infty)$.

(β) $\phi(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x-2}}$ $\qquad D_\phi = [2, +\infty)$.

$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{x_1-2}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{x_2-2}}$

$\Leftrightarrow \cancel{1}+\sqrt{x_2-2} = \cancel{1}+\sqrt{x_1-2} \Rightarrow \sqrt{x_2-2} = \sqrt{x_1-2}$

$\Leftrightarrow x_2 - 2 = x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ $\qquad \phi$ 1-1

ϕ αντιστρ.

Θέτω $\phi(x) = y$

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{x-2}}$$

$$\underline{\underline{y > 0}}$$

$$y\left(1+\sqrt{x-2}\right) = 1$$

$$y + y\sqrt{x-2} = 1$$

$$y\sqrt{x-2} = 1 - y$$

$$\sqrt{x-2} = \frac{1-y}{y}$$

$$\underline{y \neq 0}$$

$$\frac{1-y}{y} \geq 0$$

y		0		1	
$1-y$	$+$		$+$	0	$-$
y	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-y}{y}$	$-$		$+$		$-$

$$\underline{\underline{y \in [0,1]}}$$

$$x - 2 = \left(\frac{1-y}{y}\right)^2$$

$$x = \left(\frac{1-y}{y}\right)^2 + 2$$

Θέτω $x = \phi^{-1}(y)$

$$\phi^{-1}(y) = \left(\frac{1-y}{y}\right)^2 + 2$$

$$\phi^{-1}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + 2$$

$$D_{\phi^{-1}} = (0,1].$$

Τέλος

$x \geq 2$

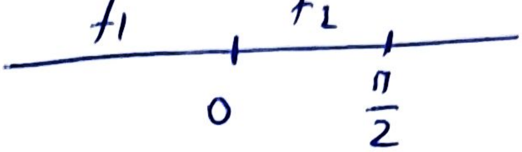
$$\left(\frac{1-y}{y}\right)^2 + \cancel{2} \geq \cancel{2}$$

$$\left(\frac{1-y}{y}\right)^2 \geq 0$$

που ισχύει!

Θεμα Γ

Γ1: $f(x) = \begin{cases} x^5+2x+1, & x<0 \\ 1-x-ημx, & 0 \le x \le \frac{π}{2} \end{cases}$



- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^5+2x+1) = 1$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1-x-ημx) = 1$

Άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ και $f(0) = 1$

Άρα συνεχής στο 0!

Είναι συνεχής και στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \frac{π}{2}]$

ως π.σ.σ συνεχής συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Γ2:

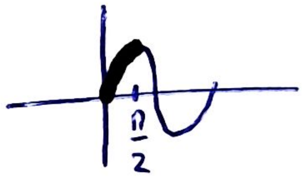
$x<0$

$f_1(x) = x^5+2x+1$

- $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$
- $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1+1 < 2x_2+1$ $\Big\}(+)$

$f(x_1)<f(x_2)$

$f \nearrow$



$0 \le x \le \frac{π}{2}$

$f_2(x) = 1-x-ημx$

- $x_1<x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2$ $(+)$
- $x_1<x_2$ $ημx_1 < ημx_2$

$-ημx_1 > -ημx_2$

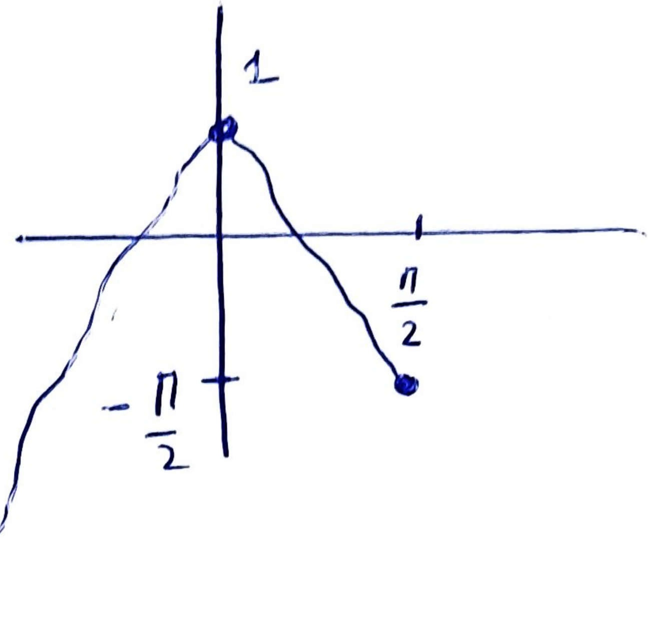
$f \downarrow$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^5+2x+1 =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1-\frac{\pi}{2}-\eta\mu\frac{\pi}{2} =$$

$$= 1-\frac{\pi}{2}-1 = -\frac{\pi}{2}$$



$$\Sigma T_f = (-\infty, 1]$$

Γ3: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$ Το όριο δεν υπάρχει.

• $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^5+2x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^5+2x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x^4+2)}{\cancel{x}} = 2$$

• $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-x-\eta\mu x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x-\eta\mu x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x} = -1-1 = -2$$

Γ4 :

$x < 0$

• f συνεχής

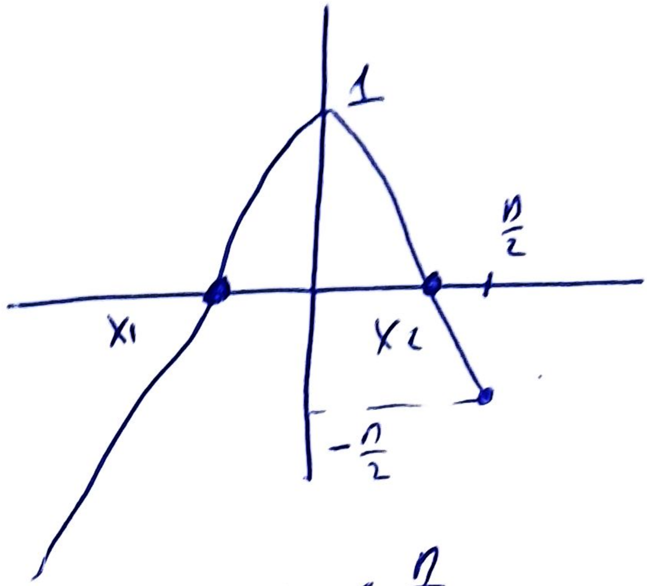
• $f \nearrow$

• $\Sigma T f = (-\infty, 1)$

Το $0 \in \Sigma T f$

άρα $\exists!\ x_1 < 0$

τ.ω $f(x_1) = 0$



$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

• f συνεχής

• $f \searrow$

• $\Sigma T f = [-\frac{\pi}{2}, 1]$

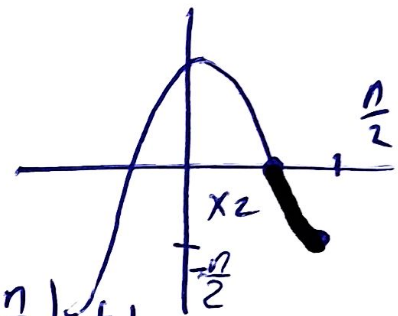
Το $0 \in \Sigma T f$ άρα

$\exists!\ x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

τ.ω $f(x_2) = 0$.

Γ5 : Νδο $\forall x \in (x_2, \frac{\pi}{2}]$

$$-\frac{\pi^5}{32} - \pi + 1 \le f(f(x)) < 1.$$



Παρατηρώ ότι $f(-\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2})^5 + 2(-\frac{\pi}{2}) + 1$

$$f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^5}{32} - \pi + 1$$

Άρα αρκεί νδο $f(-\frac{\pi}{2}) \le f(f(x)) < f(0)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq f(f(x)) < f(0)$$

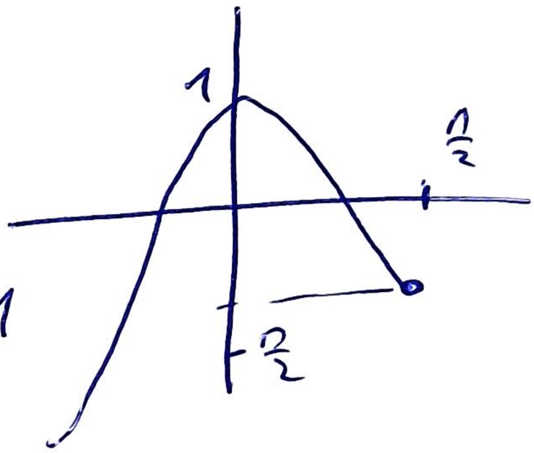
Όταν $x \in \left(x_2, \frac{\pi}{2}\right)$ η $-\frac{\pi}{2} < f(x) < 0$

Στα αρχικά

η $f \nearrow$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < f(f(x)) < f(0)$$

Γ6: $f(x) = a$



1. Αν $a < -\frac{\pi}{2}$ 1 ρίζα
2. Αν $-\frac{\pi}{2} \leq a < 0$ 2 ρίζες
3. Αν $a = 1$ 1 ρίζα
4. Αν $a > 1$ 0 ρίζα.

Θέμα Δ

- $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{h \to 0} g(1+h) = 1$.

Δ1: $f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) = g^2(x) + 2x^2 + 1$

$$\left(f(x) - g(x)\right)^2 = g^2(x) + 2x^2 + 1$$

$$\left(f(x) - g(x)\right)^2 = \sqrt{g^2(x)+2x^2+1}^{\,2}$$

$$|f(x) - g(x)| = \left|\sqrt{g^2(x)+2x^2+1}\right|$$

$$|h(x)| = \sqrt{g^2(x)+2x^2+1}$$

Ρίζες $h(x)$

$h(x) = 0$.

$|h(x)| = 0$

$\sqrt{g^2(x)+2x^2+1} = 0$

Αδύνατη

$\left.\begin{array}{l} h(x) \neq 0 \\ h(x) \text{ συνεχής} \end{array}\right\} h(x) > 0$ ή $h(x) < 0$

$$\lim_{h\to 0} g(1+h) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = 1$$

g συνεχής

$g(1) = 1$

Θέτω $1+h = x$

$h \to 0$

$x \to 1$

Άρα $h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - 1 = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow h(x) > 0$

$$\boxed{f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1}$$

$f^2(1) - 2f(1)g(1) = 3$

$f^2(1) - 2f(1) - 3 = 0$

$f(1) = 3$ ή $\cancel{f(1) = -1}$

$f(x) > 0$

Δ2: $$\lim_{x\to 1} \frac{|\overset{\oplus}{f(x)-g(x)}|+x^3 g(x)-f(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{f(x)}-g(x)+x^3 g(x)-\cancel{f(x)}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{g(x)(x^3-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= 1\cdot 3 = 3.$$

Δ3: $f^2(x)-2f(x)x^2 = 2x^2+1$

$$f^2(x)-2f(x)x^2+x^4 = x^4+2x^2+1$$

$$\left(f(x)-x^2\right)^2 = \left(x^2+1\right)^2$$

$$|f(x)-x^2| = |\overset{\oplus}{x^2+1}|$$

$$|\overset{\oplus}{\varphi(x)}| = x^2+1 \Rightarrow \varphi(x)=x^2+1 \Rightarrow f(x)=2x^2+1$$

Ρίζα $\varphi(x)$

$\varphi(x)=0$

$|\varphi(x)|=0$

$x^2+1=0$ άτοπο

$\left.\begin{matrix} \varphi(x)\neq 0 \\ \varphi(x) \text{ συνεχής} \end{matrix}\right\}$ $\varphi(x)>0$ ή $\varphi(x)<0$

$\varphi(1)=f(1)-1=3-1=2.$

Δ4 : $$\frac{\ln f(x)}{x-1} + \frac{\text{συν}x}{x} = 0 \qquad (0,1).$$

$$\underbrace{x \ln f(x) + (x-1)\,\text{συν}x}_{h(x)} = 0$$

Η h συνεχής στο $[0,1]$ ως π.σ.σ.

$h(0) = -\text{συν}0 = -1$

$h(1) = \ln f(1) = \ln 3 > 0$

$h(0)h(1) < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $h(\xi) = 0$,

$$\frac{\ln f(\xi)}{\xi - 1} + \frac{\text{συν}\,\xi}{\xi} = 0 \qquad \xi \in (0,1).$$

Δ5 : $f(x^2) + \frac{1}{f(x^4)} > f(x^4) + \frac{1}{f(x^2)}$

$$f(x^2) - \frac{1}{f(x^2)} > f(x^4) - \frac{1}{f(x^4)}$$

$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{1}{x} \quad D_\varphi = (0, +\infty)}$

Αφου μεσα στην $\varphi(x)$ μπαινει η $f(x) > 0$

$$\varphi(f(x^2)) > \varphi(f(x^4))$$

$\varphi \nearrow$

$$f(x^2) > f(x^4)$$

$f \nearrow$

$x^2 > x^4$

$1 > x^2$

$\underline{\underline{x \in (-1, 1)}}$

Μονοτονια $f(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1^2 + 1 < 2x_2^2 + 1$

  $f(x_1) < f(x_2)$ $\quad D_f = (0, +\infty)$.

Μονοτονια $\varphi(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$

$+$

$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ $\quad \varphi \nearrow$.