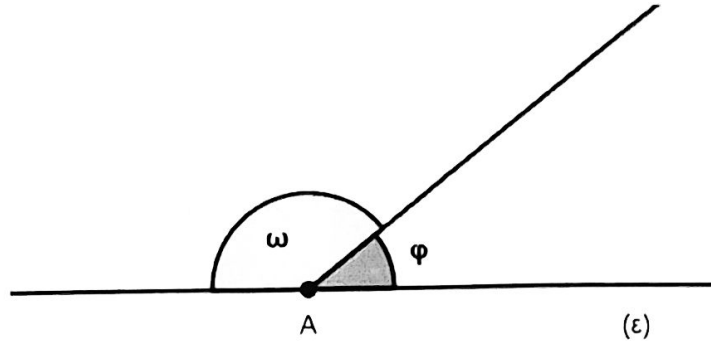


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω .

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad \eta\mu^2\varphi + \sigma\omega^2\varphi = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\omega^2\varphi = 1$$

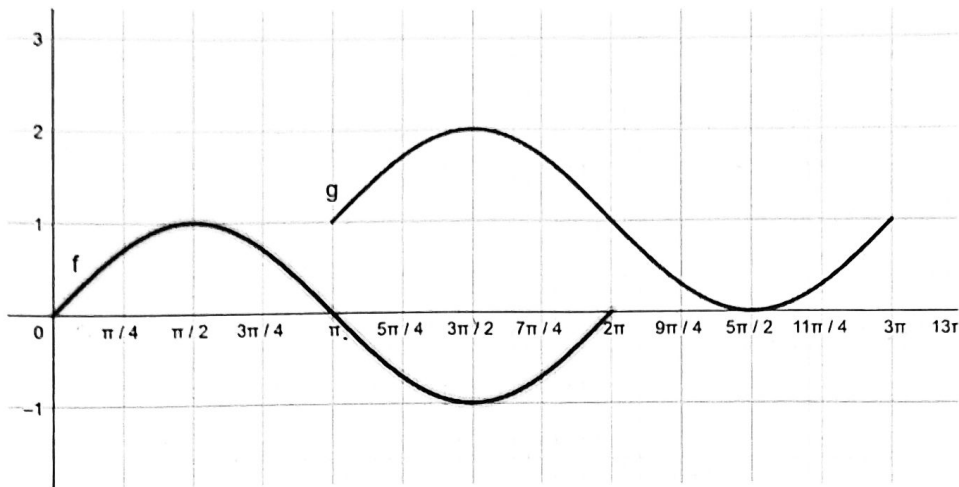
$$\sigma\omega^2\varphi = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\boxed{\sigma\omega\varphi = \frac{4}{5}} \quad \vee \quad \sigma\omega\varphi = -\frac{4}{5}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \eta\rho\omega = \eta\rho(n-\varphi) = \eta\rho\varphi = \frac{3}{5}$$

$$\sigma\omega\omega = \sigma\omega(n-\varphi) = -\sigma\omega\varphi = -\frac{4}{5}$$

ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta \mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

(Μονάδες 13)

β)

i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g .

(Μονάδες 6)

ii. τον τύπο της g .

(Μονάδες 6)

α). $D_g = [\pi, 3\pi]$,

$\text{Max } g = 2$ για $x = \frac{3\pi}{2}$.

β). i) κάτω π δεξιά και κάτω 1 μονάδα.

ii). $g(x) = f(x - \pi) + 1$

$g(x) = \eta \mu(x - \pi) + 1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125° .

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

(Μονάδες 16)

$$\textcircled{\alpha} \quad \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\rho}{180} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\alpha}{\pi} = \frac{-1125}{180}$$

$$(\Rightarrow) \alpha = -\frac{1125}{180} \cdot \pi \quad (\Rightarrow) \alpha = -\frac{25\pi}{4}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \omega = -\frac{25\pi}{4} = -\frac{240}{4} - \frac{\pi}{4} = -6\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \omega = \sin\left(-6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

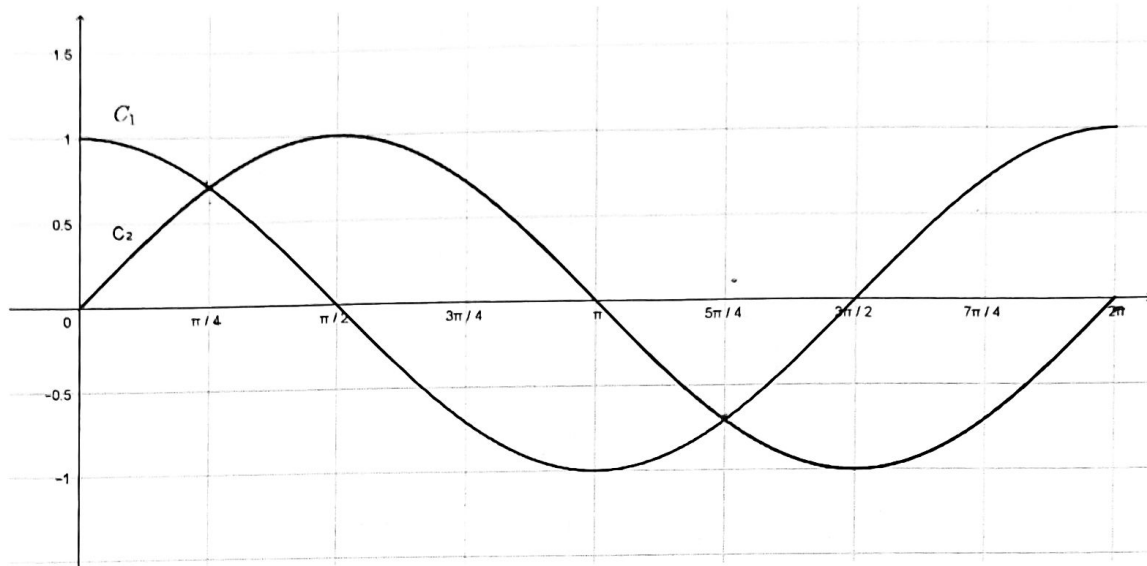
$$\cos \omega = \cos\left(-6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \omega = \tan\left(-6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot \omega = \cot\left(-6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \eta\mu x$ για $x \in [0, 2\pi]$, ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 15)

α) $C_1 \rightarrow f(x) = \sigma\omega x$ γιατί $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

$C_2 \rightarrow g(x) = \eta\mu x$

β) $\eta\mu x = \sigma\omega x$

$g(x) = f(x)$

$x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{5\pi}{4}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g .

(Μονάδες 6)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \sin 2x$	1	0	-1	0	1

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

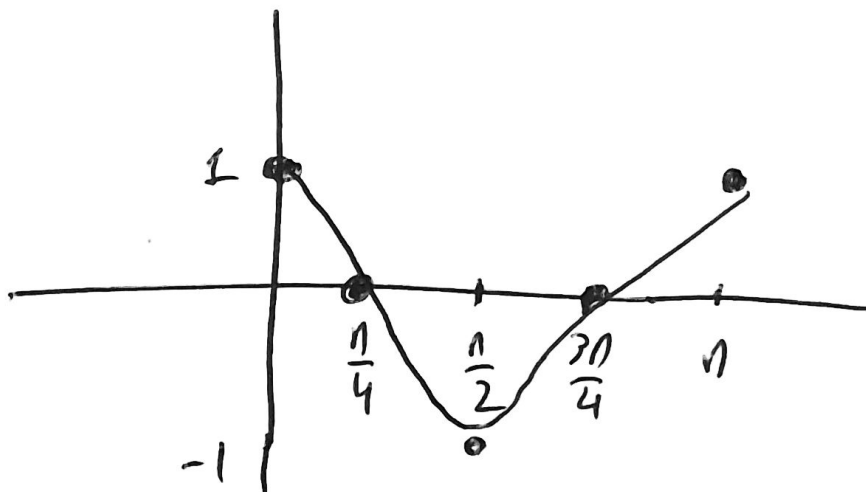
$$-1 \leq g(x) \leq 1$$

$$\text{Min } g = -1$$

$$\text{Max } g = 1$$

β) i) πίνακας

ii)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

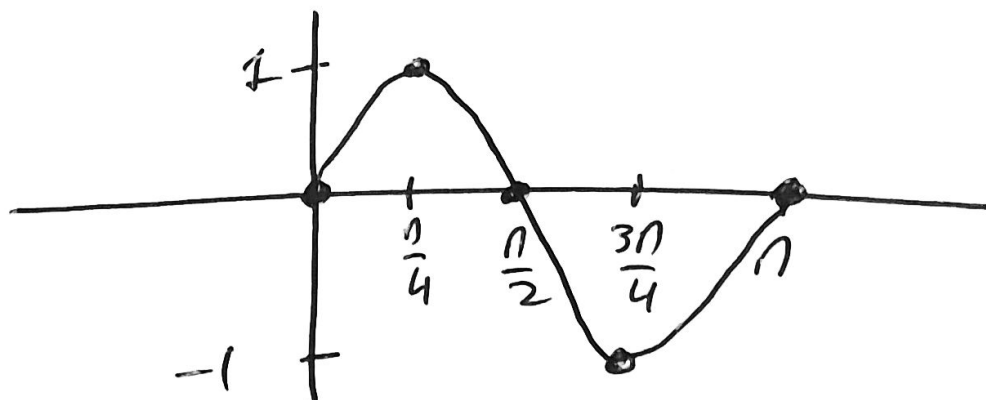
(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \eta\mu 2x \leq 1 & \text{Min } f &= -1 \\ -1 &\leq f(x) \leq 1 & \text{Max } f &= 1. \end{aligned}$$

β) i) πίνακας

ii).



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi+x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0

(Μονάδες 6)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

(Μονάδες 7)

α) $f(x) = \eta\mu(\pi+x) + \eta\mu(-x)$.

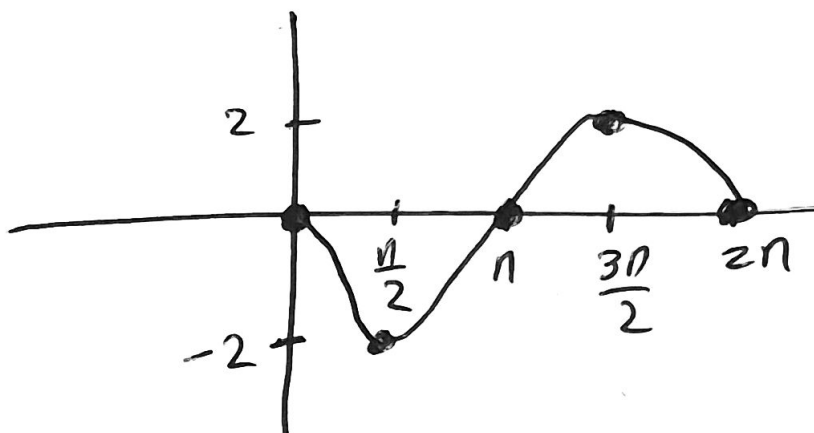
$$f(x) = -\eta\mu x - \eta\mu x$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$f(x) = -2\eta\mu x$$

β) i) πίνακα

ii).



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)}$.

α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu 3x$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$.

(Μονάδες 12)

α) $A = \frac{\cancel{\eta\mu 20^\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu 3x}{\cancel{\eta\mu 20^\circ}} = \sigma\upsilon\nu 3x$

β) $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 3x \leq 1$

$-1 \leq f(x) \leq 1$

$\text{Min } f = -1$

$\text{Max } f = 1$.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad \eta\rho^2\theta + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{2}{4} = 1 \quad \text{Άτοπο.}$$

$$\textcircled{\beta}. \quad \eta\rho^2\theta + \sigma\omega^2\theta = 1.$$

$$\eta\rho^2\theta + \frac{1}{4} = 1$$

$$\eta\rho^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\eta\rho\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ή

$$\boxed{\eta\rho\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\theta \in 4^{\circ}.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sigma \nu^2 x - \eta \mu^2 x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x=0$.

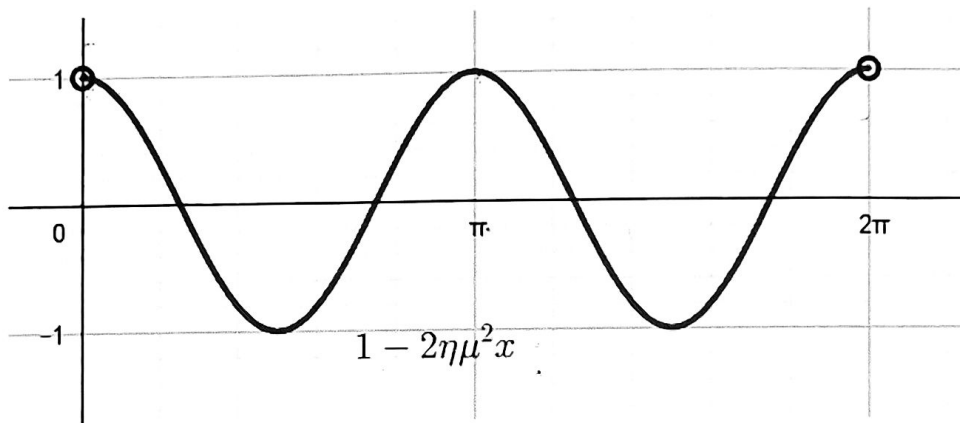
(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta \mu^2 x$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta \mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.

(Μονάδες 9)



$$\textcircled{\alpha} \quad A = \sigma \omega^2 0 - \eta \rho^2 0 = 1$$

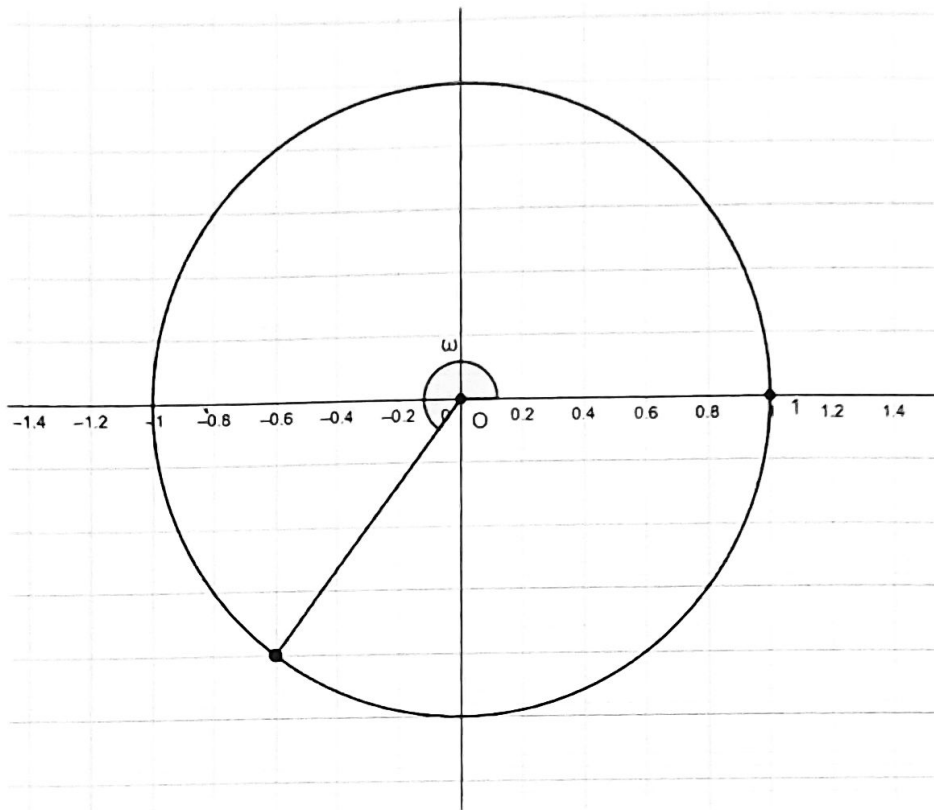
$$\textcircled{\beta} \quad A = \sigma \omega^2 x - \eta \rho^2 x = 1 - \eta \rho^2 x - \eta \rho^2 x = 1 - 2\eta \rho^2 x$$

$$\textcircled{\gamma} \quad A = 1$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sin \omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta \mu \omega$.

(Μονάδες 6)

ii. $\epsilon \phi \omega$

(Μονάδες 7)

α) $\sin \omega = -0,6$ γιατί η τετμημένη

του σημείου είναι $-0,6$.

$$\sin \omega = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

β) i) $\eta \rho^2 \omega + \sigma \omega^2 \omega = 1$ $\Leftrightarrow \eta \rho^2 \omega + \frac{9}{25} = 1$

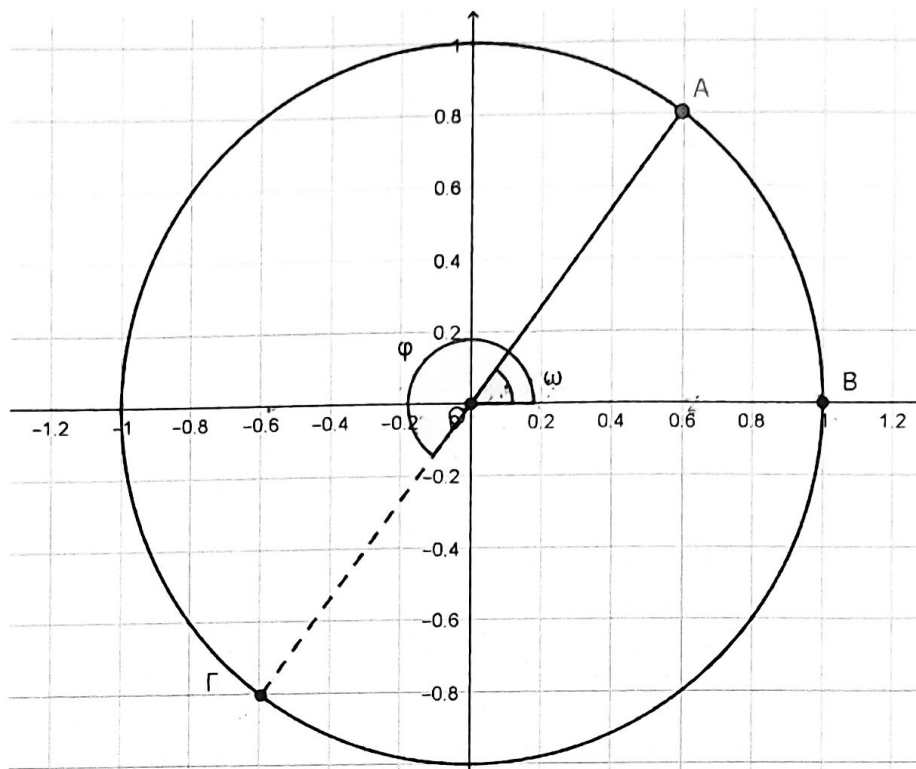
$$\Leftrightarrow \eta \rho^2 \omega = \frac{16}{25} \quad \eta \rho \omega = \frac{4}{5} \quad \text{ή} \quad \boxed{\eta \rho \omega = -\frac{4}{5}}$$

$\omega \in 3^\circ$.

$$\varepsilon_{\psi\omega} = \frac{\eta_{\psi\omega}}{\sigma_{\psi\omega}} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \text{B}\hat{\text{O}}\text{A}$.



α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\phi} = \text{B}\hat{\text{O}}\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 8)

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sin \phi$.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} . \sin \omega = \frac{0,6}{1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\textcircled{\beta} \text{ i) } \phi = 180 + \omega \quad \vee \quad \phi = \pi + \omega$$

$$\text{ii) } \sin \phi = \sin (\pi + \omega) = -\sin \omega = -\frac{3}{5}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας

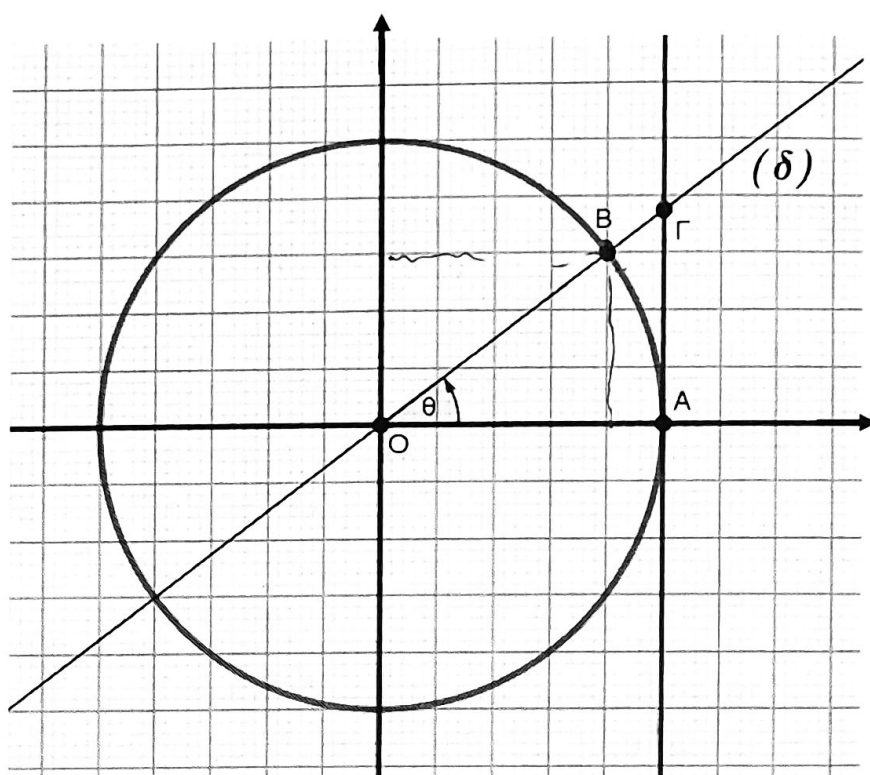
$\widehat{AOB} = \theta$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό $\sigma\upsilon\nu\theta$ και στη συνέχεια τον αριθμό $\varepsilon\varphi\theta$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 12)



$$\textcircled{\alpha} \quad \eta\rho^2\theta + \sigma\omega^2\theta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{25} + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\sigma\omega^2\theta = \frac{16}{25} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sigma\omega\theta = \frac{4}{5}} \quad \begin{matrix} \text{ } \\ \theta \in 1^o \end{matrix} \quad \sigma\omega\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\rho\theta}{\sigma\omega\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{\beta} \quad B = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$\delta \circ y = \lambda x$$

$$B \rightarrow \delta \circ \frac{3}{5} = \lambda \frac{4}{5}$$

$$\lambda = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\delta \circ y = \frac{3}{4} x}$$

$$\Gamma \begin{cases} y = \frac{3}{4} x \\ x = 1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) y = \frac{3}{4}$$

$$\Gamma \left(1, \frac{3}{4} \right)$$

ΘΕΜΑ 2

Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε

το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$ και τη γωνία θ με $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ η

οποία έχει αρχική πλευρά την OA και τελική την OM .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$.

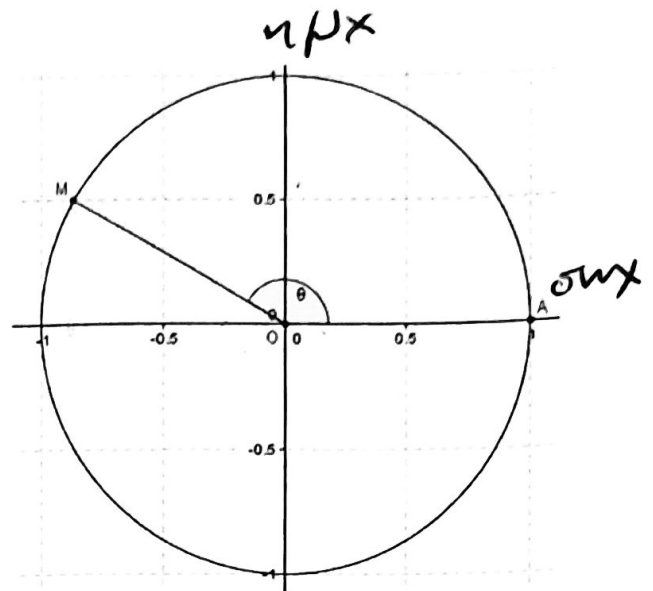
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη γωνία θ .

(Μονάδες 11)



α) Παρατηρώ ότι το M έχει τεταγμένη

$$\frac{1}{2} \text{ άρα } \eta\mu\theta = \frac{1}{2}.$$

$$\beta) \eta\mu^2\theta + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\frac{1}{4} + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\sigma\omega^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma\omega\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{\sigma\omega\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\theta \in 2\pi$$

$$\delta) \eta\mu\theta = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\theta = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } \theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$k=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } \theta = \frac{5\pi}{6} \quad \underline{\underline{2\pi}}$$

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sin A = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το $\eta\mu A$.

(Μονάδες 15)

α) Αφού $\sin A < 0$ η γωνία A ανήκει στο 2 τεταρτημριο δηλαδή $A = (90, 180)$ άρα $\alpha\mu B\lambda\alpha\sigma$.

β) $\sin^2 A + \eta\mu^2 A = 1$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \eta\mu^2 A = 1$$

$$\frac{9}{25} + \eta\mu^2 A = 1$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{16}{25}$$

$$\boxed{\eta\mu A = \frac{4}{5}} \quad \text{ή} \quad \eta\mu A = -\frac{4}{5}$$

2ο τεταρτημριο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sin \omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta \mu \omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta \mu \omega + \sigma \nu \omega}{1 + \epsilon \varphi \omega}$.

(Μονάδες 13)

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \quad & \eta^2 \omega + \sigma^2 \omega = 1 \\ & \eta^2 \omega + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \\ & \eta^2 \omega + \frac{16}{25} = 1 \\ & \eta^2 \omega = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$\swarrow$
 $\searrow$

$\eta \mu \omega = \frac{3}{5}$

$\eta \mu \omega = -\frac{3}{5}$

$\omega \in \mathcal{I}_0$

$$\textcircled{\beta} \quad \epsilon \varphi \omega = \frac{\eta \mu \omega}{\sigma \omega \omega} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$A = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{3}{4}} = -\frac{28}{15}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$.

α) Να δείξετε ότι $\sin(13\pi + x) = -\sin x$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sin x$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad \sin(13\pi + x) = \sin(12\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) \\ = -\sin x$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$f(x) = -2\sin x - 2\sin x = -4\sin x$$

$$\textcircled{\gamma} \quad f(x) = -2$$

$$-4\sin x = -2$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}} \quad \vee \quad \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γωνία $\widehat{\chi\hat{O}\zeta} = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$.

α) Να αιτιολογήσετε ότι $\sin \omega = -\frac{1}{3}$.

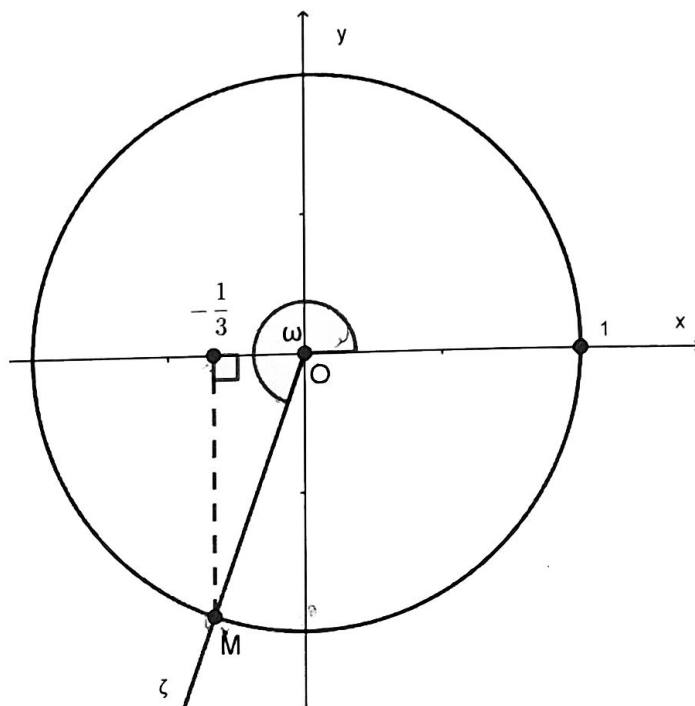
(Μονάδες 07)

β) Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω .

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.

(Μονάδες 08)



α) $\sin \omega = -\frac{1}{3}$, γιατί είναι η τετμημένη του σημείου Μ του τριγωνομετρικού κύκλου.

$$\beta) \sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 1 \quad (\Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 \omega = 1 \quad (\Rightarrow \cos^2 \omega = \frac{8}{9})$$

$$\cos \omega = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \wedge \quad \boxed{\cos \omega = -\frac{2\sqrt{2}}{3}} \quad \omega \in \mathbb{R}_0$$

$$\tan \omega = \frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\textcircled{\delta} \quad n\rho/(n-\omega) = n\rho\omega = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sigma\omega/(n-\omega) = -\sigma\omega\omega = \frac{1}{3}.$$

ΘΕΜΑ 2

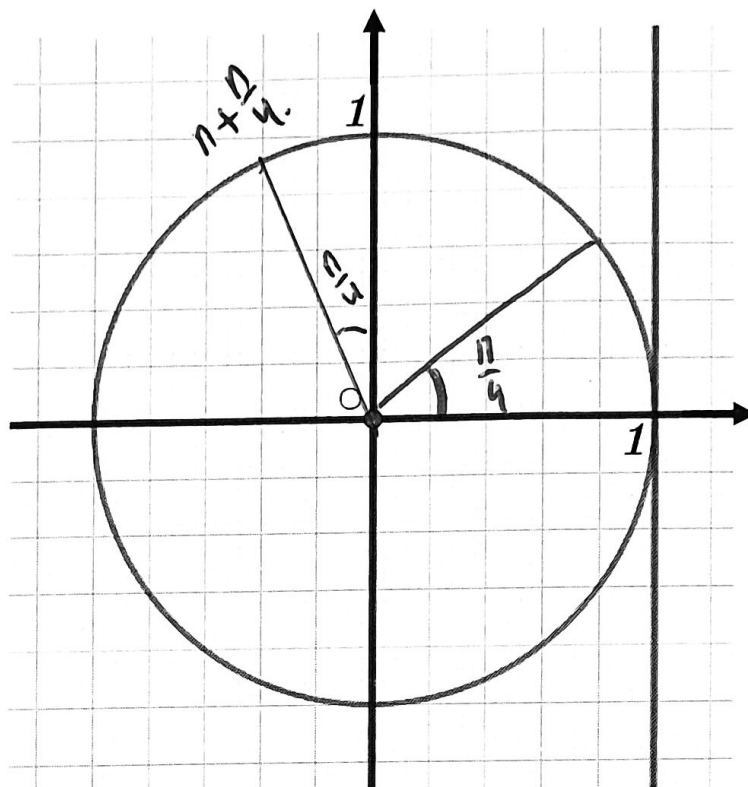
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(Μονάδες 15)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 10)



α) $f(x)=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}.$

$$x=k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Για $k=0$ $x=\frac{\pi}{4}$

Για $k=1$ $x=\pi + \frac{\pi}{4}$

β) $\Sigma x \text{ η λύση}$

Για $k=2$ $x=2\pi + \frac{\pi}{4}$ Απορ/ση

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sin \omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta\mu \omega > 0$.

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

(Μονάδες 15)

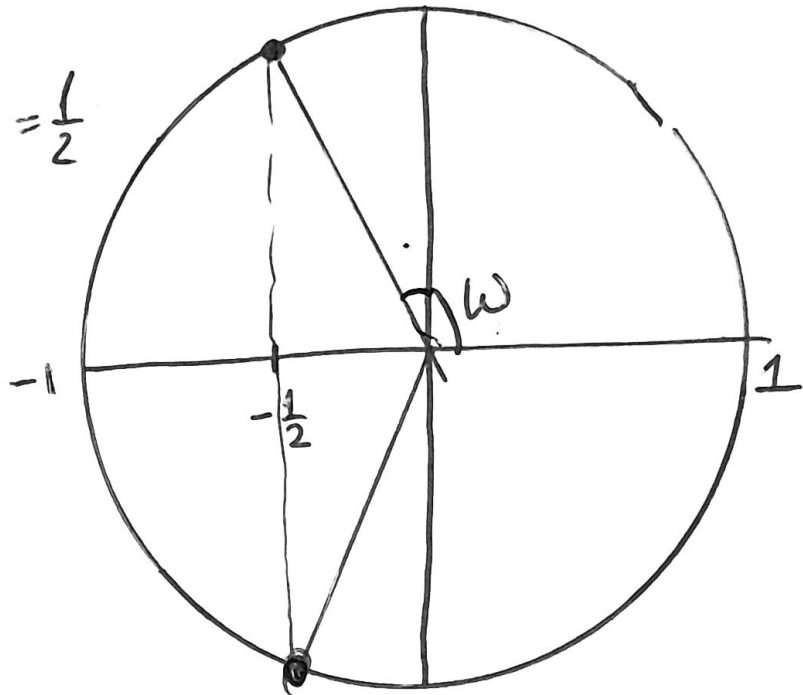
β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $\varphi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

α) Επειδή $\sin 60 = \frac{1}{2}$

$\sin 120 = -\frac{1}{2}$

$\omega = 120$



β) $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$

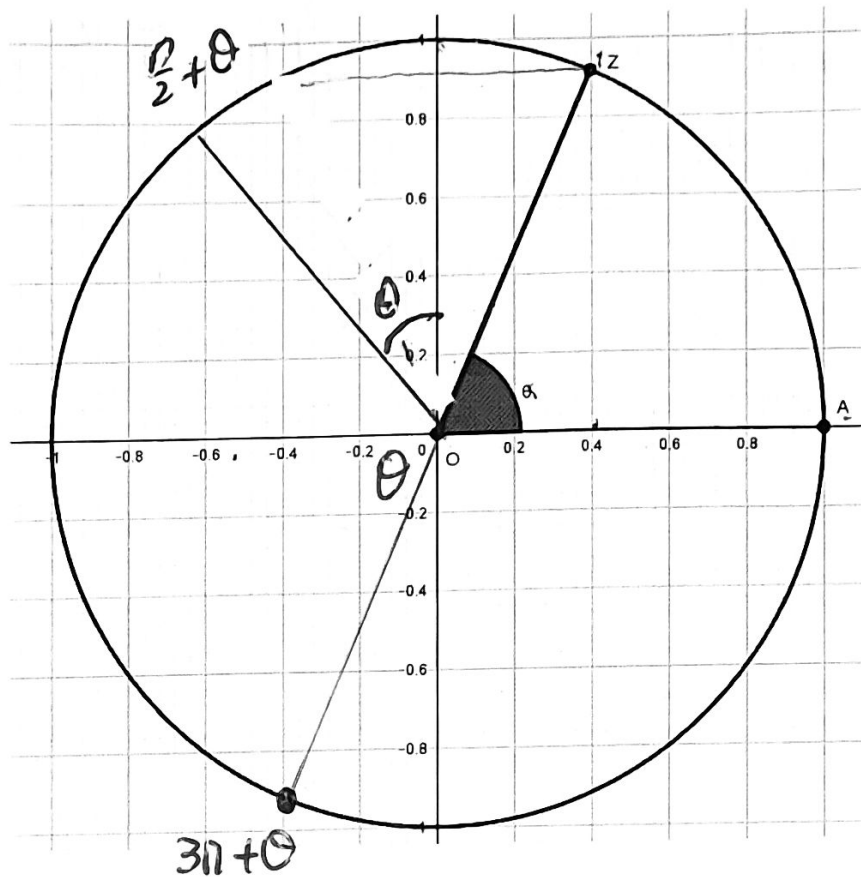
$\sin \varphi = \sin 120$.

$\varphi = 2k\pi + 120$

$\varphi = 2k\pi - 120$

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0,4$.

(Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

(Μονάδες 9)

α) Σχημα.

β) i) Η προβολή του Z στον άξονα συνημιτόνων είναι 0,4.

$$\text{ii) } \sigma_w(3n+\theta) = \sigma_w(2n+n+\theta) = \sigma_w(n+\theta) \\ = -\sigma_w\theta = -0,4$$

$$\eta_p\left(\frac{n}{2}+\theta\right) = \eta_p\left(\frac{n}{2}-(-\theta)\right) = \sigma_w(-\theta) = \\ = \sigma_w\theta = 0,4.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

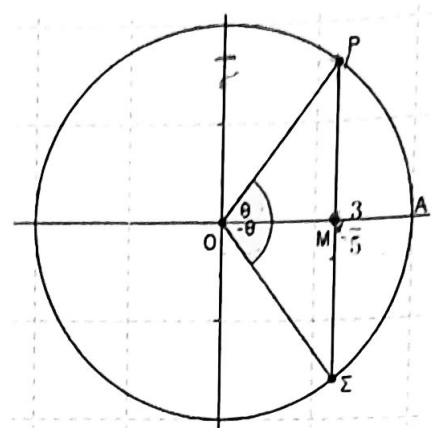
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

(Μονάδες 8)



α) Η προβολή του P στον άξονα συνημιτόνων είναι $\frac{3}{5}$ άρα $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

$$\beta) \eta\mu^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\eta\mu^2\theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\eta\mu^2\theta + \frac{9}{25} = 1$$

$$\eta\mu^2\theta = \frac{16}{25}$$

$$\boxed{\eta\mu\theta = \frac{4}{5}} \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

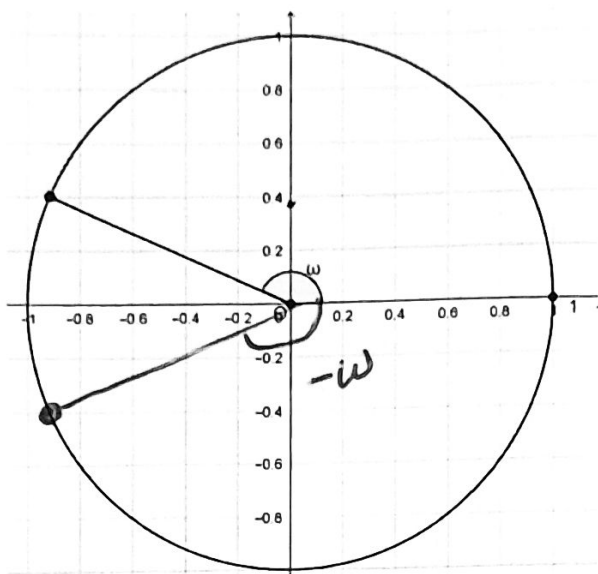
$$\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\gamma) \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta = \frac{3}{5}$$

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu\omega = 0,4$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

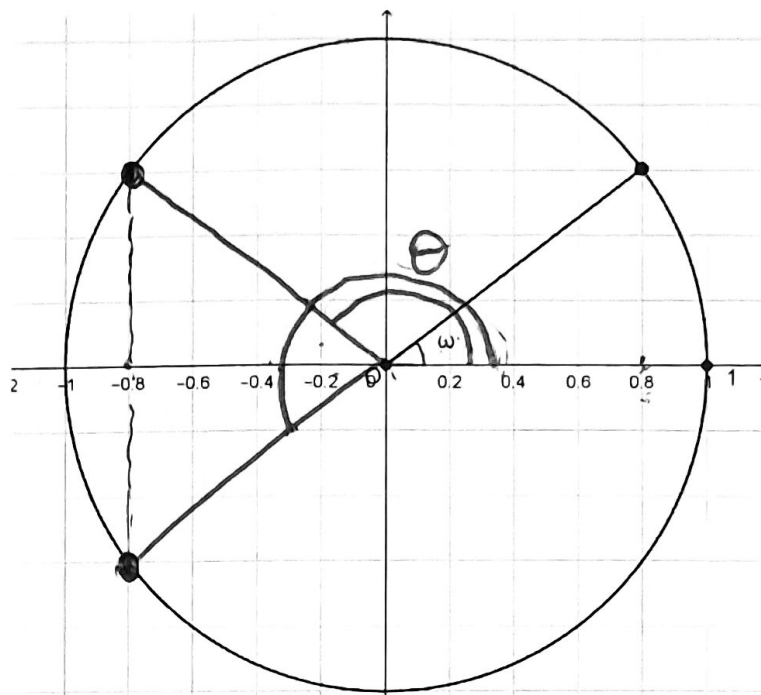
β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

①. Η $-\omega$ έχει ίδιο μέτρο με ω αλλά αναστροφή φοράς. (Μονάδες 13)

② $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega = -0,4$.

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sin \omega = 0,8$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 13)

α) Η γωνία θ και η γωνία $\pi + \omega = \varphi$

β) Οι θ και ω παραληρωματικές

$$\varphi = \pi + \omega$$

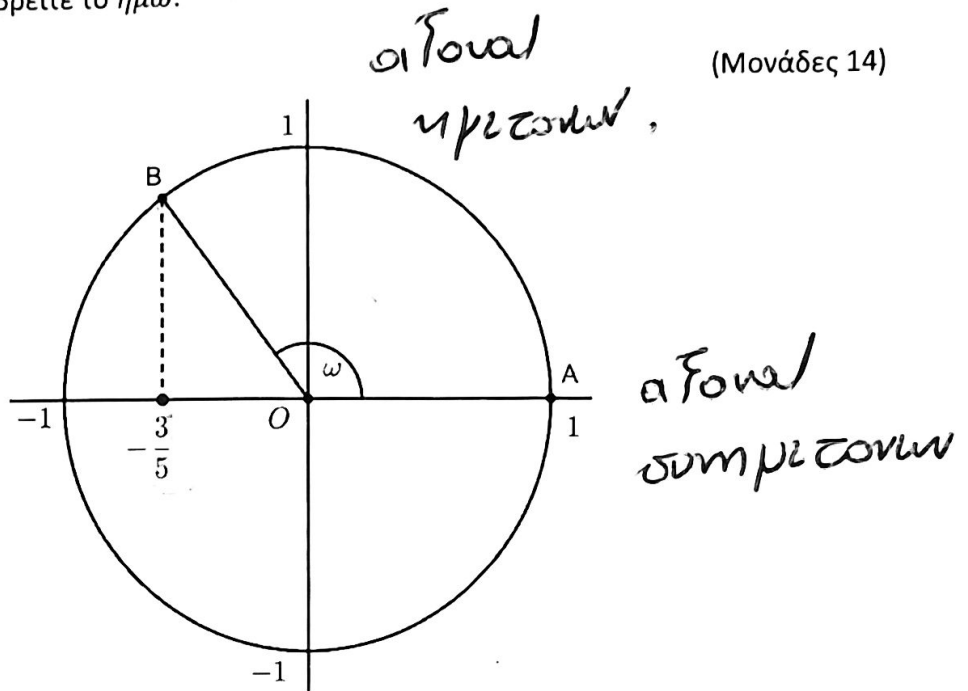
ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του παρακάτω σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta \mu \omega$.

(Μονάδες 14)



α) Επειδή η προβολή του Β πάνω στον
αξονα συνημιτονων είναι $-\frac{3}{5}$ τότε

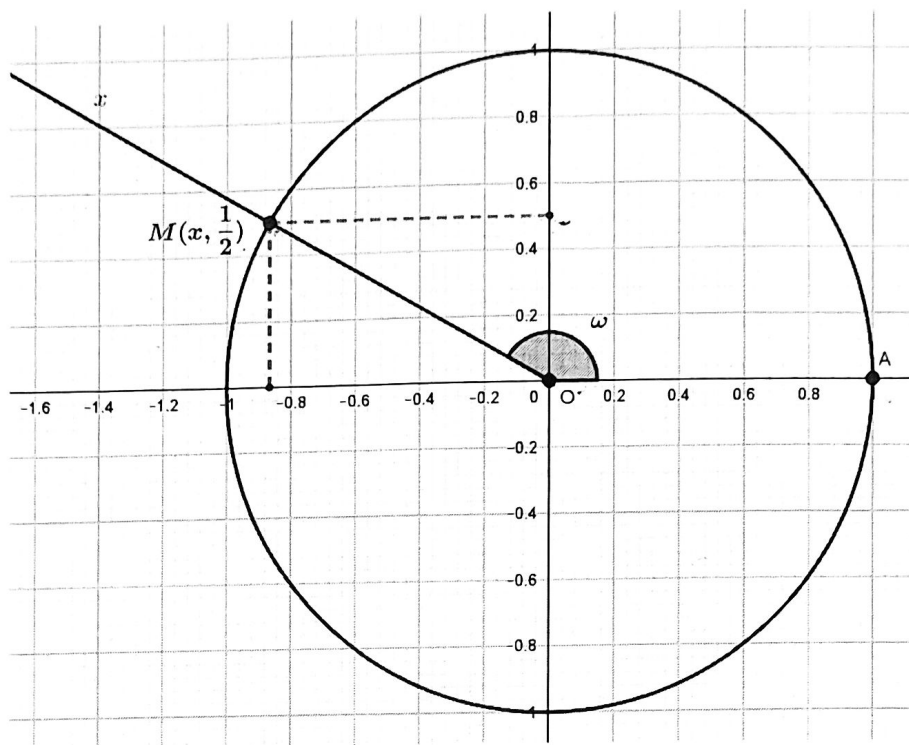
$$\cos \omega = -\frac{3}{5}$$

β) $\eta \rho^2 \omega + \sigma \omega^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \eta \rho^2 \omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \quad \omega \in \mathbb{R}$
 $\eta \rho^2 \omega + \frac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow \eta \rho^2 \omega = \frac{16}{25}$ $\eta \rho \omega = \frac{4}{5}$
 $\eta \rho \omega = -\frac{4}{5}$

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $\widehat{AOx} = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο

$$M\left(x, \frac{1}{2}\right).$$



α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M ;

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)

α) $\eta\rho\omega = \frac{1}{2}$, και $\sigma\upsilon\omega = x$

β) $\eta\rho^2\omega + \sigma\upsilon\omega^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \sigma\upsilon\omega^2 = 1$

$\sigma\upsilon\omega^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\omega^2 = \frac{3}{4}$

$\sigma\upsilon\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \omega \in 2\pi$
 $\sigma\upsilon\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΘΕΜΑ 2

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$.

(Μονάδες 13)

β) $\alpha = -2$.

(Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

α) $\eta\mu x = 1 \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} \vee x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$

Αν $k=0$: $\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

Αν $k=1$: $x = x = \frac{5\pi}{2}$ αποκ/ται

Αν $k=-1$: $\boxed{x = -\frac{3\pi}{2}}$

Αν $k=-2$ τότε $x = -\frac{7\pi}{2}$ Απορ.

β) $\eta\mu x = -2$

Αδύνατο

γιατί

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$.

(Μονάδες 7)

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

(Μονάδες 13)

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \text{ ii) } \eta\mu\theta &= \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{\eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$i) \eta\mu\frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textcircled{\beta} \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \quad (\Rightarrow) (\sqrt{3} - 1)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

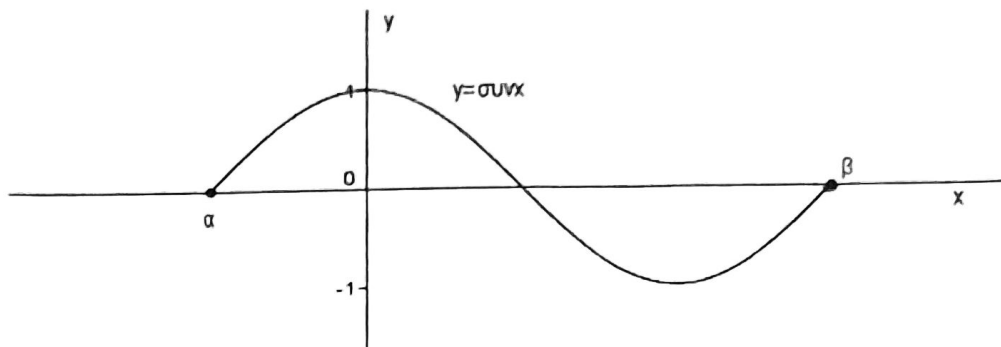
$$3 + 1 - 2\sqrt{3} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \quad (\Rightarrow) \sigma\upsilon\nu^2\theta = 2\sqrt{3} - 3$$

Αφού $\theta \in \text{I}^{\circ}$ τεταρτημόριο το $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sin x$.



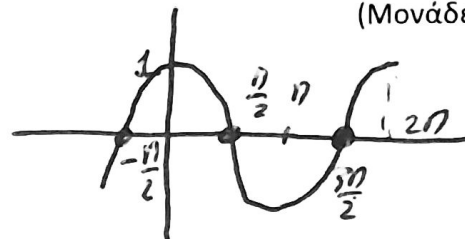
α) Να βρείτε τα α και β .

(Μονάδες 12)

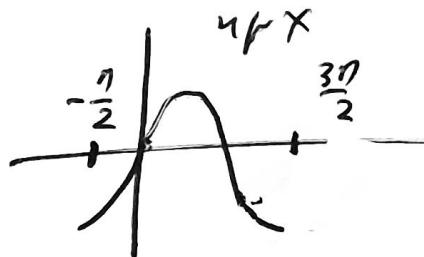
β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπίπτει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta \mu x$;

(Μονάδες 13)

α) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$
 $\beta = \frac{3\pi}{2}$



β) Γνωρίζω ότι



Αρκεί να μετατοπιστεί κατά $\frac{\pi}{2}$ δεξιά
 η $\sin x$.

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

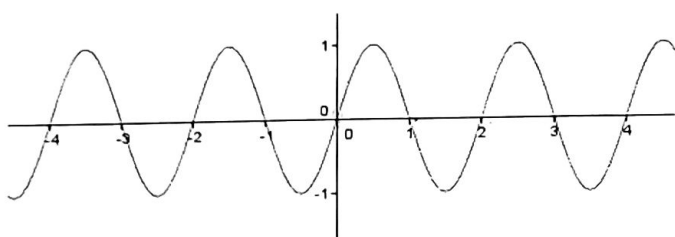
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f(\frac{1}{4})$.

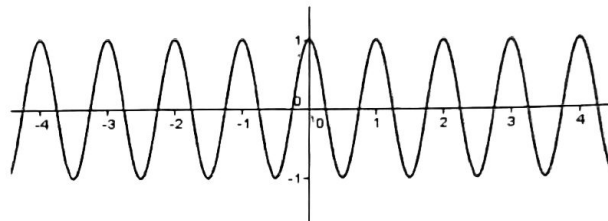
(Μονάδες 8)

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

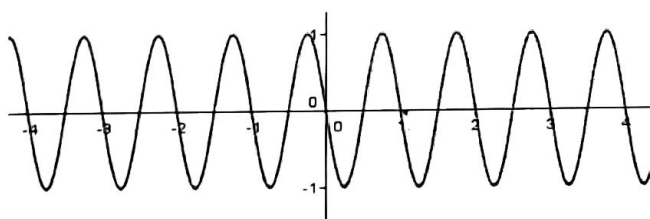
(Μονάδες 9)



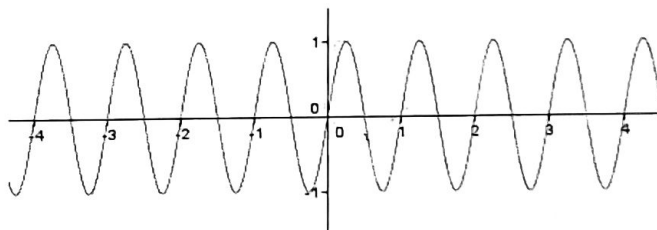
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

α) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Επειδή η $f(x)$ είναι ημικονοειδής είναι περιοδική.

β) $f(0) = \eta\mu 0 = 0$ και $f(\frac{1}{4}) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

γ) Σωστό το δ γιατί έχει περίοδο 1 και ο σωστότερος των ημικονοειδών

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$

(Μονάδες 8)

β) $\sigma\upsilon\nu 108^\circ$

(Μονάδες 9)

γ) $\eta\mu 162^\circ$

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \sigma\omega 72 = \sigma\omega (90 - 18) = \eta\rho 18 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\textcircled{\beta} \sigma\omega 108 = \sigma\omega (180 - 72) = -\sigma\omega 72 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\textcircled{\gamma} \eta\rho 162 = \eta\rho (180 - 18) = \eta\rho 18 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$	-3	0	3	0	-3

$$\textcircled{\alpha} T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

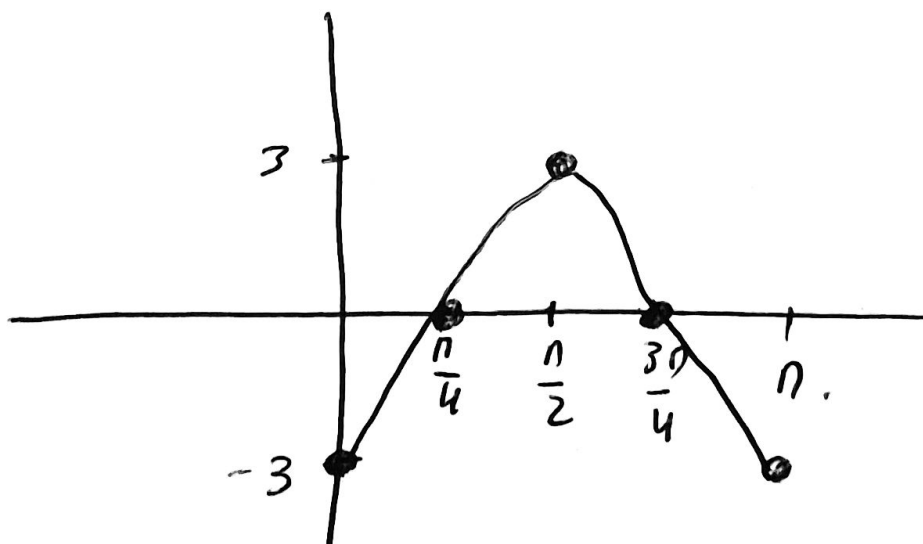
$$\text{Για } -1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \quad \epsilon) \quad -3 \leq -3\sigma\upsilon\nu 2x \leq 3$$

$$-3 \leq f(x) \leq 3$$

$$\text{Min } f(x) = -3$$

$$\text{Max } f(x) = 3$$

β)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f ;

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad -1 \leq \sin 2x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Max } f(x) = \frac{1}{2}$$

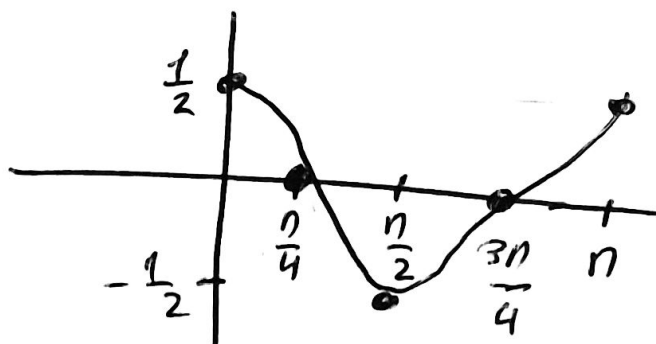
$$\text{Min } f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$\textcircled{\beta} \rightarrow$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

$\rightarrow$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{a} \quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-2 \leq 2\eta\mu x \leq 2$$

$$-1 \leq 2\eta\mu x + 1 \leq 3$$

$$-1 \leq f(x) \leq 3$$

$$\text{Min } f(x) = -1$$

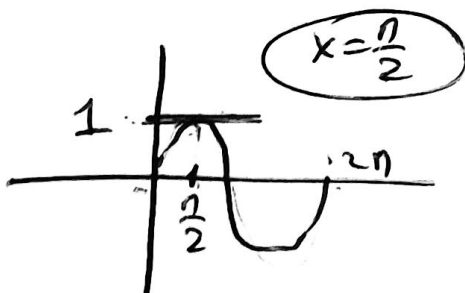
$$\text{Max } f(x) = 3$$

$$\textcircled{b} \quad f(x) = 3$$

$$2\eta\mu x + 1 = 3$$

$$2\eta\mu x = 2$$

$$\eta\mu x = 1$$



Β' Τρόπος

$$\eta\mu x = 1$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \checkmark$$

$$k=1 \Rightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ Απο/ωρ}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}.$

(Μονάδες 6)

ii. $f(x) = 4\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}.$

(Μονάδες 4)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$.

(Μονάδες 15)

α) i) $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu(10\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$

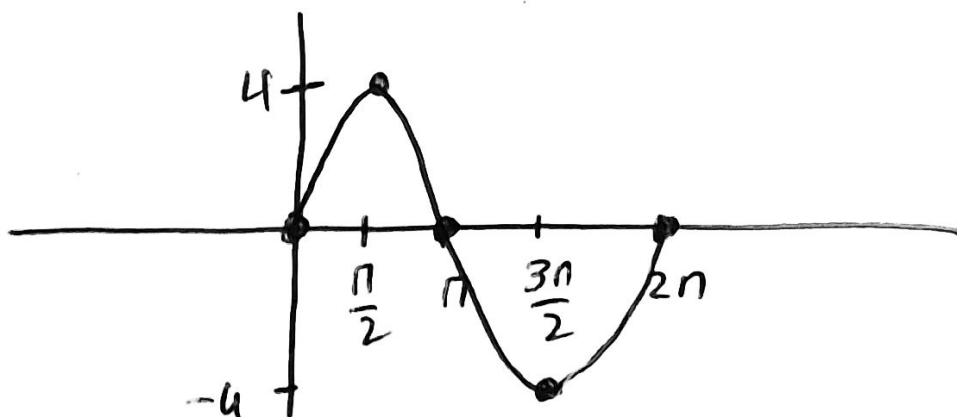
ii). $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x) = 4\eta\mu x$

β)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
f(x)	0	4	0	-4	0

$$f(x) = 4\eta\mu x$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\omega 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \text{ i) } -1 \leq \sigma\omega 2x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq 3\sigma\omega 2x \leq 3$$

$$-3 \leq f(x) \leq 3$$

$$\text{Min } f(x) \hat{=} -3$$

$$\text{Max } f(x) \hat{=} 3$$

$$\text{ii) } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) = -3$$

$$3\sigma\omega 2x = -3$$

$$\sigma\omega 2x = -1$$

$$\sigma\omega 2x = \sigma\omega \pi$$

$$2x = 2k\pi + \pi \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi - \pi$$

$$x = \frac{2k\pi + \pi}{2}$$

$$x = \frac{2k\pi - \pi}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \text{ i) } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$\text{ii) } -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Min } f(x) = -\sqrt{2}$$

$$\text{Max } f(x) = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(2025\pi) = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(2025\pi) = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(2024\pi + \pi) \\ = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu \pi = -\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sin x, x \in \mathbb{R}$.

α) βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

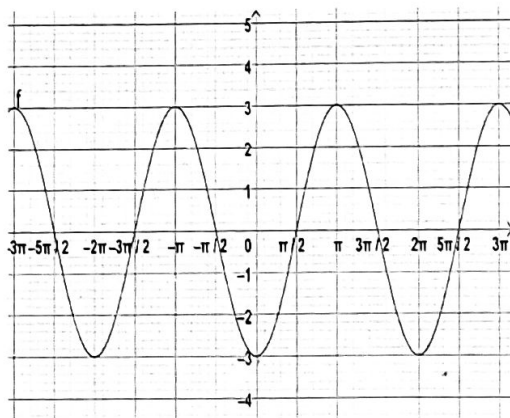
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

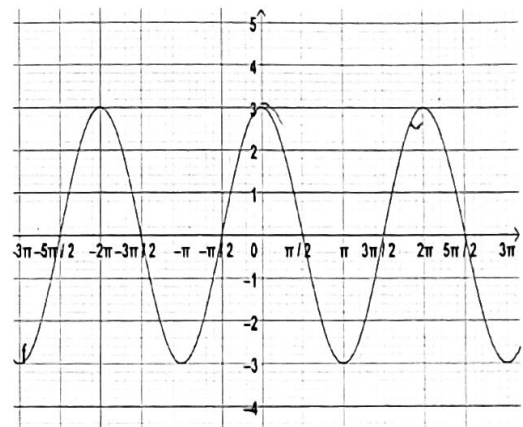
(Μονάδες 7)

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sin x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

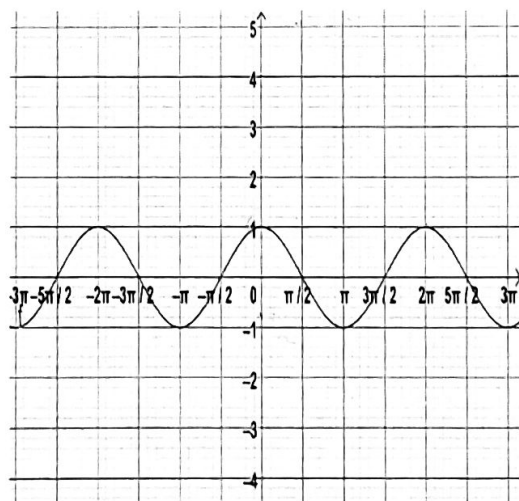
A)



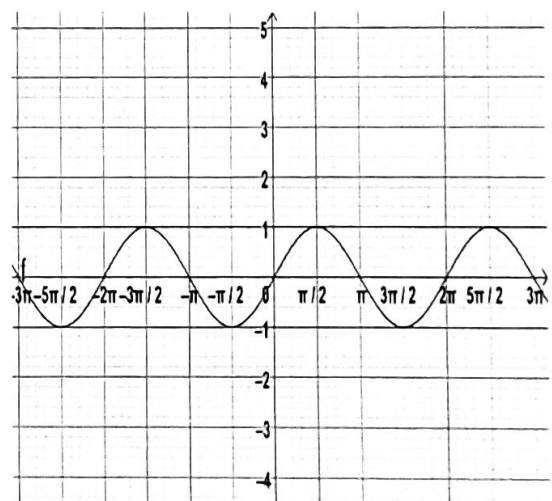
B)



Γ)



Δ)



(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\gamma} f(x) = -3 \cos x \quad \text{exei} \quad \text{Max } f = 3$$

$$\text{Min } f = -3$$

Αξιώματα απορρυνονται γ, δ επιλογη.

Επειδη $-3 < 0$ Σωστη επιλογη το Α.

$$\textcircled{\beta} T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$\textcircled{\alpha} -1 \leq \cos x \leq 1 \quad (\Rightarrow) 3 \geq -3 \cos x \geq -3$$

$$3 \geq f(x) \geq -3$$

$$\text{Min } f = -3$$

$$\text{Max } f = 3$$

ΘΕΜΑ 2

Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει $\sin\theta = -\frac{2}{3}$, και $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sin(\pi - \theta)\sin(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta)\eta\mu(-\theta).$$

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad \eta\rho^2\theta + \sigma\omega^2\theta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \eta\rho^2\theta + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\eta\rho^2\theta + \frac{4}{9} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \eta\rho^2\theta = \frac{5}{9}$$

$$\eta\rho\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$\theta \in 3^\circ.$

$\textcircled{\beta}$

$$A = \sin(\pi - \theta) \cdot \sin(\theta) - \eta\mu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu(-\theta).$$

$$A = -\sin\theta \sin\theta + \eta\rho\theta \eta\rho\theta = -\sin^2\theta + \eta\rho^2\theta$$

$$A = -\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 500^\circ = \varepsilon\varphi 140^\circ$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500^\circ$.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\varphi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad \varepsilon\varphi 500 = \varepsilon\varphi (360 + 140) = \varepsilon\varphi 140.$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{i)} \quad \varepsilon\varphi 500 = \varepsilon\varphi 140 < 0$$

$$\text{αφ}\omega \quad 140 \in 2^\circ.$$

ii).

$$A = \overset{\ominus}{\varepsilon\varphi 500} \quad \overset{\ominus}{\eta\mu 250} \quad \overset{\oplus}{\sigma\upsilon\nu 300} > 0$$

↓
20

↓
30

↓
40

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

(Μονάδες 7)

υδο
α) $f(x) = 2\eta\mu x$

$$f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$f(x) = \eta\mu x + \eta\mu x = 2\eta\mu x$$

β) i) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-2 \leq 2\eta\mu x \leq 2$$

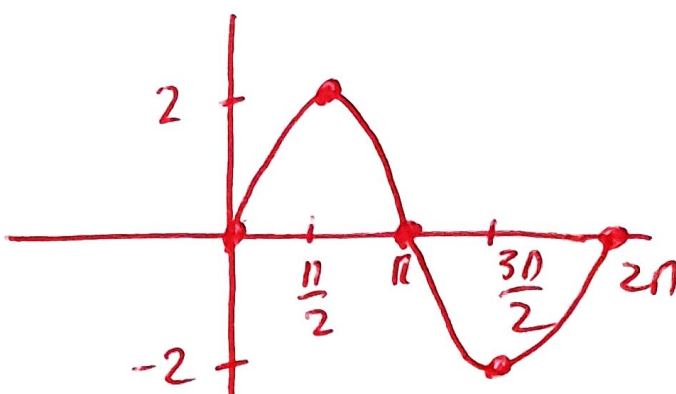
$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

$$\text{Min } f = -2$$

$$\text{Max } f = 2$$

ii).

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	0	2	0	-2	0



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\sigma\omega\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A , όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\omega\theta = \frac{12}{13}$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = 2\sigma\omega\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$$

$$A = 2\eta\mu\theta - \eta\mu\theta = \eta\mu\theta$$

$$\textcircled{\beta} \quad \eta\mu^2\theta + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\eta\mu^2\theta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

$$\eta\mu^2\theta = \frac{169}{169} - \frac{144}{169}$$

$$\eta\mu^2\theta = \frac{25}{169}$$

$$\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$$

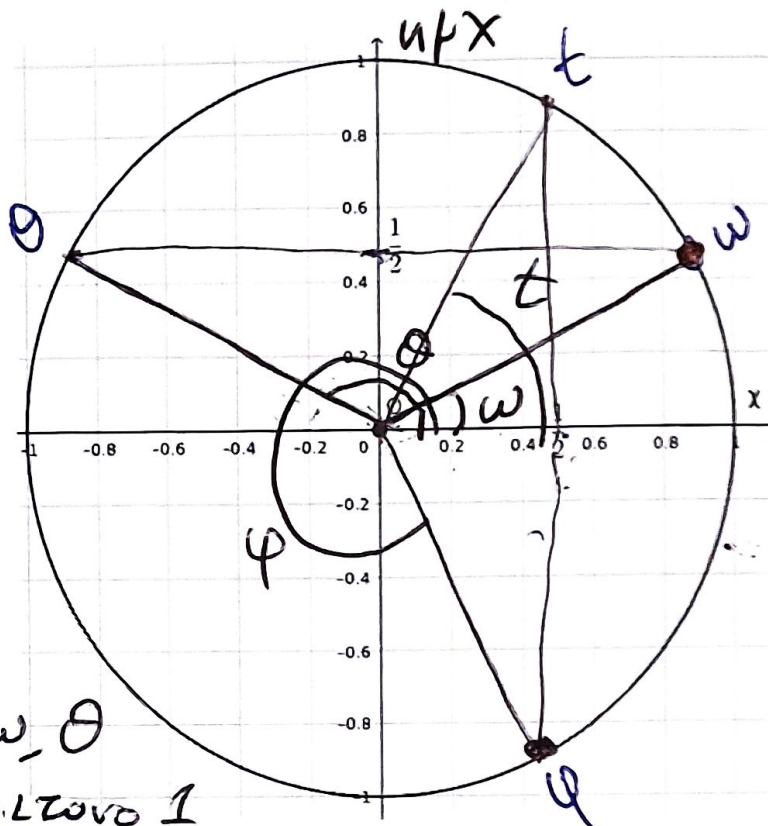
$$\eta \left[\eta\mu\theta = -\frac{5}{13} \right]$$

$\theta \in 4^o$

ΘΕΜΑ 2

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν

ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



$\sin x$

α

Οι γωνίες ω, θ
έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$

Οι γωνίες φ, t

έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

(Μονάδες 13)

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$$

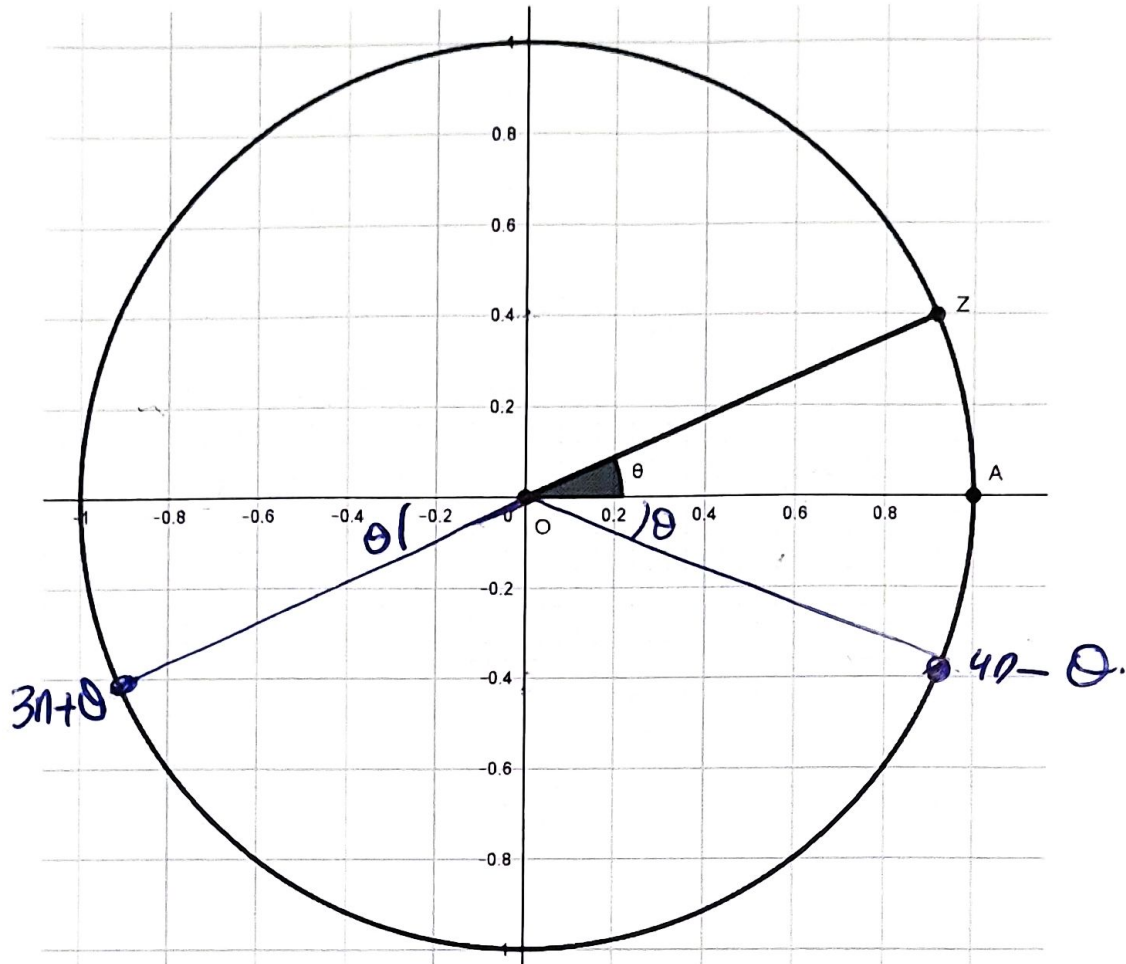
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0,4$.

(Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

α) ως εξής

(Μονάδες 9)

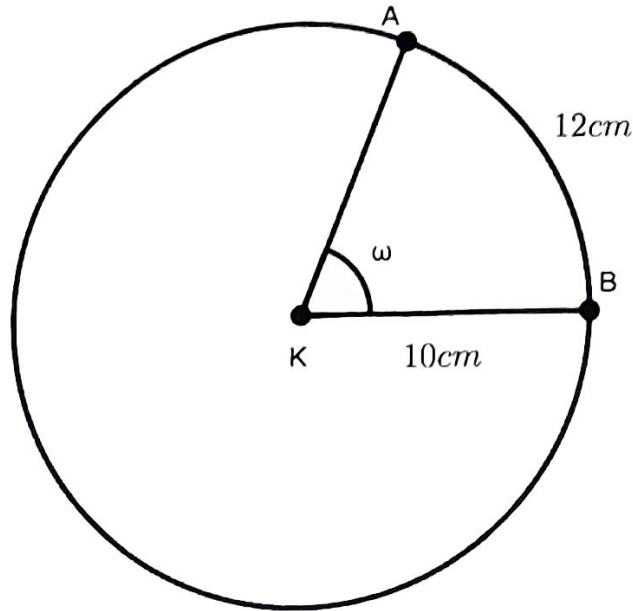
β) 1) $\eta\mu\theta = 0,4$ γιατί $\eta\mu\theta = y_Z = 0,4$

ii) $\eta\mu(3\pi + \theta) = -0,4$

$\eta\mu(4\pi - \theta) = -0,4$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10 cm . Επίσης δίνεται το τόξο $\widehat{AB}$ με μήκος 12 cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .



α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι $1,2\text{ rad}$.

(Μονάδες 6)

ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\sin \omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$).

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \text{ i) } \omega = \frac{l_{AB}}{r} = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ rad.}$$

ii). $1,2 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2,4 < \pi$ που ισχύει άρα οξεία

$$\textcircled{\beta} \sin^2 \omega + \eta\mu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \sin \omega = \frac{4\sqrt{34}}{25}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha=2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = 2\sigma\omega^2(\pi-x) - 3\eta\rho\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\rightarrow \sigma\omega(\pi-x) = -\sigma\omega x$$

$$\rightarrow \eta\rho\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \eta\rho\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \sigma\omega(-x) = -\sigma\omega x.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 2(-\sigma\omega x)^2 - 3(-\sigma\omega x) + \alpha = 2\sigma\omega^2 x - 3\sigma\omega x + \alpha$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(-x) = 2\sigma\omega^2(-x) - 3\sigma\omega(-x) + \alpha \Leftrightarrow$$

$$f(-x) = 2\sigma\omega^2 x - 3\sigma\omega x + \alpha = f(x) \text{ άρα}$$

$$\text{αφού } x \in D_f \text{ και } -x \in D_f.$$

$$\textcircled{\gamma} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 - 6 + 4\alpha = 4$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha = 8 \quad \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = g(x)$$

$$2\sigma\omega^2x - 3\sigma\omega x + 2 = 2\eta\rho^2x + 9\sigma\omega x - 9.$$

$$2\sigma\omega^2x - 3\sigma\omega x + 2 = 2(1 - \sigma\omega^2x) + 9\sigma\omega x - 9.$$

$$2\sigma\omega^2x - 3\sigma\omega x + 2 = 2 - 2\sigma\omega^2x + 9\sigma\omega x - 9.$$

$$4\sigma\omega^2x - 12\sigma\omega x + 9 = 0.$$

$$(2\sigma\omega x - 3)^2 = 0$$

$$2\sigma\omega x = 3$$

$$\sigma\omega x = \frac{3}{2}$$

Αδυνατεί να βρεθεί $\sigma\omega x \in [-1, 1]$.

Άρα δεν έχουμε κοίνα σύμμετρα.

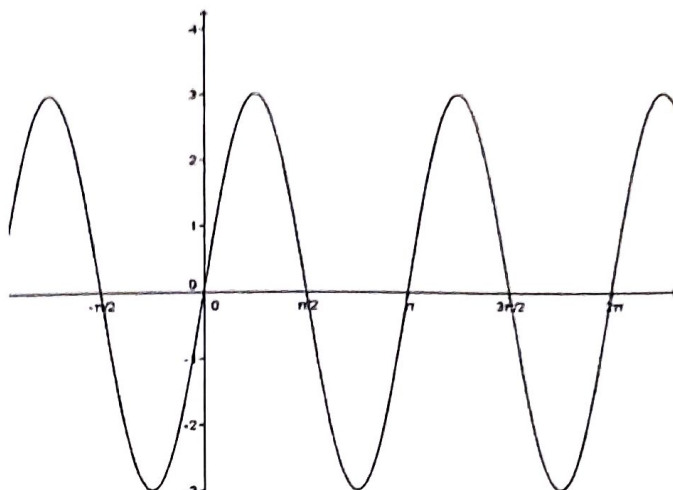
ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$$f(x) = \rho \eta \mu(\alpha x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha, \rho > 0$$

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)



β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ .

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{\alpha} \quad T = \pi \quad \text{Max } f = 3 \quad \text{Min } f = -3.$$

$$\textcircled{\beta} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\Rightarrow) \quad \pi = \frac{2\pi}{\alpha} \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\alpha = 2},$$

$$-1 \leq \eta \mu 2x \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad -\rho \leq \rho \eta \mu 2x \leq \rho$$

$$(\Rightarrow) -\rho \leq f(x) \leq \rho \quad \text{αρα, } \rho = 3.$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \text{Αρκεί να } g(x) \geq 4 \quad (\Rightarrow) \quad x^4 - 2x^2 + 5 \geq 4$$

$$(\Rightarrow) \quad x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad (x^2 - 1)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει,}$$

$$\textcircled{\delta} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \leq 3 \\ g(x) \geq 4 \end{array} \right\} f(x) < g(x) \text{ αρα κανένα κοινό σημείο,}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{\alpha} \quad \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\text{Είναι} \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \quad (\Rightarrow 0^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ ΑΤΩΝΩ!})$$

$$\textcircled{\beta} \quad \sqrt{3} \eta\mu x = 3 \sigma\upsilon\nu x \quad (\sigma\upsilon\nu x \neq 0)$$

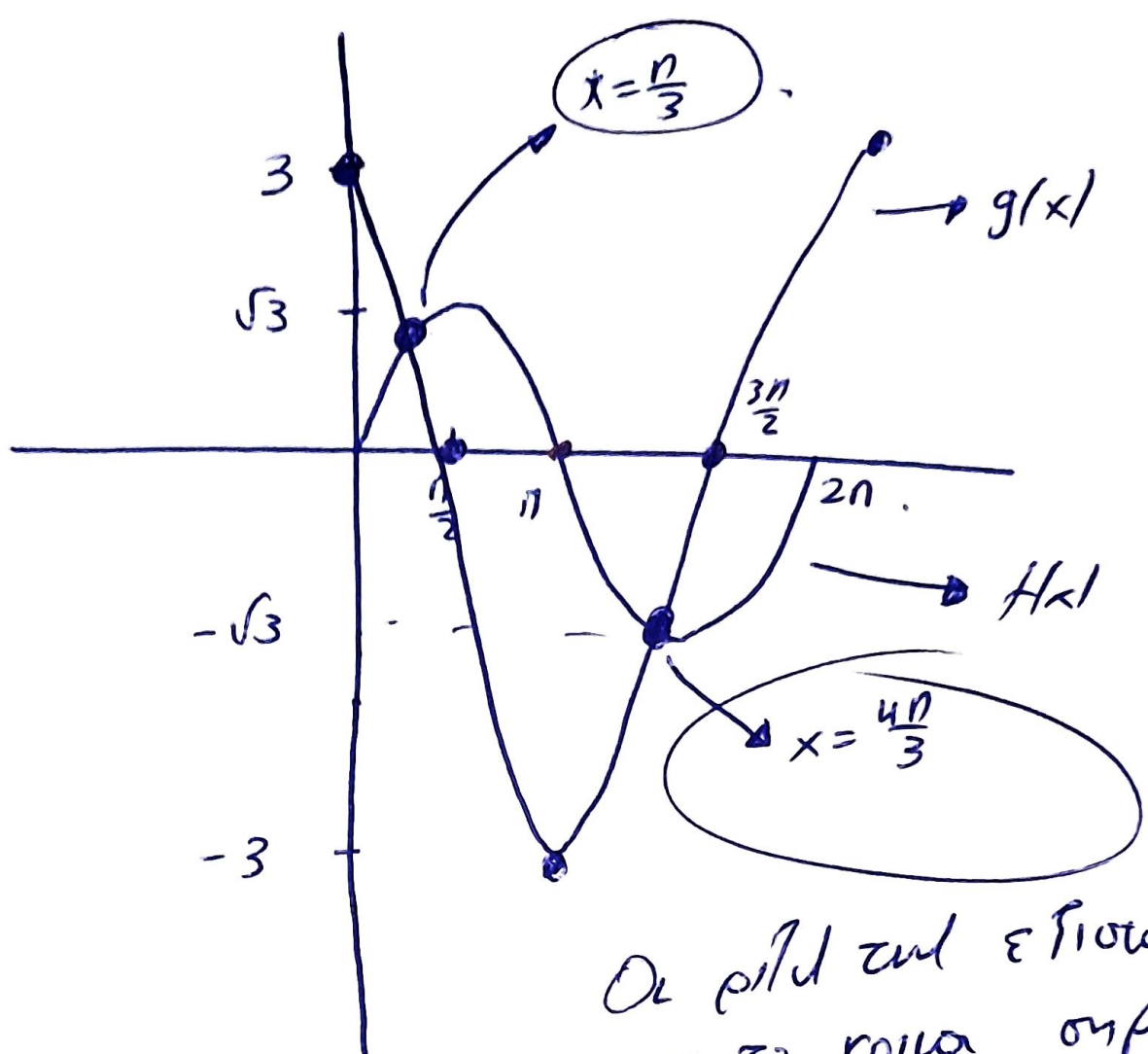
$$\sqrt{3} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 3 \quad (\Rightarrow \epsilon\phi x = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \epsilon\phi x = \sqrt{3})$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi 60 \quad (\Rightarrow x = k\pi + 60.$$

$$\text{Για } k=0 \quad \epsilon\chi\omega \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Για } k=1 \quad \epsilon\chi\omega \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

8.



Οι ρίζες των εξισώσεων
είναι τα κοινά σημεία
των $f(x)$ και $g(x)$
στο $[0, 2\pi]$.

8) $\sqrt{3} \eta \mu x < 3 \sigma \omega x$
 $f(x) < g(x).$

$$x \in [0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi].$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sin(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad -1 \leq \sin \beta x \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad -\frac{\alpha+1}{2} \leq \frac{\alpha+1}{2} \sin \beta x \leq \frac{\alpha+1}{2}$$

$$(\Rightarrow) \quad -\frac{\alpha+1}{2} \leq f(x) \leq \frac{\alpha+1}{2}$$

$$\text{Παρατηρώ } -\frac{\alpha+1}{2} = -2 \quad (\Rightarrow) \quad \alpha+1 = 4 \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\underline{\alpha = 3}}$$

$$\text{και } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\underline{\beta = 4}}$$

$$\boxed{f(x) = 2 \sin 4x}$$

$$\textcircled{B}. A = \frac{u_p \left| \frac{n}{2} - x \right| \varepsilon \varphi(n-x) u_p(2n+x)}{\sigma w(3n-x) \sigma \varphi\left(\frac{7n}{2} - x\right) \sigma w\left(\frac{n}{2} + x\right)}$$

$$\rightarrow u_p \left| \frac{n}{2} - x \right| = \sigma w x$$

$$\rightarrow \varepsilon \varphi(n-x) = -\varepsilon \varphi x$$

$$\rightarrow u_p(2n+x) = u_p x$$

$$\rightarrow \sigma w(3n-x) = \sigma w(2n+n-x) = \sigma w(n-x) = -\sigma w x$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma \varphi\left(\frac{7n}{2} - x\right) &= \sigma \varphi\left(\frac{6n}{2} + \frac{n}{2} - x\right) = \sigma \varphi\left(3n + \frac{n}{2} - x\right) \\ &= \sigma \varphi\left(2n + n + \frac{n}{2} - x\right) = \sigma \varphi\left(n + \frac{n}{2} - x\right) = \sigma \varphi\left(\frac{n}{2} - x\right) \\ &= \varepsilon \varphi x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sigma w\left(\frac{n}{2} + x\right) = \sigma w\left(\frac{n}{2} - (-x)\right) = u_p(-x) = -u_p x.$$

$$\text{Apda } A = \frac{\cancel{\sigma w x} (-\cancel{\varepsilon \varphi x}) \cancel{u_p x}}{-\cancel{\sigma w x} (\cancel{\varepsilon \varphi x}) (-\cancel{u_p x})} = -1.$$

$$\textcircled{Y} H(x) = 2A \quad \sigma w \quad \left[n, \frac{3n}{2}\right].$$

$$2\sigma w u x = -2 \quad \Leftrightarrow \sigma w u x = -1 \quad \Leftrightarrow \sigma w u x = \sigma w n$$

$$\begin{array}{ll} u x = 2kn + n & \text{u} \\ \boxed{x = \frac{kn}{2} + \frac{n}{4}} & \text{u} \end{array} \quad \begin{array}{ll} u x = 2kn - n & \text{u} \\ \boxed{x = \frac{kn}{2} - \frac{n}{4}} & \text{u} \end{array}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$y' \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

• $k=0$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ OK

• $k=1$ $\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ OK

• $k=2$ $\Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ NAI

• $k=3$ $\Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$ OK

• $k=0$, $x = -\frac{\pi}{4}$ OK

• $k=1$ $x = \frac{\pi}{4}$ OK

• $k=2$ $x = \frac{3\pi}{4}$ OK

• $k=3$ $x = \frac{5\pi}{4}$ NAI

• $k=4$ $x = \frac{7\pi}{4}$ OK

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\omega x - \eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{a} \quad f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$$

$$f(x) = \sigma\omega x + (-\eta\mu x) = \sigma\omega x - \eta\mu x.$$

$$\textcircled{b} \quad \begin{array}{l} -1 \leq \sigma\omega x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \sigma\omega x \geq -1 \\ -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq -\eta\mu x \geq -1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} -1 \leq \sigma\omega x \leq 1 \\ -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \end{array}} \right\} \textcircled{+} \quad \begin{array}{l} 2 \geq \sigma\omega x - \eta\mu x \geq -2 \\ 2 \geq f(x) \geq -2 \end{array}$$

Αφού $f(x) \leq 2$ το $\max f \leq 2$.

$$\textcircled{c} \quad \text{i)} \quad f(0) = \sigma\omega 0 - \eta\mu 0 = 0$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\omega x - \eta\mu x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\omega x = \eta\mu x.$$

$$\Leftrightarrow \sigma\omega x = \sigma\omega\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \quad \vee \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x$$

$$k=0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$k=1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{4}}$$

$$\begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{4}} \end{array}$$

Αδυνατούμε

ΘΕΜΑ 4

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

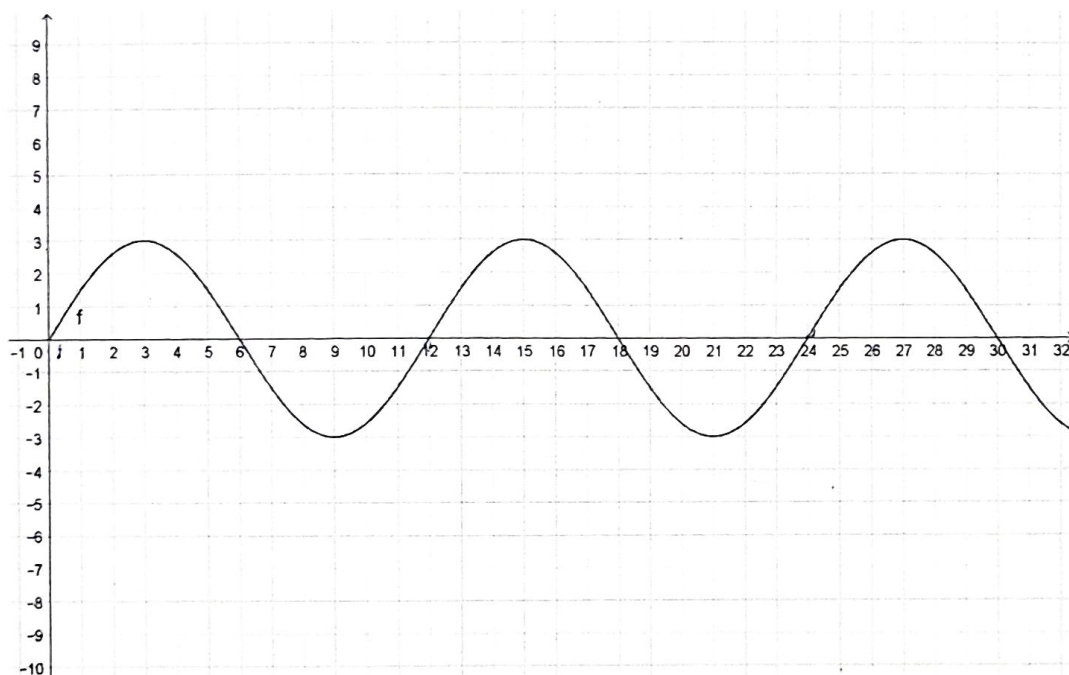
(Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)



α) $\max f \approx 3$ $\min f \approx -3$ $\Rightarrow$ διαφορά ≈ 6 .

β) 12 ωρ.

γ) $f(x) = a \sin \omega x + B$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 12 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\pi}{6}}$

Επιστ $f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

Αφού $\max f \approx 3$
 $a = 3$.

Apakah $f(x) = 3np \frac{17}{6} x$.

⑧ $f(x) = \frac{3}{2} \quad (\Rightarrow) 3np \frac{n}{6} x = \frac{3}{2}$

$$np \frac{n}{6} x = \frac{1}{2} = np \frac{n}{6}$$

$$\frac{n}{6} x = 2kn + \frac{n}{6} \quad \vee \quad \frac{n}{6} x = 2kn + n - \frac{n}{6}$$

$$nx = 12kn + n$$

$$\boxed{x = 12k + 1}$$

$$nx = 12kn + 6n - n$$

$$x = 12k + 6 - 1$$

$$\boxed{x = 12k + 5}$$

$k=0 \Rightarrow x=1 \checkmark$

$x=5 \checkmark$

$k=1 \Rightarrow x=13 \checkmark$

$x=17 \checkmark$

$k=2 \Rightarrow x=25 \times$

$x=29 \times$

ΘΕΜΑ 4

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

(Μονάδες 07)

$$\textcircled{\alpha} -1 \leq \eta \mu \frac{\pi}{2} t \leq 1 \quad \Leftrightarrow -0,2 \leq 0,2 \eta \mu \frac{\pi}{2} t \leq 0,2$$

$$0,8 \leq 1 + 0,2 \eta \mu \frac{\pi}{2} t \leq 1,2$$

$$y_0 = 0,2$$

$$AB = 0,4$$

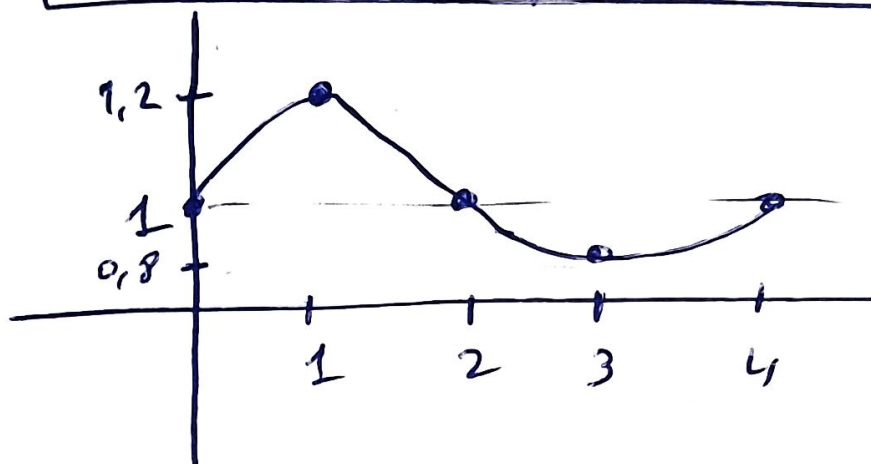
$$0,8 \leq y(t) \leq 1,2$$

$$\textcircled{\beta} T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi \cdot 2}{\pi} = 4$$

⑦



$\frac{n}{2}t$	0	$\frac{n}{2}$	n	$\frac{3n}{2}$	$2n$
t	0	1	2	3	4
$\sin \frac{n}{2}t$	0	1	0	-1	0
$0,2 \sin \frac{n}{2}t$	0	0,2	0	-0,2	0
$y(t)$	1	1,2	1	0,8	1



⑧ $y(t) = 1,1 \Leftrightarrow 1 + 0,2 \sin \frac{n}{2}t = 1,1$

$$0,2 \sin \frac{n}{2}t = 0,1$$

$$\sin \frac{n}{2}t = \frac{1}{2} = \sin \frac{n}{6}$$

$$\frac{n}{2}t = 2k\pi + \frac{n}{6}$$

$$\frac{n}{2}t = 2k\pi + \pi - \frac{n}{6}$$

$$nt = 4k\pi + \frac{n}{3}$$

$$nt = 4k\pi + 2\pi - \frac{n}{3}$$

$$\boxed{t = 4k + \frac{1}{3}}$$

$$t = 4k + 2 - \frac{1}{3}$$

$k=0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \checkmark$

$t = \frac{5}{3} \checkmark$

$$\boxed{t = 4k + \frac{5}{3}}$$

$k=1 \Rightarrow t = 4 + \frac{1}{3} \times$

$t = 4 + \frac{5}{3} \times$

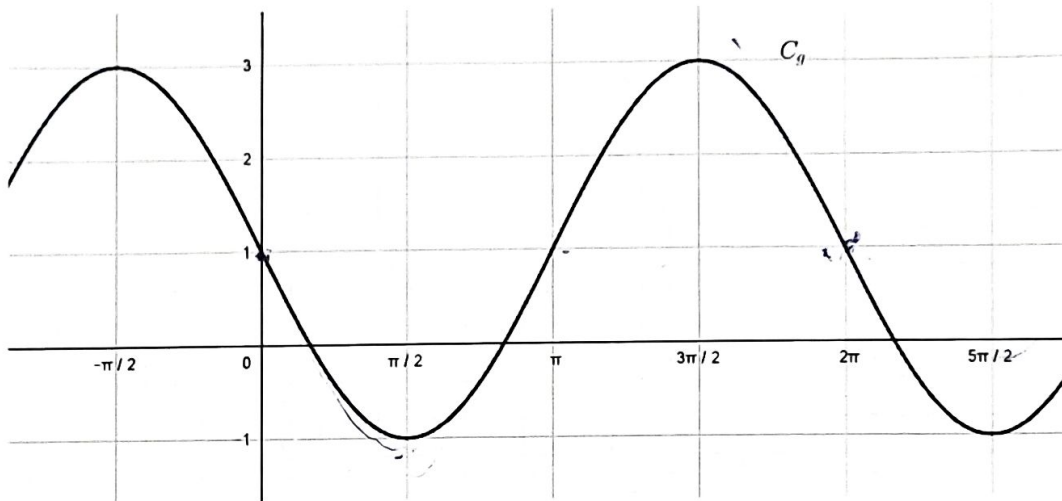
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{a} T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$$

$$-1 \leq \eta\mu 3x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu 3x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\eta\mu 3x + 1 \leq 3$$

$$-1 \leq f(x) \leq 3$$

$$\min f = -1$$

$$\max f = 3$$

$$\textcircled{b} i) \text{ Το } A(0, 1) \in C_g \text{ άρα } g(0) = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

$$\text{Άρα } g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + 1$$

$$\text{Παρατηρώ ότι } T=2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \omega = 1$$

$$\boxed{B=1},$$

$$\text{Άρα } g(x) = a \sin x + 1.$$

$$T_0 \quad B\left(\frac{3\pi}{2}, 3\right) \in (g) \Rightarrow g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow a \sin \frac{3\pi}{2} + 1 = 3 \quad (\Rightarrow) \quad a(-1) + 1 = 3$$

$$-a = 2 \quad \boxed{a = -2}$$

$$\boxed{g(x) = -2 \sin x + 1}$$

$$11) \quad f(x) = g(x) \quad \text{στο } [0, \pi).$$

$$2 \sin 3x + 1 = -2 \sin x + 1$$

$$\sin 3x = -\sin x$$

$$\sin 3x = \sin(-x)$$

$$3x = 2k\pi - x \quad \vee \quad 3x = 2k\pi + \pi + x$$

$$4x = 2k\pi$$

$$\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$$

$$2x = 2k\pi + \pi$$

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$k=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \quad \checkmark$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \quad \times$$

$$k=2 \Rightarrow x = \pi \quad \times$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) - 2\eta \mu(\pi + 2x)$ με $a > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)\eta \mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sin^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

$$\textcircled{a} \quad f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta \mu(\pi + 2x), \quad a > 0.$$

$$f(x) = a \eta \mu(2x) - 2(-\eta \mu 2x)$$

$$f(x) = a \eta \mu 2x + 2\eta \mu 2x = (a+2)\eta \mu 2x$$

$$\textcircled{b} \text{ i) } -1 \leq \eta \mu 2x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad (a+2)\eta \mu 2x \leq a+2.$$

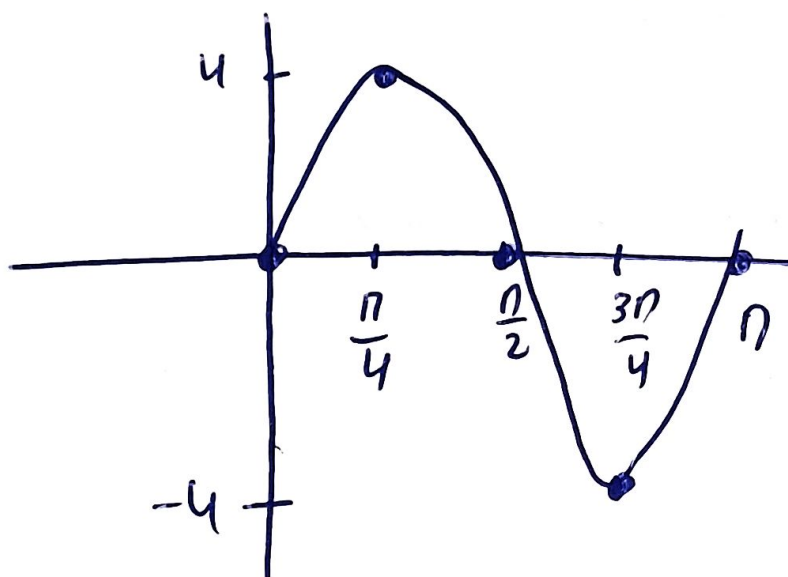
$$\text{Άρα } a+2=4 \quad (\Leftrightarrow) \quad a=2.$$

$$\text{ii) } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$f(x) = 4 \sin^2 2x$$

⑦

$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	0	4	0	-4	0



⑧ $g(x) = 5 - \sin^2 2x$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5 - \sin^2 2x = 4 \sin^2 2x$

$5 - (1 - \sin^2 2x) = 4 \sin^2 2x$

$\sin^2 2x - 4 \sin^2 2x + 4 = 0$

Δα εχον κοιν
σημει

$\Leftrightarrow 4 + \sin^2 2x - 4 \sin^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow [\sin^2 2x - 2]^2 = 0$

$\sin^2 2x = 2$
Αδυνα!

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\varepsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1, \omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε:

α)

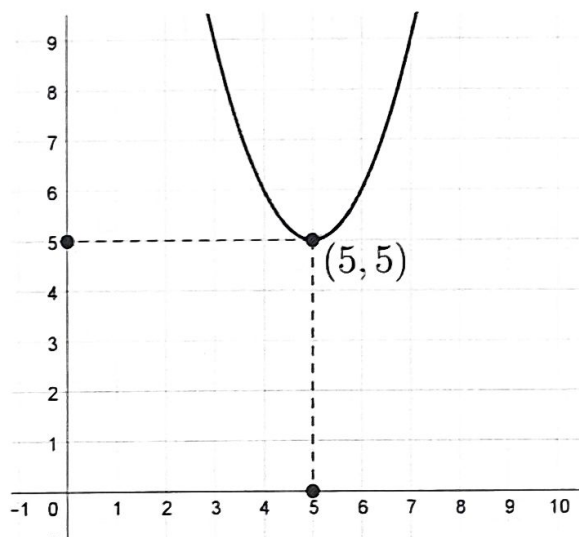
i. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 10)

ii. Για $\varepsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

$$\textcircled{a} \text{ i) } -2\sigma\omega^2\omega + \eta\rho\omega = -1$$

$$\omega \in 10$$

$$-2(1-\eta\rho^2\omega) + \eta\rho\omega = -1$$

$$-2 + 2\eta\rho^2\omega + \eta\rho\omega = -1$$

$$2\eta\rho^2\omega + \eta\rho\omega - 1 = 0$$

$$\boxed{\eta\rho\omega = t}$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$t = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} t = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\eta\rho\omega = \frac{1}{2}} \\ t = -1 \Rightarrow \eta\rho\omega = -1 \end{cases}$$

Ensom

$$\sigma\omega^2\omega + \eta\rho^2\omega = 1 \Rightarrow \sigma\omega^2\omega + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \sigma\omega^2\omega = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\sigma\omega\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}} \wedge \sigma\omega\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\rho\omega}{\sigma\omega\omega} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ii) } f(x) = 3 + \eta\rho x$$

$$\text{Min } f = 2$$

$$\text{Max } f = 4$$

$$\text{Ensom} \quad -1 \leq \eta\rho x \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad 2 \leq 3 + \eta\rho x \leq 4$$

$$2 \leq f(x) \leq 4$$

$$\textcircled{b} \text{ i) } \text{Min } g = 5$$

$$\text{ii) } \text{Apo}$$

$$f(x) \leq 4 < 5 \leq g(x)$$

$$f(x) < g(x) \quad \text{for } \varepsilon\chi\omega$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad -1 \leq \eta\mu\beta x \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad -\alpha \leq \alpha \eta\mu\beta x \leq \alpha$$

$$-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$$

$$\text{Αφαι} \quad f(x) \leq \alpha \quad \text{το} \quad \max f = \alpha = 2$$

$$\textcircled{\beta} \quad f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \quad \eta\mu\beta \frac{\pi}{16} = 2 \quad (\Rightarrow) \quad \eta\mu \frac{\beta\pi}{16} = 1$$

$$\eta\mu \frac{\beta\pi}{16} = \eta\mu \frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\beta\pi}{16} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \eta' \quad \frac{\beta\pi}{16} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ιδιαι}} \quad \frac{\beta\pi}{16} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Αρα} \quad \beta\pi = 32k\pi + 8\pi$$

$$\beta = 32k + 8$$

$$\text{Για } k=0 \text{ προκύπτει } 8 = \beta$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = 1 \quad \text{on} \quad [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$2np8x = 1$$

$$np8x = \frac{1}{2}$$

$$4p8x = np \frac{\pi}{6}$$

$$8x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{48}}$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{48} \quad \checkmark$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48} \quad \checkmark$$

$$k=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{48} = \frac{25\pi}{48} \quad \times$$

$$k=-1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = -\frac{11\pi}{48} \quad \times$$

$$\vee \quad 8x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$8x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\boxed{x = \frac{k\pi}{4} + \frac{5\pi}{48}}$$

$$x = \frac{5\pi}{48} \quad \checkmark$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} \quad \checkmark$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' .

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi \cdot 2}{\pi} = 4$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\beta} \quad -1 &\leq \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -2 \leq 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 2 \\ 1-2 &\leq 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 2+1 \\ \text{Min } f &\geq -1 \\ \text{Max } f &\leq 3, \\ -1 &\leq f(x) \leq 3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad f(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{6}, \quad (\Leftrightarrow) \quad \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\pi x}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\pi x = 4k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x = 4k - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{\pi x}{2} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\pi x = 4k\pi + 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x = 4k + 2 + \frac{1}{3}}$$

$$\textcircled{5} \quad (f(x)-1)^2 + (f(1-x)-1)^2 = 4$$

$$\left(1 + 2np \frac{nx}{2} - 1\right)^2 + \left(1 + 2np \left(\frac{n(1-x)}{2}\right) - 1\right)^2 = 4$$

$$4 np^2 \frac{nx}{2} + 4 np^2 \left(\frac{n-nx}{2}\right) = 4$$

$$np^2 \frac{nx}{2} + np^2 \left(\frac{n-nx}{2}\right) = 1.$$

$$\rightarrow np \left(\frac{n-nx}{2}\right) = np \left(\frac{n}{2} - \frac{nx}{2}\right) = \sigma w \frac{nx}{2}$$

$$np^2 \frac{nx}{2} + \sigma w^2 \frac{nx}{2} = 1$$

now isolating,

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\omega x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{\alpha} \quad -1 \leq \sigma\omega x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -2 \leq 2\sigma\omega x \leq 2 \quad \begin{array}{l} \text{Min } f = -2 \\ \text{Max } f = 2 \end{array}$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2\sigma\omega x = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sigma\omega x = \frac{1}{2}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \sigma\omega x = \sigma\omega \frac{\pi}{3} \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Για $k=0$ $x = \frac{\pi}{3}$ $x = -\frac{\pi}{3}$

$$\textcircled{\gamma} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ \end{array} \right\} \text{ Άρα } \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ . } \text{εκυ η Ηλ} \checkmark$$

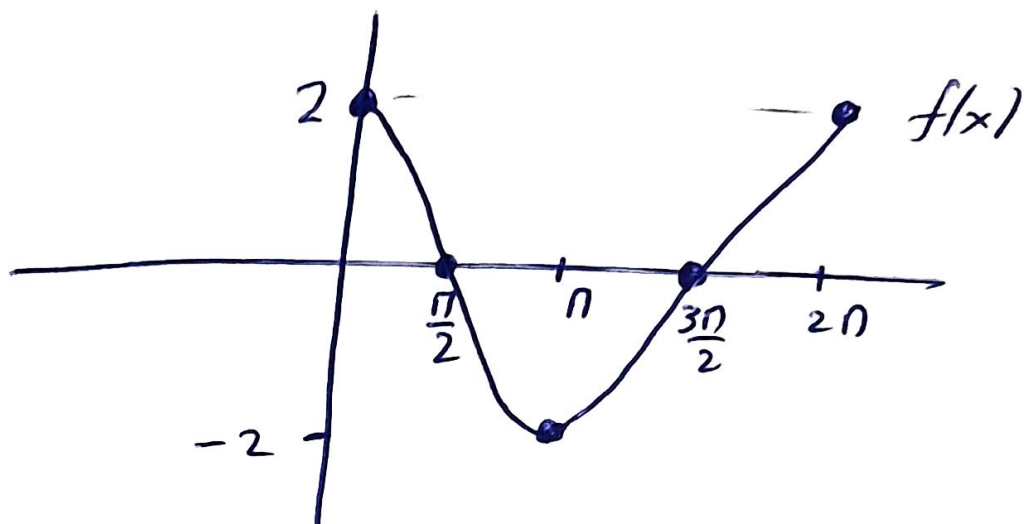
αρα $\frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5}$

$f \downarrow$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

⑧

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	1	0	-1	0	1
$f(x)$	2	0	-2	0	2



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$.

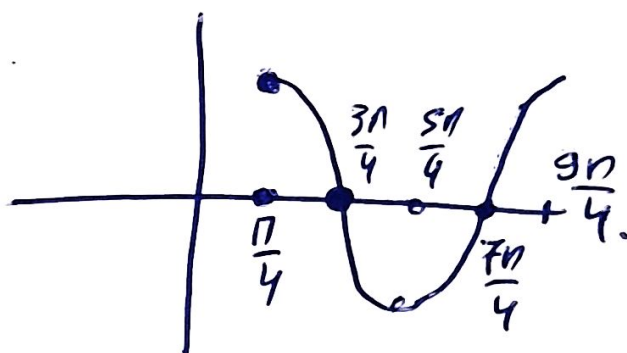
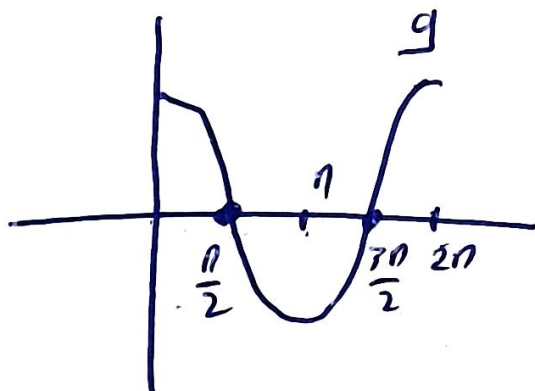
(Μονάδες 7)

α. $g(x) = \sin x$

$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Η f προκύπτει από ο μετασχηματισμό κατά $\frac{\pi}{4}$ δεξιά.

β



β. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\pi) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sigma_W\left(x - \frac{n}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_W\left(x - \frac{n}{4}\right) = -\sigma_W \frac{n}{4}.$$

$$\sigma_W\left(x - \frac{n}{4}\right) = \sigma_W\left(n - \frac{n}{4}\right).$$

$$x - \frac{n}{4} = 2kn + n - \frac{n}{4} \quad \leadsto \quad x - \frac{n}{4} = 2kn - n + \frac{n}{4}$$

$$x = 2kn + \frac{n}{2} - n$$

$$x = 2kn + n$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \frac{10\pi}{9}$.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad -\rho \leq \rho \eta\mu x \leq \rho \quad (\Rightarrow) \quad -\rho \leq f(x) \leq \rho$$

$$\min f = -2 \quad (\Rightarrow) \quad -\rho = -2 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\rho = 2}$$

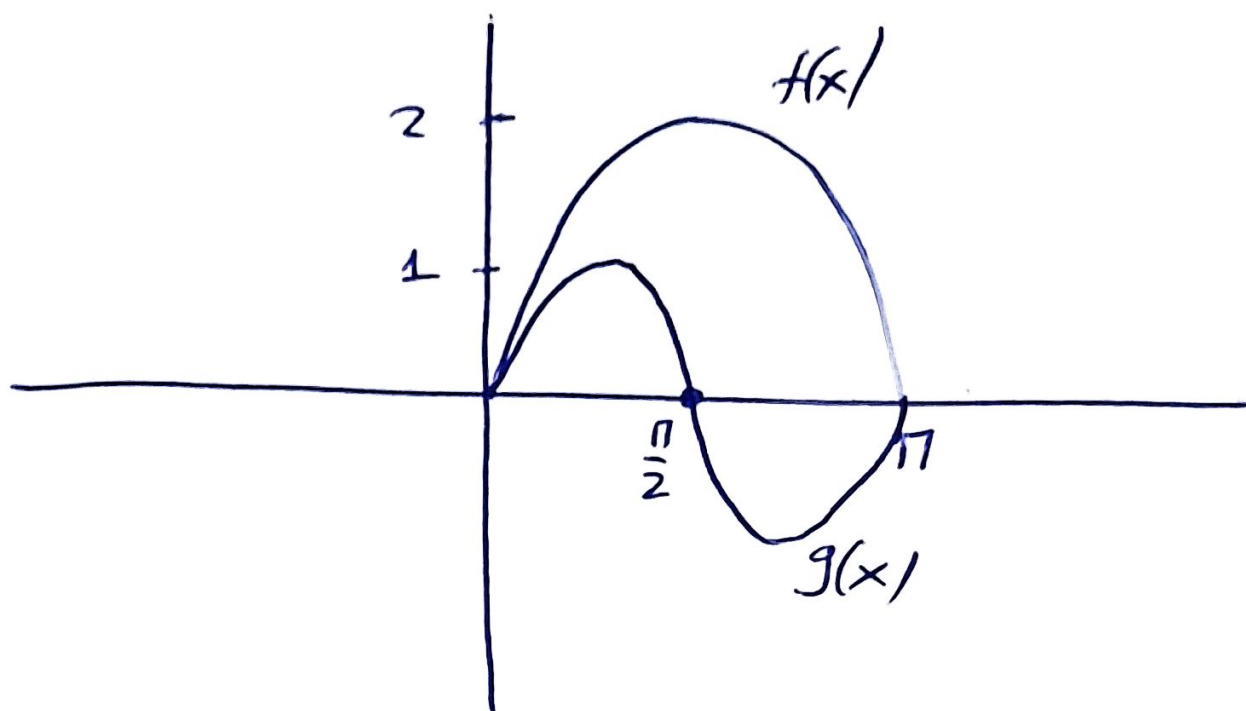
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\omega = 2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 2\eta\mu x \\ g(x) = \eta\mu 2x \end{array}}$$

β) i)

x	0	$\pi/2$	π
$\eta\mu x$	0	1	0
$f(x)$	0	2	0

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\eta\mu 2x$	0	1	0



ii). $2 \mu \frac{50}{9} > \mu \frac{100}{9}$

$$2 \mu \frac{50}{9} < \mu 2 \cdot \frac{50}{9}$$

$$f\left(\frac{50}{9}\right) > g\left(\frac{50}{9}\right)$$

Οταν $x \in \left(\frac{0}{2}, \pi\right)$ η $g(x) < f(x)$

Αρα αρα $\frac{50}{9} \in \left(\frac{0}{2}, \pi\right)$

Τοτε $f\left(\frac{50}{9}\right) > g\left(\frac{50}{9}\right)$

ΘΕΜΑ 4

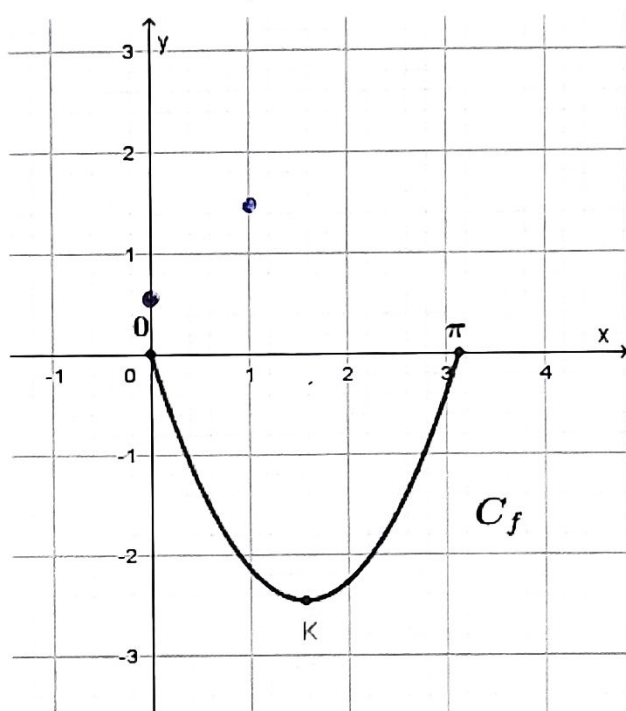
Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:

$$x = 0, \quad y = x^2 - \pi x, \quad y = \frac{1}{2} + \eta\mu x \quad \text{και} \quad x = 3$$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α)

- i. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.



Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 5)

- ii. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.

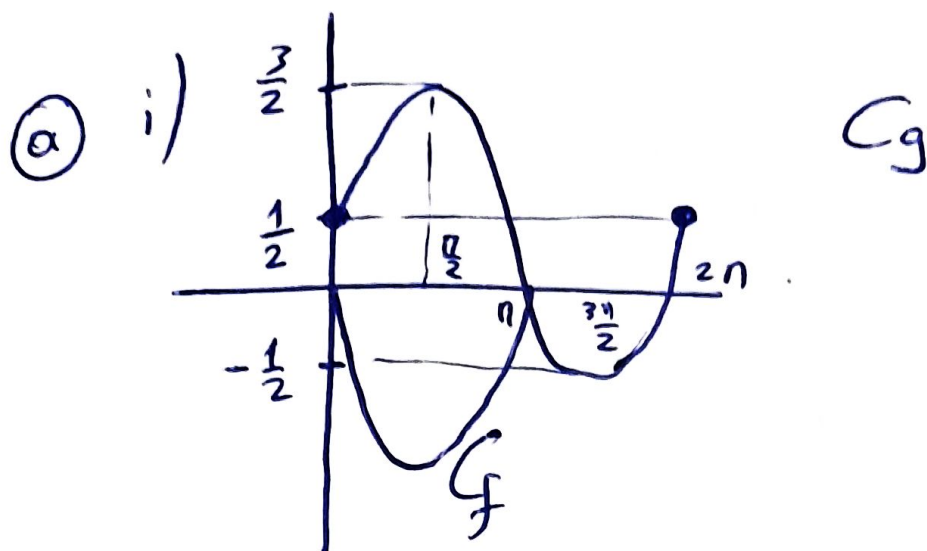
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

(Μονάδες 4)



ii). Η $g(x)$ $\nearrow$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
 Η $g(x)$ $\downarrow$ στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 Το $A(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}) \in \Omega$ και $B(\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{2}) \in \Omega$.

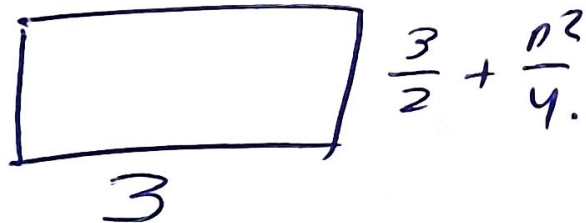
Η $f(x)$ είναι παραβολή άρα η κορυφή
 της είναι $K(-\frac{B}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ άρα $K(\frac{\pi}{2}, \infty)$

Η f $\downarrow$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $\nearrow$ στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
 και το $K(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}) \in \Omega$.

⑦ Η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση είναι
Η κατακόρυφη απόσταση γαλάζια είναι ΑΚ

$$AK = \frac{3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

⑧ Οι ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου
είναι



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

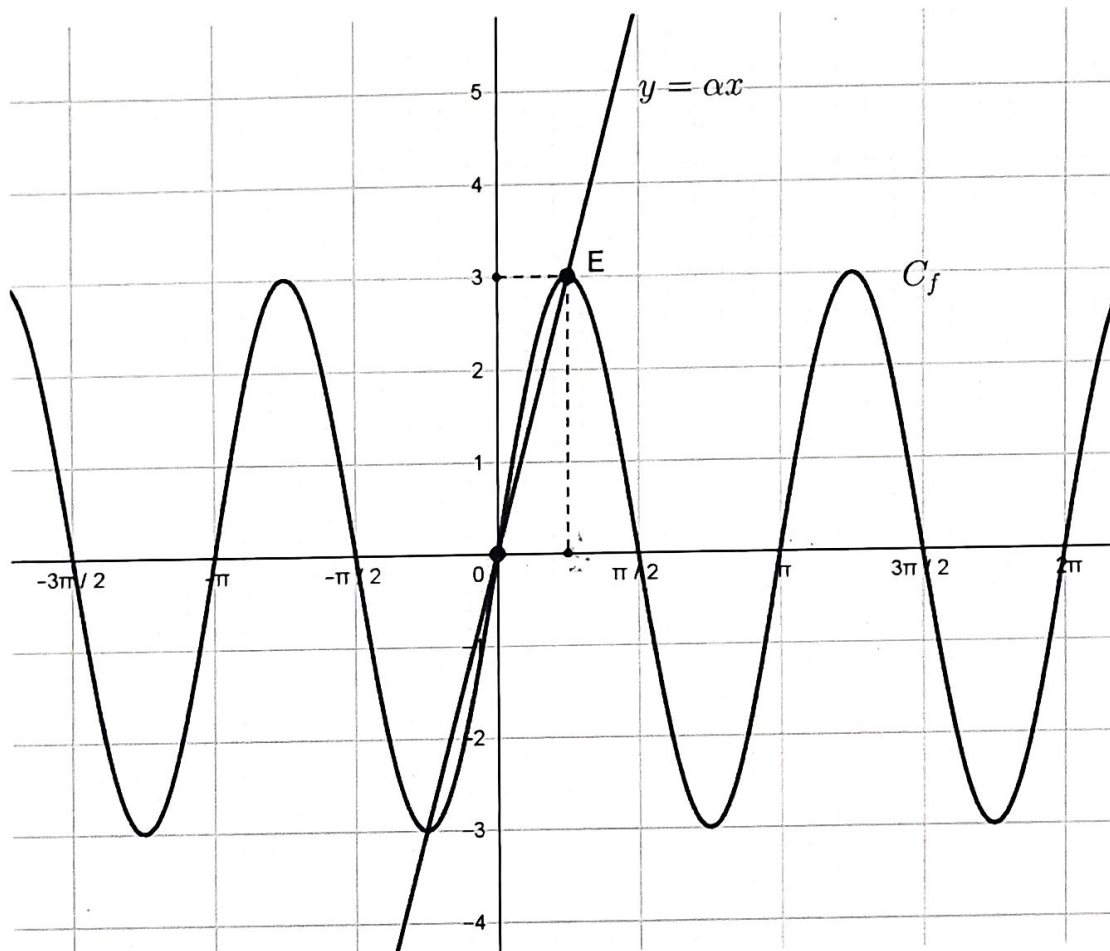
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3 \eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi} x = 0$.

(Μονάδες 10)



$$\textcircled{\alpha} \quad -1 \leq \eta \mu \omega x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -\rho \leq \rho \eta \mu \omega x \leq \rho$$

$$\quad \quad \quad -\rho \leq f(x) \leq \rho$$

$$\text{Max } f = 3 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\rho = 3}$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\omega = 2}$$

$$f(x) = 3 \eta \mu 2x.$$

$$\textcircled{B} \quad y = ax \longrightarrow \left(\frac{n}{4}, 3 \right)$$

$$3 = a \frac{n}{4}$$

$$\frac{12}{n} = a.$$

$$y = \frac{12}{n} x$$

$$\textcircled{f} \quad 3np2x - \frac{12}{n} x = 0$$

$$f(x) = y.$$

$$x = -\frac{n}{4}$$

$$x = \frac{n}{4}$$

$$x = 0.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

$$\textcircled{\alpha} \quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \quad (-) \quad -3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1$$

$$-3 \leq f(x) \leq 1$$

$$\text{Min } f = -3$$

$$\text{Max } f = 1$$

$$f(x) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad 2\eta\mu x - 1 = -3 \quad (\Rightarrow) \quad 2\eta\mu x = -2$$

$$\eta\mu x = -1$$



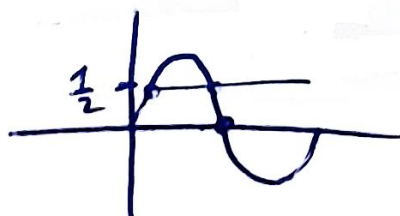
$$\underline{\underline{x = \frac{3\pi}{2}}}$$

$$f(x) = 1 \quad (\Rightarrow)$$

$$2\eta\mu x - 1 = 1 \quad (\Rightarrow) \quad 2\eta\mu x = 2 \quad (\Rightarrow) \quad \eta\mu x = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(0) = -1 \quad A(0, -1).$$

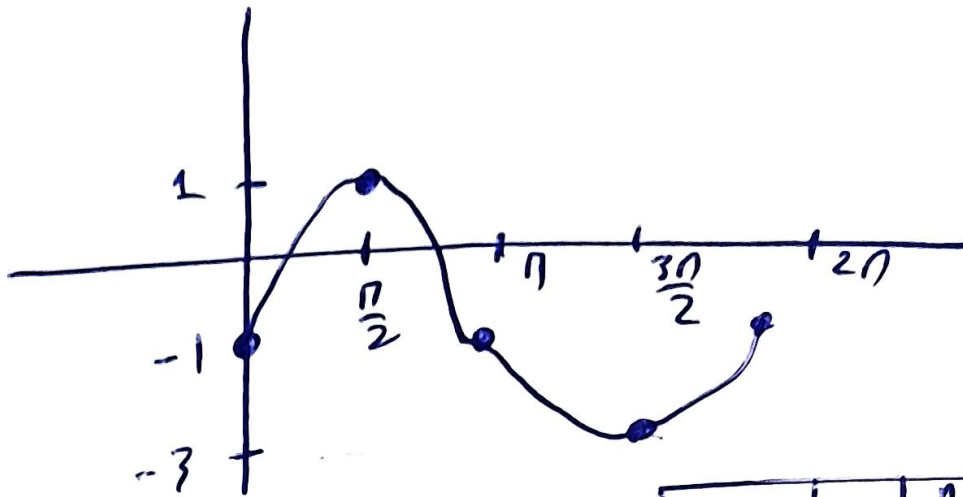
$$f(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2\eta\mu x - 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \eta\mu x = \frac{1}{2}$$



$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6}$$

8.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta \mu x$	0	1	0	-1	0
$2\eta \mu x$	0	2	0	-2	0
$f(x)$	-1	1	-1	-3	-1

8. $f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 1 = 2\sigma\omega\alpha - 1$.

Αρα $2\eta\mu\alpha - 1 = 2\sigma\omega\alpha - 1$

$\eta\mu\alpha = \sigma\omega\alpha$.

Αφού $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ το $\sigma\omega\alpha \neq 0$

$\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\omega\alpha} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\alpha = 1$
 $\epsilon\varphi\alpha = \epsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

$\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Για $k=0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x),$$

$$B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.

(Μονάδες 08)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

(Μονάδες 09)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\omega^2(-x)$$

$$A = \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x + \sigma\omega^2 x$$

$$A = \eta\mu^2 x + 1$$

$$\textcircled{\beta} \quad B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\omega x} + \frac{1 + \sigma\omega x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x}{(1 + \sigma\omega x)\eta\mu x} + \frac{(1 + \sigma\omega x)^2}{(1 + \sigma\omega x)\eta\mu x}$$

$$B = \frac{\eta\mu^2 x + 1 + \sigma\omega^2 x + 2\sigma\omega x}{(1 + \sigma\omega x)\eta\mu x} = \frac{2(1 + \sigma\omega x)}{(1 + \sigma\omega x)\eta\mu x}$$

$$B = \frac{2}{\eta\mu x}.$$

$$\textcircled{\delta} \quad A=B$$

$$\eta \rho^2 x + 1 = \frac{2}{\eta \rho x}$$

$$\eta \rho^3 x + \eta \rho x = 2$$

$$\eta \rho^3 x + \eta \rho x - 2 = 0.$$

$$\eta \rho x = t$$

$$t^3 + t - 2 = 0.$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\textcircled{1}$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \end{array}$$

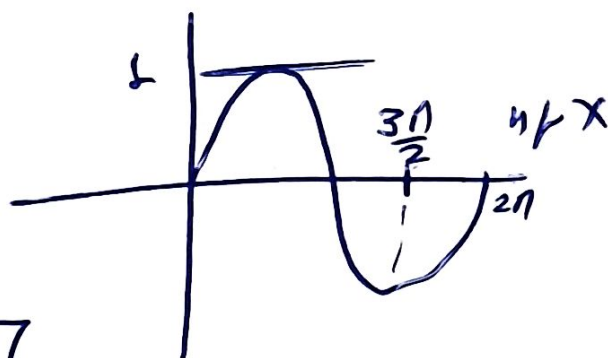
$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(t-1)(t^2+t+2) = 0$$

$$\Delta < 0$$

$$t=1$$

$$\eta \rho x = 1$$



Παρατηρούμε

όταν $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

το $\eta \rho x \in [-1, 0]$ από η $\eta \rho x = 1$ άδικα,

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

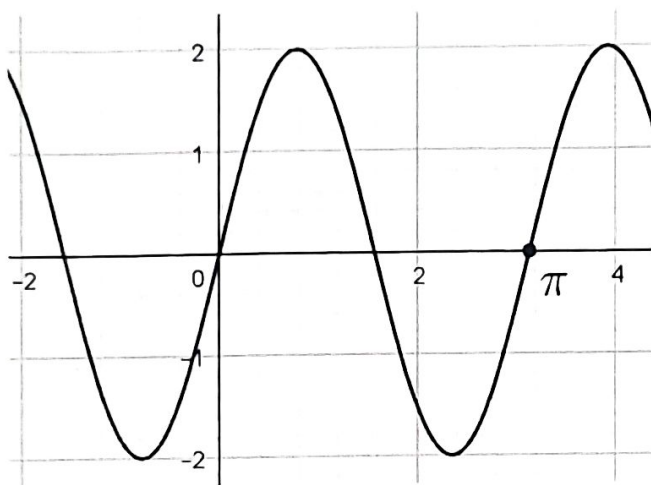
$$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.



(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 9)

α) i) $f(x) = \eta\mu\alpha x \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1$

$$f(x) = \eta\mu\alpha x \left[\eta\mu(\alpha x) + 2 \right] + \sigma\upsilon\nu^2\alpha x - 1$$

$$f(x) = \eta\mu^2\alpha x + 2\eta\mu\alpha x + \sigma\upsilon\nu^2\alpha x - 1$$

$$f(x) = 1 + 2\eta\mu\alpha x - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = 2\eta\mu\alpha x}$$

ii) $T = \pi = \frac{2\pi}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 2$.

$$(B) f(x) = 1.$$

$$2np^{2x} = 1$$

$$np^{2x} = \frac{1}{2} = np^{\frac{p}{6}}$$

$$2x = 2kn + \frac{n}{6}$$

$$\therefore 2x = 2kn + n - \frac{n}{6}.$$

$$x = kn + \frac{n}{12}$$

$$x = kn + \frac{n}{2} - \frac{n}{12}$$

$$x = kn + \frac{5n}{12}$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{n}{12}$$

$$x = \frac{5n}{12}$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{13n}{12} \quad 0 < x < 1$$

$$x = \frac{17n}{12} \quad 0 < x < 1$$