Θεμα 1

- $f(x) = \ln x + 1 \qquad D_f = (0, +\infty)$
- $g(x) = \dfrac{\alpha - 1}{x}$
- $g(1) = 1 \iff \dfrac{\alpha-1}{1} = 1 \iff \alpha - 1 = 1 \iff \alpha = 2$ αρα $g(x) = \dfrac{1}{x}$
  $D_g = \mathbb{R}^*$

(α) Βρειτε τα x ωστε η C_g να ειναι πανω

απο την ευθ $y = 1$

$$g(x) > 1 \iff \frac{1}{x} > 1 \iff \frac{1}{x} - 1 > 0 \iff \frac{1-x}{x} > 0$$

x		0		1	
$1-x$	+	‖	+	0	−
x	−	‖	+		+
$\frac{1-x}{x}$	−	‖	+		−

Οταν $x \in (0, 1)$ η C_g πανω ε.

(β) Σχετικη θεση

$$f(x) = g(x) \iff \ln x + 1 = \frac{1}{x} \iff \underbrace{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}_{L(x)} = 0$$

$$L(x) = 0 \iff L(x) = L(1)$$

L 1-1

$\boxed{x = 1}$

Μονοτονια

$$L'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

$L \nearrow \Rightarrow L$ 1-1

Όταν $x<1 \Rightarrow L(x) < L(1) \Leftrightarrow f(x)-g(x) < 0$

$\Rightarrow f(x) < g(x)$

Όταν $x>1 \Rightarrow f(x) > g(x)$.

(γ) $h = g \circ f$.

$$h(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\ln x + 1}$$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ $\qquad D_h = (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$.

$x > 0$ $\qquad \ln x + 1 \neq 0$

$\ln x \neq -1$

$x \neq e^{-1} \quad \Rightarrow x \neq \frac{1}{e}$

(δ) $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x_1 + 1} = \dfrac{1}{\ln x_2 + 1}$

$\Leftrightarrow \ln x_1 + 1 = \ln x_2 + 1 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

h είναι 1-1 άρα αντιστρέψιμη.

Εύρεση αντίστροφης

$y = h(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\ln x + 1} \Leftrightarrow \ln x + 1 = \dfrac{1}{y}$ $\quad y \neq 0$

$\ln x = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{y} - 1}$

$$h^{-1}(x) = e^{\frac{1}{x} - 1}$$

$$D_{h^{-1}} = \mathbb{R}^*.$$

Θεμα 2

• $f(x) = \frac{ax+3}{x-1}$ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

• $f(2) = 5 \Leftrightarrow \frac{2a+3}{1} = 5 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

ⓐ νδο f αντιστρεφεται

Εστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+3}{x_1-1} = \frac{x_2+3}{x_2-1}$

$\Leftrightarrow (x_1+3)(x_2-1) = (x_2+3)(x_1-1)$

$\cancel{x_1x_2} - x_1 + 3x_2 - \cancel{3} = \cancel{x_1x_2} - x_2 + 3x_1 - \cancel{3}$

$4x_2 = 4x_1$

$x_1 = x_2$

Αφου f οι 1-1 αντιστρεφεται.

ⓑ νδο f και f^{-1} ειναι ισες.

$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x+3 \Leftrightarrow yx - y = x+3$

$yx - x = y+3$

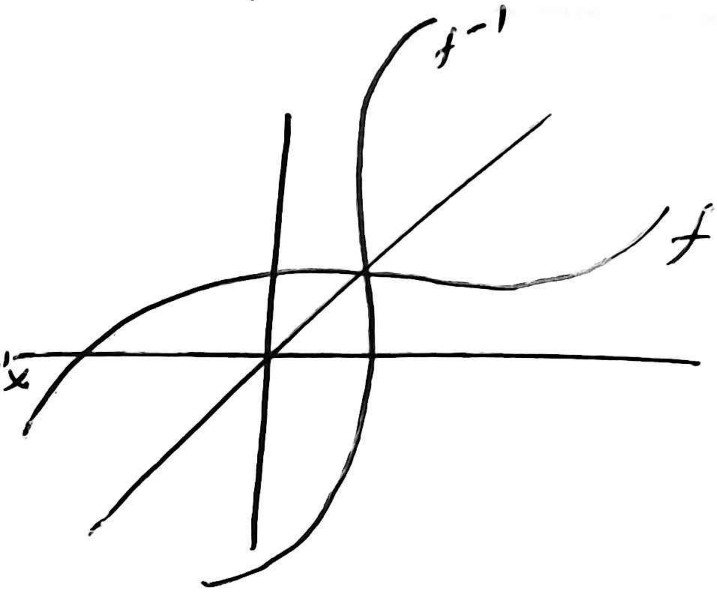
$x(y-1) = y+3$

$x = \frac{y+3}{y-1}$, $y \neq 1$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-1} \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{1\}}$

Ισες.

(γ). κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ με τον άξονα συμμετρ. τους.



Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τον x'x

Άρα $f(x)=x$, $f^{-1}(x)=x$ ισοδύναμες.

$$\frac{x+3}{x-1}=x \iff x+3=x^2-x \iff x^2-2x-3=0$$

$x=3$ $\quad x=-1$

$A(3,3)$ $\quad B(-1,-1)$

(δ). κυρτότητα $f(x)$.

$$f'(x)=\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{4\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3}$$

x		1	
f''	$-$	‖	$+$
f	∩	‖	∪

Θεμα 3

- $f(x) = \ln x \,, \quad D_f = (0, +\infty)$
- $g(x) = \sqrt{1-x} \quad D_g = (-\infty, 1]$

ⓐ Βρειτε $h = f - g$ και $\varphi = g \circ f$.

$h(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$

$D_h = D_f \cap D_g = (0, 1]$

$\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - \ln x}$

πρεπει $\quad x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$x > 0$ και $\ln x \leq 1$ $\quad D_\varphi = (0, e]$

$x \leq e$

ⓑ Ν.δ.ο φ αντιστρεφεται και να βρω φ^{-1}

- $x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - \ln x_1 > 1 - \ln x_2 \Rightarrow \sqrt{1 - \ln x_1} > \sqrt{1 - \ln x_2}$

$f(x_1) > f(x_2)$

αρα $f \downarrow$ αρα αντιστρεφεται

Εστω $y = \sqrt{1 - \ln x} \quad y \geq 0$

$y^2 = 1 - \ln x$

$\ln x = 1 - y^2$

$x = e^{1-y^2}$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi^{-1}(x) = e^{1-x^2} \\ D_{\varphi^{-1}} = [0, +\infty)\end{gathered}}$$

(γ) Λύσο η $\varphi^{-1} \downarrow$.

Έστω $\varphi^{-1}(x_1) < \varphi^{-1}(x_2)$

$$\varphi \downarrow$$

$$\varphi(\varphi^{-1}(x_1)) > \varphi(\varphi^{-1}(x_2))$$

$$x_1 > x_2$$

άρα $\varphi^{-1} \downarrow$

(δ) εξίσωση $\ln \varepsilon\varphi x = \sqrt{1-\eta\mu x} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\ln \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{1-\eta\mu x} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\ln \eta\mu x - \ln \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1-\eta\mu x} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\ln \eta\mu x - \sqrt{1-\eta\mu x} = \ln \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

$$h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x)$$

h 1-1

$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$

<u>Μονοτονία h</u>

$h(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$ $\quad D_h = (0, 1]$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$$

$h \nearrow$ άρα 1-1.

Θεμα 4

• $f(x)=x^3+x-10$

(α) Εφαπτομενη στο $x_0=2$

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)$ $\Leftrightarrow y-0=13(x-2)$

$\boxed{y=13x-26}$

• $f(2)=2^3+2-10=0$

• $f'(x)=3x^2+1>0$ $\quad f \nearrow$

• $f'(2)=13$

(β) Μονοτονια - κυρτοτητα.

$f'(x)=3x^2+1>0 \Leftrightarrow f \nearrow$

$f''(x)=6x$

$\to 6x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

x		0	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

$A(0,-10)$ Σ.Κ.

(γ) Ανισωση $x>\frac{10}{x^2+1}$.

$x^3+x>10$

$x^3+x-10>0$

$f(x)>0$

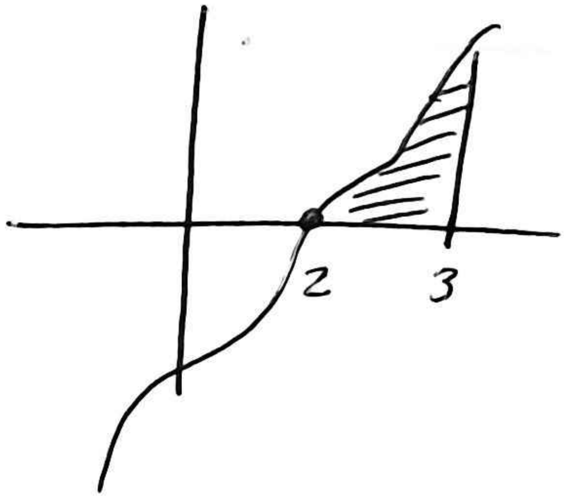
$f(x)>f(2)$

$f \nearrow$

$x>2$

⑤ $E: C_f,\ x'x,\ x=3$

$$E=\int_2^3 |f(x)|\,dx \overset{(*)}{=}$$



P,TM $f(x)$

$f(x)=0$

$f(x)=f(2)$

f: 1-1

$\underline{\underline{x=2}}$

$$\overset{(*)}{=}\int_2^3 x^3+x-10\ dx =$$

$$=\int_2^3 x^3\,dx+\int_2^3 x\,dx-\int_2^3 10\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^4\right)_2^3+\frac{1}{2}\left(x^2\right)_2^3-10\left(x\right)_2^3$$

$$=\frac{1}{4}(81-16)+\frac{1}{2}(9-4)-10$$

$$=\frac{65}{4}+\frac{5}{2}-10=\frac{65}{4}+\frac{10}{4}-\frac{40}{4}=$$

$$=\frac{35}{4}.$$

Θεμα 5

• $f(x) = (x-1)e^x \quad D_f = \mathbb{R}$.

(α) Μονοτονία.

$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = e^x(1+x-1) = xe^x$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$.

x		0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

(β) Νδο $f(x) \geq -1$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq -1$. $\forall x \in \mathbb{R}$

(γ). $f''(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

x		-1	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

$A\left(-1, -\frac{2}{e^2}\right)$.

$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$

$\boxed{y + \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x+1)}$

(5) E: $(f, x'x, y'y, x=1$

$$E=\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 |(x-1)e^x|\,dx=-\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$$

$$E=-\int_0^1 (x-1)(e^x)'\,dx=-\left[\left((x-1)e^x\right)_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\right]$$

$$E=-\left[+1-(e^x)_0^1\right]=-1+(e-1)=-1+e-1$$

$$=e-2$$

Θεμα 6

• $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

(α) Μονοτονια.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$\longrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0$ $x = 2$

x		0		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(β) Ανισωση $f(3+x^2) > f(2+2x^2)$.

• $3+x^2 > 2$

• $2+2x^2 > 2$

$\Big\}$ Στο $(2, +\infty)$ η $f \nearrow$

$3+x^2 > 2+2x^2$

$0 > x^2 - 1$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in (-1, 1)$.

(γ). κυρτοτητα στο Σημειο καμπης.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

x		1	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - (-1) = -3(x-1)$

$y + 1 = -3x + 3$

$\underline{\underline{y = -3x + 2}}$

(δ) $\int_{-1}^{0} f(x+1)\,dx = \int_{0}^{1} f(t)\,dt =$

$x + 1 = t$

$1 \cdot dx = 1 \cdot dt$

$x = 0 \quad t = 1$

$x = -1 \quad t = 0$

$= \int_0^1 t^3 - 3t^2 + 1\,dt =$

$= \frac{1}{4}\left(t^4\right)_0^1 - \left(t^3\right)_0^1 + \left(t\right)_0^1 =$

$= \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}.$

Θέμα 7

• $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

(α) Μονοτονία $f(x)$

$$f'(x)=\frac{2xe^x-(x^2+1)e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2-1}{e^x}=\frac{-(x-1)^2}{e^x}\le 0$$

$f\downarrow$

(β). Ανίσωση $x^2+1>e^x$

$$\frac{x^2+1}{e^x}>1 \Leftrightarrow f(x)>1 \Rightarrow f(x)>f(0)$$

$f\downarrow$

$\underline{\underline{x<0}}$

(γ) εξίσωση $\ln(x^2+1)=x$.

$$x^2+1=e^x$$

$$\frac{x^2+1}{e^x}=1 \Leftrightarrow f(x)=f(0)$$

f 1-1

$\underline{\underline{x=0}}$

(8) Νδο f αντιστρέφεται και $D_{f^{-1}}$

Αφού $f \downarrow \Rightarrow f$ 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} (x^2+1) \frac{1}{e^x} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

$$\Sigma T_f = (0, +\infty)$$

$$D_{f^{-1}} = (0, +\infty).$$

Θεμα 8

- $f(x) = x^5 + 2x - 3$

ⓐ Νδο f αντιστρεψιμη και $D_{f^{-1}}$

$f'(x) = 5x^4 + 2 > 0 \Rightarrow f \nearrow$ αρα αντιστρεψιμη

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 + 2x - 3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 + 2x - 3 = +\infty$

$\Sigma T_f = \mathbb{R}$ αρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

ⓑ $f(2x-1) + 3 - 2x > x^5$

$f(2x-1) > x^5 + 2x - 3$

$f(2x-1) > f(x)$

$f \nearrow$

$2x - 1 > x$

$x > 1.$

(8) $f(1+f^{-1}(x^2-7x))=-3$

$$f(1+f^{-1}(x^2-7x))=f(0)$$

$$f(3)-1$$

$$1+f^{-1}(x^2-7x)=0$$

$$f^{-1}(x^2-7x)=-1$$

$$f(f^{-1}(x^2-7x))=f(-1)$$

$$x^2-7x=-6$$

$$x^2-7x+6=0$$

$$x=1 \qquad x=6.$$

(8) $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt =$

$\ln x = t$

$\frac{1}{x}dx = dt$

$$=\int_0^1 t^5+2t-3 \quad dt$$

$$=\frac{1}{6}(t^6)_0^1+(t^2)_0^1-3(t)_0^1$$

$$=\frac{1}{6}+1-3 \quad =\frac{1}{6}-2$$

Θεμα 9

• $f(x) = \ln(x-1)$ $\qquad D_f = (1, +\infty)$

• $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad D_g = \mathbb{R}^*$

(α) $h = f \circ g$,

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \neq 0$ $\qquad \frac{1}{x} > 1 \iff \frac{1-x}{x} > 0$

x		0		1	
$1-x$	+		+	0	−
x	−	0	+		+
$\frac{1-x}{x}$	−		+		−

$x \in (0,1)$.

$D_h = (0,1)$

(β) Ν.δ.ο h 1-1

$h(x_1) = h(x_2) \iff \ln\left(\frac{1-x_1}{x_1}\right) = \ln\left(\frac{1-x_2}{x_2}\right)$

$\frac{1-x_1}{x_1} = \frac{1-x_2}{x_2}$ $\qquad \iff (1-x_1)x_2 = (1-x_2)x_1$

$x_2 - x_1x_2 = x_1 - x_1x_2 \iff x_1 = x_2$.

(γ). Αφού h 1-1 αντιστρέψιμη

$h(x)=y \Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \Leftrightarrow e^y=\frac{1-x}{x}$

$\Leftrightarrow e^y x = 1-x \Leftrightarrow x+e^y x=1 \Leftrightarrow x(1+e^y)=1$

$x=\frac{1}{1+e^y}$ πρέπει $1+e^y\neq 0$ που ισχύει.

$h^{-1}(x)=\frac{1}{1+e^x}$

$D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$.

(δ). $\int_0^1 e^x h^{-1}(x)\,dx=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$=\left[\ln(1+e^x)\right]_0^1=\ln(e+1)-\ln 2=$

$=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

Θεμα 10

• $f(x) = x\ln x - x + 3$ $\qquad D_f = (0, +\infty)$

(α) $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

$f'(x) = \ln x.$

$\longrightarrow \ln x = 0 \iff x = 1$

x		1	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

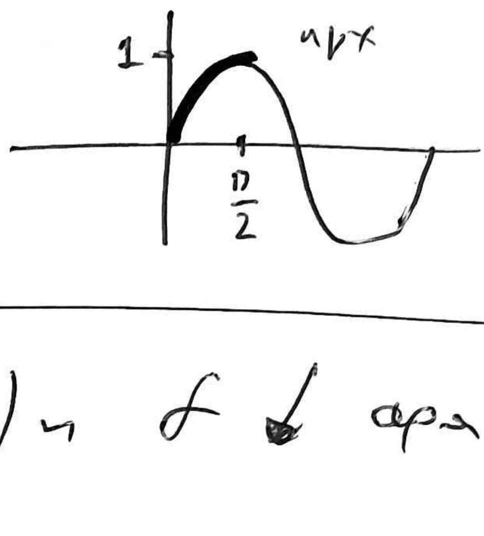
$f(x) \geq f(1)$

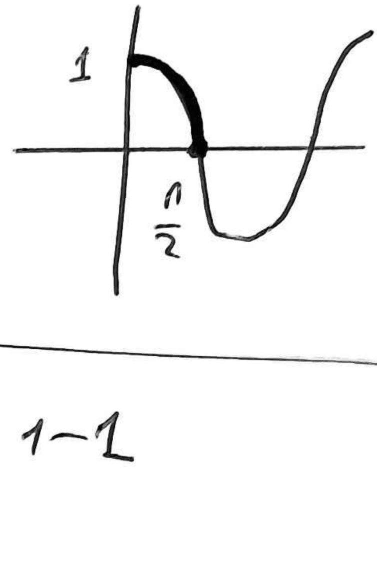
$f(x) \geq 2.$

(β) $\longrightarrow$

(γ) $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$. στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ το $\eta\mu x \in (0,1)$ και $\sigma\upsilon\nu x \in (0,1)$.





Στο $(0,1)$ η f ↘ άρα 1–1

$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1$

$\varepsilon\varphi x = 1$ $\qquad x = \frac{\pi}{4}.$

(8) $f(x) = x\ln x - x + 3$, $x > 0$

$f'(x) = \ln x$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ αρα f κυρτη.

Οταν η $f(x)$ ειναι κυρτη, η $f(x)$ ειναι πανω απο οποιαδηποτε εφαπτομενη στο τυχαιο $x_0 \in D_f$. εκτος του σημειου επαφης.

Δηλ $f(x) \geq \alpha x + \beta$

με το "=" για $x = x_0$.