Θεματα πραγματικων αριθμων

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

α) $(2\alpha-1)(\beta-1)=1$

$2\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 1 = 1$

$2\alpha\beta - 2\alpha - \beta = 0$

$\boxed{2\alpha\beta = 2\alpha + \beta}$

β) Αρκει νδο $x+y=0$.

$\alpha - \beta + \alpha(1-2\beta) + 2\beta = 0$

$\alpha - \beta + \alpha - 2\alpha\beta + 2\beta = 0$

$\underbrace{2\alpha + \beta} - 2\alpha\beta = 0$

$2\alpha\beta - 2\alpha\beta = 0$

$0 = 0$

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

α $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2(x-4y)$

$4x+5y=-2x+8y$

$4x+2x=8y-5y$

$6x=3y$

$\boxed{y=2x}$

β $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x(2x)}$

$A=\frac{2x^2+3\cdot 4x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{4x^2+12x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

α) i) $(x+4y)(x+y)=9xy \Leftrightarrow x^2+xy+4xy+4y^2=9xy$

$\Leftrightarrow x^2-4xy+4y^2=0$

$(x-2y)^2=0.$

$(2y-x)^2=0$.

ii). Αφού $(2y-x)^2=0 \Rightarrow 2y-x=0 \Rightarrow 2y=x$

$y=\frac{x}{2}$.

β. $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$

$(2y-y)^2+(2y+y)^2=10y^2$

$y^2+(3y)^2=10y^2$

$y^2+9y^2=10y^2$

$10y^2=10y^2$

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

α i) νδο $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$

$2\alpha + \beta - (2\beta + \alpha) = \alpha - \beta$

$2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha = \alpha - \beta$

$\alpha - \beta = \alpha - \beta$.

$0 = 0$

$\alpha \neq \beta$

ii). νδο $\alpha + \beta = 1$.

Αφού $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$.

$\frac{\cancel{(\alpha - \beta)}(\alpha + \beta)}{\cancel{\alpha - \beta}} = \frac{\cancel{\alpha - \beta}}{\cancel{\alpha - \beta}} \Rightarrow \alpha + \beta = 1$

β $A = \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta)$

$= 3 \cdot 1 = 3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha=3\beta}$

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow \boxed{\delta=5\gamma}$

β). $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{5\beta\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

α) $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$

$\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha\frac{1}{\beta}+\beta\frac{1}{\alpha}+\beta\frac{1}{\beta}=4$

$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4 \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2.}$

β) νδο $\alpha=\beta$.

$\alpha\beta\frac{\alpha}{\beta}+\alpha\beta\frac{\beta}{\alpha}=2\alpha\beta$

$\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$

$(\alpha-\beta)^2=0$

$\alpha-\beta=0$

$\boxed{\alpha=\beta.}$

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

α $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

$A = 2(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) - 6xy - y^2$

$A = 2x^2 + 4xy + \cancel{2y^2} - x^2 + 2xy \cancel{-y^2} - 6xy \cancel{-y^2}$

$A = x^2$

β $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$

$B = 2 \cdot (2021+1)^2 - (2021-1)^2 - 6 \cdot 2021 \cdot 1 - 1$

$B = 2021^2$

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

(Μονάδες 13)

α i) $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \boxed{\beta+\gamma=-\alpha}$

ii) νδο $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$

όμως $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\dfrac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha$.

β $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=-\beta$ και. $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\gamma$

Άρα $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=-0$

$=0$.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

α) $(x-2y)^2 - 2(3-2xy) = 5y^2-1$.

$x^2-4xy+4y^2-6+4xy = 5y^2-1$.

$\boxed{x^2 - y^2 = 5}$

β) $P = (x+y)^3(x-y)^3$

$P = [(x+y)(x-y)]^3$

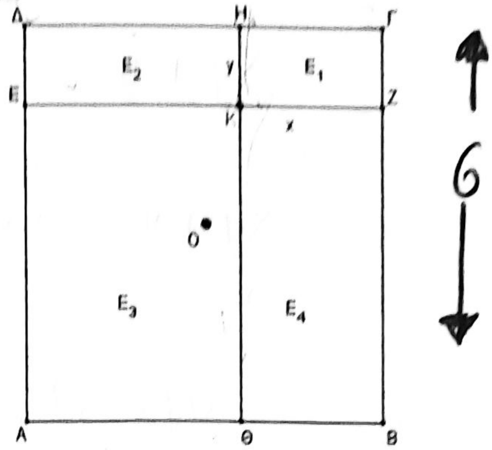
$P = (x^2-y^2)^3$

$P = 5^3$

$P = 125$.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:



α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

(Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

(Μονάδες 5)

α) $E_1 = xy$ $\quad E_2 = (6-x)y$ $\quad E_3 = (6-y)(6-x)$

$E_4 = (6-y)x$

β) Για $x=4$ και $y=2$ έχω $E_1 = 8$ $\quad E_2 = 4$

$E_3 = 8$ $\quad E_4 = 16$

γ) i) $E_1 + E_3 = E_2 + E_4 \Leftrightarrow xy + (6-y)(6-x) = y(6-x) + x(6-y)$

$\Leftrightarrow xy + 36 - 6x - 6y + xy = 6y - yx + 6x - xy$

$2xy + 36 = 12x + 12y - 2xy$

$4xy + 36 = 12x + 12y$

$xy + 9 = 3(x+y)$

11).

$$xy + 9 = 3(x+y)$$

$$xy + 9 = 3x + 3y$$

$$xy + 9 - 3x - 3y = 0$$

$$y(x-3) - 3(x-3) = 0$$

$$(x-3)(y-3) = 0$$

$x - 3 = 0$ ή $y - 3 = 0$

$x = 3$ $\qquad$ $y = 3$

Η ΕΘ διερχεται απο το κεντρο

Η ΕΖ διερχεται απο το κεντρο.

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

α) $\boxed{2 \le \alpha \le 4}$ (+)

$-4 \le \beta \le -3 \Rightarrow \boxed{-8 \le 2\beta \le -6}$

$-6 \le \alpha + 2\beta \le -2$

β) • $2 \le \alpha \le 4 \Leftrightarrow 4 \geq \alpha \geq 2$ (+)

$-4 \le \beta \le -3 \Leftrightarrow 4 \geq -\beta \geq 3$

$8 \geq \alpha - \beta \geq 5$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

α) $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$

$A = \alpha^2 + 4\alpha + 4 + 1$

$\boxed{A = (\alpha+2)^2 + 1.}$

β) i) $A + B \geq 0$

$(\alpha+2)^2 + \cancel{1} + (2\beta+1)^2 - \cancel{1} \geq 0$

$(\alpha+2)^2 + (2\beta+1)^2 \geq 0$

ii). $A + B = 0$

$(\alpha+2)^2 + (2\beta+1)^2 = 0$

$\begin{cases} \alpha + 2 = 0 \\ 2\beta + 1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$

$\beta = -\frac{1}{2}$,

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

α) $A = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

β) $A - B \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$

γ) $A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

(α) $0<\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{3}{\alpha}>\frac{3}{\beta}$

(β) $\left.\begin{array}{l} \alpha<\beta \Rightarrow \alpha^3<\beta^3 \\ \frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha} \end{array}\right\} \oplus \ \alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$.

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

(Μονάδες 13)

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ $\qquad$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$\alpha^2 + \cancel{\alpha} \frac{4}{\cancel{\alpha}} \geq 4\alpha$

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$

$(\alpha - 2)^2 \geq 0$ ✓

β) $\left.\begin{array}{l} \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \\ \beta + \frac{4}{\beta} \geq 4 \end{array}\right\} \odot \quad \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

(Μονάδες 13)

α) $(x-1)^2+(y+3)^2= x^2-2x+1+y^2+6y+9=$

$= x^2+y^2-2x+6y+10$,

β) $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2=0$

$$\begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow \underline{\underline{x=1}} \\ y+3=0 & \underline{\underline{y=-3}} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

α) $K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3-\beta)$

$K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta$

$\boxed{K - \Lambda = (\alpha^2 - 6\alpha + 9) + (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)}$

β) $K - \Lambda = \underbrace{(\alpha-3)^2}_{+} + \underbrace{(\alpha+\beta)^2}_{+}$

$\Rightarrow K - \Lambda \geq 0 \Rightarrow K \geq \Lambda$

γ) $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha-3)^2 + (\alpha+\beta)^2 = 0$

$\begin{cases} \alpha - 3 = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$ $\boxed{\alpha = 3}$

$\alpha = -\beta$

$3 = -\beta$

$\beta = -3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;

(Μονάδες 13)

α) $K \geqslant \Lambda \Rightarrow 2a^2+\beta^2 \geqslant 2a\beta$

$a^2+\beta^2-2a\beta+a^2 \geqslant 0$

$a^2+(\beta-a)^2 \geqslant 0$.

$+ \qquad +$

β) $K=\Lambda$

$2a^2+\beta^2=2a\beta$

$a^2+a^2-2a\beta+\beta^2=0$

$a^2+(a-\beta)^2=0$

$\begin{cases} a=0 \\ a-\beta=0 \Rightarrow a=\beta \Rightarrow \beta=0, \end{cases}$

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

(Μονάδες 13)

α) $(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17$

$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+8y+16=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2x+8y+17$

$\cancel{-2x}+\cancel{8y}+\cancel{17}=\cancel{-2x}+\cancel{8y}+\cancel{17}$

$0=0$

β) $x^2+y^2-2x+8y+17=0.$

$(x-1)^2+(y+4)^2=0$

$\begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow \underline{\underline{x=1}} \\ y+4=0 & \underline{\underline{y=-4}} \end{cases}$

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

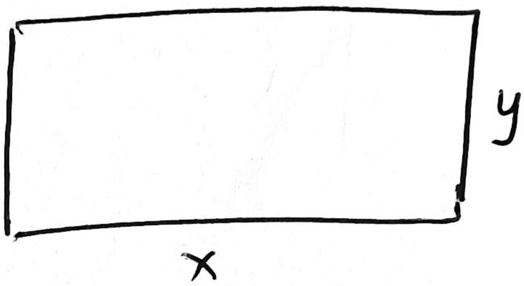
(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

α

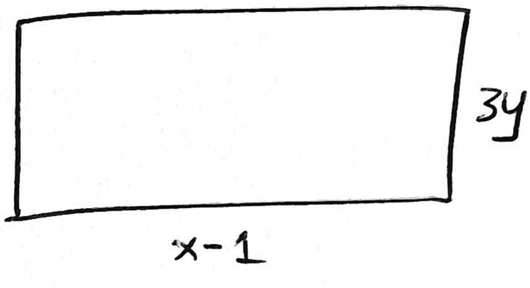
$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ 4 \leq x \leq 7 \iff 8 \leq 2x \leq 14 \\ &\bullet\ 2 \leq y \leq 3 \iff 4 \leq 2y \leq 6 \end{aligned}\right\} (+)$$



$$\boxed{\Pi = 2x + 2y}$$

$$12 \leq 2x + 2y \leq 20$$

$$\underline{\underline{12 \leq \Pi \leq 20}}$$



β . $\Pi = 2(x-1) + 2 \cdot 3y$

$$\boxed{\Pi = 2x - 2 + 6y.}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ 4 \leq x \leq 7 \iff 8 \leq 2x \leq 14 \\ &\bullet\ 2 \leq y \leq 3 \iff 12 \leq 6y \leq 18 \end{aligned}\right\} (+)\ 20 \leq 2x + 6y \leq 32$$

$$18 \leq 2x + 6y - 2 \leq 30$$

$$\underline{\underline{18 \leq \Pi \leq 30}}$$

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

α) $\left.\begin{array}{l} 2 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 2 \end{array}\right\} \oplus \quad 3 \le x+y \le 5$.

β) $2 \le x \le 3 \Rightarrow 4 \le 2x \le 6 \Leftrightarrow 6 \ge 2x \ge 4$

$1 \le y \le 2 \Rightarrow -3 \ge -3y \ge -6 \quad \Big] \oplus$

$\underline{\underline{3 \ge 2x-3y \ge -2}}$

γ) $\left.\begin{array}{l} 2 \le x \le 3 \Rightarrow 3 \ge x \ge 2 \\ 1 \le y \le 2 \Rightarrow 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \end{array}\right\} \odot \quad \underline{\underline{3 \ge \frac{x}{y} \ge 1}}$

Θεματα Απολυτων τιμων

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$.

(Μονάδες 15)

α) $|x+2|<1$

$-1<x+2<1$

$-3<x<-1$

β) $|2x+4|<2$

$2|x+2|<2$

$|x+2|<1$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

α) $d(2x,3) = 3-2x$

$|2x-3| = 3-2x$ ⟶ αυτο ισχυει

Πρεπει $2x-3 \leq 0 \Rightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

β) $K = |2x-3| - 2|3-x|$

• $x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow 2x-3 \leq 0$

• $x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 3-x \geq 3-\frac{3}{2}$

$3-x \geq \frac{6}{2}-\frac{3}{2}$

$3-x \geq \frac{3}{2}$

$3-x > 0$

$K = -2x+3-2(3-x)$

$K = -\cancel{2x}+3-6+\cancel{2x}$

$K = -3$.

ΘΕΜΑ 2

α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

Α. Κ=|x+1|+|x-2| Β. Κ=|x-1|+|x+2| Γ. Κ=(|x|+1)+(|x|-2)

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι Κ=|x+1| + |x-2| τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ όταν $x=\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

ii) Αν x>2 να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι Κ>3.

(Μονάδες 10)

α) Η αποσταση του x απο το 2 ειναι

$d(x,2) = |x-2|$

Ενω η αποσταση του x απο το -1

$d(x,-1) = |x-(-1)| = |x+1|$

Σωστο το α) $|x-2| + |x+1|$

β) i) $k = |x+1| + |x-2|$ για $x = \frac{3}{2}$

$k = \left|\frac{3}{2}+1\right| + \left|\frac{3}{2}-2\right| = \left|\frac{3}{2}+\frac{2}{2}\right| + \left|\frac{3}{2}-\frac{4}{2}\right| = \left|\frac{5}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|$

$k = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

iii) Αν $x>2$ τότε $K = |\overset{\oplus}{x+1}| + |\overset{\oplus}{x-2}|$

• $x>2 \Rightarrow x+1>3 \Rightarrow x+1>0$

• $x>2 \Rightarrow x-2>0$

$K = x+1 + x-2 = 2x-1$

$$\boxed{K = 2x-1}$$

• $x>2 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow 2x-1>3$

$K>3$.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει $x^2<1$.

(Μονάδες 13)

α) $|2x|<2$

$-2<2x<2$

$-1<x<1$

β) $x^2<1$

$x^2-1<0$

$(x-1)(x+1)<0$ Ισχυει!

$\ominus \quad \oplus$

- $-1<x<1 \Leftrightarrow -2<x-1<0$

- $-1<x<1 \Rightarrow 0<x+1<2$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A=3x-4$.

ii. για κάθε $x<2$, $A=8-3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4.$$

(Μονάδες 13)

(α) $A=|3x-6|+2$

i) $x \geq 2 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow 3x-6 \geq 0$

$A=|\overset{+}{3x-6}|+2 = 3x-6+2 = 3x-4$

ii) Αν $x<2 \Rightarrow 3x<6 \Rightarrow 3x-6<0$

$A=|\overset{-}{3x-6}|+2 = 6-3x+2 = 8-3x$

(β) $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \dfrac{9x^2-16}{A} \overset{x\geq 2}{=} \dfrac{9x^2-16}{3x-4} =$

$= \dfrac{\cancel{(3x-4)}(3x+4)}{\cancel{3x-4}} = 3x+4.$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y-3|<1$

(Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

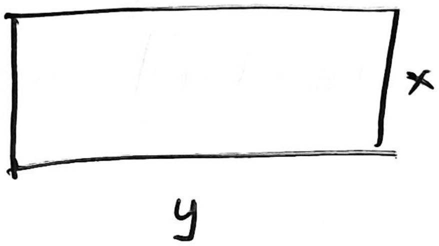
(Μονάδες 13)

α) $|y-3|<1 \iff -1<y-3<1$

$3-1 \leq y < 3+1$

$\boxed{2<y<4}$

β) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ 2<y<4 \\ \bullet\ 1<x<3 \end{array}\right\} \odot$



$\boxed{E_{ορθ} = xy}$

$2<xy<12$

$2<E<12$

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

(Μονάδες 9)

α)
- $\alpha < 0$
- $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta < 0$
- $\beta < \gamma \Rightarrow 0 < \gamma - \beta$
- $\beta > 0$

$$A = \overset{\ominus}{\alpha}(\overset{\ominus}{\alpha - \beta})(\overset{\oplus}{\gamma - \beta})\overset{\oplus}{\beta} > 0$$

β) Νδο $\alpha + |\overset{\ominus}{\alpha - \beta}| + |\overset{\oplus}{\gamma - \beta}| - \gamma = 0$

- $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta < 0$
- $\beta < \gamma \Rightarrow 0 < \gamma - \beta$

$$\cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} + \cancel{\beta} + \cancel{\gamma} - \cancel{\beta} - \cancel{\gamma} = 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha-3| = 3-\alpha$ και $|\beta+2| = \beta+2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \le \alpha+\beta \le 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

α) ΝΔΟ $|\alpha-3| = 3-\alpha$

- $2 \le \alpha \le 3 \Leftrightarrow -1 \le \alpha-3 \le 0$ άρα $|\overset{\ominus}{\alpha-3}| = 3-\alpha$

ΝΔΟ $|\beta+2| = \beta+2$

- $-2 \le \beta \le -1 \Leftrightarrow 0 \le \beta+2 \le 1$ άρα $|\overset{\oplus}{\beta+2}| = \beta+2$

β) ΝΔΟ $0 \le \alpha+\beta \le 2$

- $2 \le \alpha \le 3$
- $-2 \le \beta \le -1$

$\Big\}\oplus \quad 0 \le \alpha+\beta \le 2$

γ) $|\overset{\oplus}{\alpha+\beta}| + |\overset{\ominus}{\alpha-3}| - |\overset{\oplus}{\beta+2}| = \cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{\alpha}+3-\cancel{\beta}-2 = 1$.

- $0 \le \alpha+\beta \le 2$
- $2 \le \alpha \le 3 \Rightarrow -1 \le \alpha-3 \le 0$
- $-2 \le \beta \le -1 \Leftrightarrow 0 \le \beta+2 \le 1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (*1*).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6,8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3,4)$.

(Μονάδες 13)

α) $|x-7| < 1$

Ιδιοτητα

$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

$-1 < x-7 < 1$

$7-1 < x < 7+1$

$6 < x < 8$

$x \in (6,8)$

β) Αν $6 < k < 8$

$\frac{1}{6} > \frac{1}{k} > \frac{1}{8}$

$\frac{24}{6} > \frac{24}{k} > \frac{24}{8}$

$4 > \frac{24}{k} > 3$

$\frac{24}{k} \in (3,4)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$.

(Μονάδες 12)

β) $0<A<4$.

(Μονάδες 13)

α) $A = |\overset{(+)}{x-1}| + |\overset{(-)}{y-3}| = x-1-y+3 = x-y+2$

- $1<x<4 \Leftrightarrow 0<x-1<3$
- $2<y<3 \Leftrightarrow -1<y-3<0$

β)
- $1<x<4 \Leftrightarrow 4>x>1$
- $2<y<3 \Rightarrow -2>-y>-3$

$\Big\} \oplus \quad 2>x-y>-2$

$4>x-y+2>0$

$4>A>0$

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1).

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ⓐ $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$

$\frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \iff |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha||\beta|$

$\iff |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \geq 0$

$(|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0$.

ⓑ $(|\alpha| - |\beta|)^2 = 0$

$|\alpha| - |\beta| = 0$

$|\alpha| = |\beta|$

$\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

α) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

$\alpha^2 + 1 \geq -2\alpha$ γιατί $\alpha < 0$

$\alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0$

$(\alpha + 1)^2 \geq 0$ ✓

β) $|\alpha| + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \geq 2$

$|\alpha| + \frac{1}{|\alpha|} \geq 2$

$|\alpha|^2 + 1 \geq 2|\alpha|$

$|\alpha|^2 - 2|\alpha| + 1 \geq 0$

$(|\alpha| - 1)^2 \geq 0$ ✓

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

α) $|\overset{+}{x-5}| = x-5$

- $5 < x < 10 \Rightarrow 0 < x-5 < 5$

$|\overset{-}{x-10}| = 10-x$

- $5 < x < 10 \Rightarrow -5 < x-10 < 0$

β) $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} - \frac{x-10}{x-10}$

$= 1 - 1 = 0.$

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha+\beta > \dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

(Μονάδες 13)

α) $\dfrac{\alpha-\beta}{\overset{(+)}{|\alpha-\beta|}} - \dfrac{\overset{(-)}{|1-\alpha|}}{1-\alpha} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} - \dfrac{\alpha-1}{1-\alpha} \overset{(*)}{=}$

- $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha-\beta>0$
- $\alpha>1 \Rightarrow 1-\alpha<0$

$\overset{(*)}{=} 1 + \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1+1=2$

β) Νδο $\alpha+\beta > \dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \alpha>1 \\ \bullet\ \beta>1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \alpha+\beta>2 \iff \alpha+\beta > \dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β.

(Μονάδες13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|.$$

(Μονάδες 12)

(α) Αφού $(\alpha-1)(1-\beta)>0$ τότε οι

$\alpha-1$ και $1-\beta$ είναι ομόσημοι

- $\alpha-1<0 \Leftrightarrow \alpha<1$
- $1-\beta<0 \Leftrightarrow \beta>1$

ή

$\alpha-1>0 \Rightarrow \alpha>1$

$1-\beta>0 \Rightarrow \beta<1$

$\boxed{\alpha<1<\beta}$ $\boxed{\beta<1<\alpha}$

(β). $|\beta-\alpha|=4$

Διακρίνω περιπτώσεις

1) Αν $\beta<1<\alpha$ τότε $1<\alpha \Rightarrow \alpha-1>0$

$\beta<1 \Rightarrow 1-\beta>0.$

Άρα $K=|\overset{+}{\alpha-1}|+|\overset{+}{1-\beta}| = \alpha-1+1-\beta = \alpha-\beta = 4$

$\rightarrow |\overset{-}{\beta-\alpha}|=4 \Leftrightarrow \underline{\alpha-\beta=4}$ $\Leftrightarrow \underline{K=4}$

- $\beta<\alpha \Rightarrow \beta-\alpha<0$

(2) Αν $\alpha < 1 < \beta$ τότε $\alpha < 1 \Rightarrow \alpha - 1 < 0$

$\beta > 1 \Rightarrow 1 - \beta < 0$

$K = |\overset{\ominus}{\alpha - 1}| + |\overset{\ominus}{1 - \beta}| = -\alpha + 1 - 1 + \beta = \beta - \alpha = 4$

όμως $|\overset{\oplus}{\beta - \alpha}| = 4 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 4$ $\quad$ $K = 4$

- $\alpha < \beta \Rightarrow \beta - \alpha > 0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$.

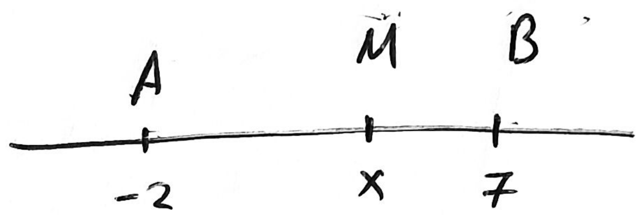
(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)



(α) i) $|x+2| = d(x,-2)$ Η αποσταση ΑΜ

ii). $|x-7| = d(x,7)$ Η αποσταση ΜΒ.

(β) $|x+2|+|x-7| = AM + MB = AB$

(γ) $|x+2|+|x-7| = AB = 9$

(δ) $\overset{(+)}{|x+2|}+\overset{(-)}{|x-7|} = x+2-x+7 = 9$.

- $-2<x<7 \Leftrightarrow 0<x+2<9$
- $-2<x<7 \Leftrightarrow -9<x-7<0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \le \beta \le 2$ και $2 \le \alpha \le 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

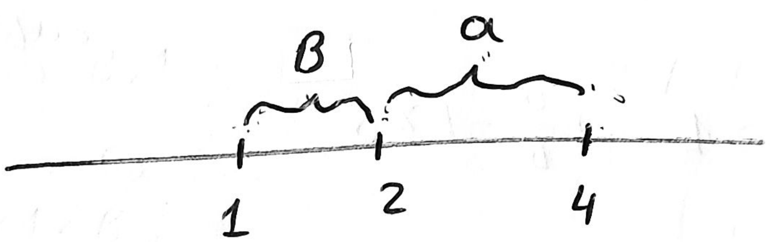
i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

(Μονάδες 6)

α i)



Άρα $d(\alpha,\beta) \le 3$

ii).

$\bullet\ 1 \le \beta \le 2 \iff 2 \ge \beta \ge 1$

$\bullet\ 2 \le \alpha \le 4 \iff -2 \ge -\alpha \ge -4$ (+)

$0 \ge \beta - \alpha \ge -3$

$0 \le \alpha - \beta \le 3$

$d(\alpha,\beta) \le 3$.

(B) i) $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta} \iff \beta^2 \leq \alpha\beta \leq \alpha^2$

Αρκει νδο $\beta^2 \leq \alpha\beta$ κ' $\alpha\beta \leq \alpha^2$

$\left.\begin{array}{l}\alpha>0\\ \beta>0\end{array}\right\}\alpha\beta>0$

οπου $\alpha>0, \beta>0$

$\underbrace{\beta \leq \alpha \quad κ' \quad \beta \leq \alpha}_{\text{που ισχυει.}}$

ii) $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right| \iff 1-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}-1$

$2 = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

• $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow 1-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0$

$2\alpha\beta = \alpha^2+\beta^2$

• $\frac{\alpha}{\beta} \geq 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}-1 \geq 0$

$0 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$0 = (\alpha-\beta)^2$

$\alpha = \beta$

Αρα $\alpha=\beta=2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

α) $A = \sqrt{3}^6 = (\sqrt{3}^2)^3 = 3^3 = 27$

$B = \sqrt[3]{3}^6 = (\sqrt[3]{3}^3)^2 = 3^2 = 9$

$A - B = 27 - 9 = 18$

β) Έστω $\sqrt{3} < \sqrt[3]{3}$

$\sqrt{3}^6 < \sqrt[3]{3}^6$

$27 < 9$

Ατοπο!

Άρα $\sqrt{3} > \sqrt[3]{3}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$

(Μονάδες 13)

α) $\alpha+\beta = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) =$

$= \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}) = \frac{1}{2}6 = 3$

$\alpha\beta = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(3^2-\sqrt{5}^2) =$

$= \frac{1}{4}(9-5) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1.$

β) $\alpha^2+\beta^2 = \left[\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right]^2 + \left(\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}(9+6\sqrt{5}+5) + \frac{1}{4}(9-6\sqrt{5}+5) =$

$= \frac{1}{4}(14+\cancel{6\sqrt{5}}+14-\cancel{6\sqrt{5}}) = \frac{1}{4}\cdot 28 = 7.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$.

(Μονάδες 10)

α) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}+1)^2=$

$=3-\cancel{2\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}^2-1^2+3+\cancel{2\sqrt{3}}+1=$

$=4+3-\cancel{1}+3+\cancel{1}=10.$

β) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=4$

$\beta^2+\alpha^2=4\alpha\beta$

$(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2=4(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

$3+\cancel{2\sqrt{3}}+1+3-\cancel{2\sqrt{3}}+1=4(\sqrt{3}^2-1^2)$

$8=8.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$.

(Μονάδες 12)

α) πρεπει $(x-2)^5 \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$x \in [2,+\infty)$

β) Για $x=4$ το $B=\sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

Αρα $B^2+6B=B^4$

$2^2+6\cdot 2=2^4$

$4+12=16$

$16=16$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt[3]{2}$$

(Μονάδες 12)

α) $A = \sqrt{2}^6 = (\sqrt{2}^2)^3 = 2^3 = 8$

$B = \sqrt[3]{2}^6 = (\sqrt[3]{2}^3)^2 = 2^2 = 4$

Άρα $A-B = 8-4 = 4$

β) Αφού $A-B=4$ τότε $A-B>0 \Rightarrow A>B$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}^6 > \sqrt[3]{2}^6 \Leftrightarrow \underline{\sqrt{2} > \sqrt[3]{2}}$

Έστω $\underline{1 < \sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow 1^3 < \sqrt[3]{2}^3 \Leftrightarrow 1 < 2$

που ισχύει.

Άρα $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

(Μονάδες 13)

α) $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

$3^3 < \sqrt[3]{30}^3 < 4^3$

$27 < 30 < 64$

που ισχύει!.

β) Εστω $\sqrt[3]{30} < 6 - \sqrt[3]{30}$

$\sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{30} < 6$

$2\sqrt[3]{30} < 6$

$\sqrt[3]{30} < 3$

$30 < 27$

που δεν ισχυεί!

Αρα $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=-3$ να αποδείξετε ότι $A^3+A^2+A+1=0$.

(Μονάδες 12)

α) πρέπει $1-x \geq 0$ και $x^4 \geq 0$ είναι!

$x \leq 1$

$x \in (-\infty, 1]$

β) Για $x=-3$ έχω $A=\sqrt{1-(-3)}-\sqrt[4]{(-3)^4}$

$A=\sqrt{4}-|-3|=2-3=-1$.

Άρα $A^3+A^2+A+1=0$

$(-1)^3+(-1)^2-1+1=0$

$-1+1-1+1=0$

$0=0$.

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

α) $\sqrt{20} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5} = 2\cdot 2{,}24 = 4{,}48$

$\sqrt{45} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5} = 3\cdot 2{,}24 = 6{,}72$

$\sqrt{80} = \sqrt{5}\sqrt{16} = 4\sqrt{5} = 4\cdot 2{,}24 = 8{,}96$

β) $$\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} = \frac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10\cancel{\sqrt{5}}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = 5.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=(\sqrt{2})^6, \quad B=(\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma=(\sqrt[6]{6})^6.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

(Μονάδες 12)

α) $A = \sqrt{2}^6 = (\sqrt{2}^2)^3 = 2^3 = 8$

$B = \sqrt[3]{3}^6 = (\sqrt[3]{3}^3)^2 = 3^2 = 9$

$\Gamma = \sqrt[6]{6}^6 = 6$

Άρα $A+B+\Gamma = 8+9+6 = 23$

β) Έστω $\sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{6}$

$\sqrt[3]{3}^6 < \sqrt[6]{6}^6$

$(\sqrt[3]{3}^3)^2 < 6$

$3^2 < 6$

$9 < 6$ δεν ισχύει!

Άρα

$\sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{6}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

α) πρέπει $x^2+4x+4 \geq 0$ και $x^2-6x+9 \geq 0$

$(x+2)^2 \geq 0$ που ισχύει. $(x-3)^2 \geq 0$ που ισχύει.

και $x+2 \neq 0$ και $x-3 \neq 0$

$x \neq -2$ $x \neq 3$.

Πρέπει $x \in R - \{-2, 3\}$.

β) $\boxed{-2 < x < 3}$

$$K = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{\overset{+}{|x+2|}}{x+2} - \frac{\overset{-}{|x-3|}}{x-3} \overset{*}{=}$$

• $-2 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < x+2 < 5$

• $-2 < x < 3 \Rightarrow -5 < x-3 < 0$

$$\overset{*}{=} \frac{x+2}{x+2} + \frac{x-3}{x-3} = 1+1 = 2.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)

α) $2<\sqrt{5} \Leftrightarrow 2^2<\sqrt{5}^2 \Leftrightarrow 4<5$ που ισχύει.

β) $(2-\sqrt{5})^2=9-4\sqrt{5}$

$\rightarrow 2^2-4\sqrt{5}+\sqrt{5}^2 = 4-4\sqrt{5}+5 = 9-4\sqrt{5}$.

γ) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2$

$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$

$\Leftrightarrow$

$|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$

• $2<\sqrt{5} \Rightarrow 2-\sqrt{5}<0$

$-2+\sqrt{5} = \sqrt{5}-2$

$0=0$

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $\Lambda = 2-\sqrt{3}$, $\mathrm{B} = 2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$.

(Μονάδες 13)

α $A \cdot B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4-3 = 1$.

β $\Pi = \alpha^2 + \beta^2 = (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 =$

$= 4 - \cancel{4\sqrt{3}} + 3 + 4 + \cancel{4\sqrt{3}} + 3 = 14$.

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 10)

α) $A\cdot B\cdot \Gamma = \sqrt[3]{5}\,\sqrt{3}\,\sqrt[6]{5} =$

$= 5^{\frac{1}{3}}\,3^{\frac{1}{2}}\,5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\,3^{\frac{1}{2}} =$

$= 5^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}\,3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}}\,3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{2}}$

$= (5\cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$

β) Έστω $A<B \Leftrightarrow \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5}^{\,6} < \sqrt{3}^{\,6}$

$\left(\sqrt[3]{5}^{\,3}\right)^2 < \left(\sqrt{3}^{\,2}\right)^3$

$5^2 < 3^3$

$25<27$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;

(Μονάδες 07)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;

(Μονάδες 08)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A=B$.

(Μονάδες 10)

(α) πρέπει $(x-2)^2 \geq 0$ που ισχύει

Η A ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β) πρέπει $(2-x)^3 \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

$x \in (-\infty, 2]$.

(γ) $A=\sqrt{(x-2)^2} = |\overset{\ominus}{x-2}| = -x+2$

• $x \leq 2 \Rightarrow x-2 \leq 0$

$B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x$

$A=B$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $(2-\sqrt{5})^2 = 9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2+\sqrt{5})^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

(α) $(2-\sqrt{5})^2 = 9-4\sqrt{5}$

$4-\cancel{4\sqrt{5}}+5 = 9-\cancel{4\sqrt{5}}$

$9=9$

$(2+\sqrt{5})^2 = 4+4\sqrt{5}+5 = 9+4\sqrt{5}$.

(β) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |\overset{\ominus}{2-\sqrt{5}}| = \sqrt{5}-2$

$\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = |\overset{\oplus}{2+\sqrt{5}}| = 2+\sqrt{5}$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $(2+\sqrt{5})^2 = 9+4\sqrt{5}$ και $(1-\sqrt{5})^2 = 6-2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = 1+2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

α) $(2+\sqrt{5})^2 = 9+4\sqrt{5}$

$4+\cancel{4\sqrt{5}}+5 = 9+\cancel{4\sqrt{5}}$

$9=9$

$(1-\sqrt{5})^2 = 6-2\sqrt{5}$

$1-\cancel{2\sqrt{5}}+5 = 6-\cancel{2\sqrt{5}}$

$6=6$

β) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = 1+2\sqrt{5}$

$\sqrt{(2+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = 1+2\sqrt{5}$

$\overset{+}{|2+\sqrt{5}|} + \overset{-}{|1-\sqrt{5}|} = 1+2\sqrt{5}$

$2+\sqrt{5} -1+\sqrt{5} = 1+2\sqrt{5}$

$1+2\sqrt{5} = 1+2\sqrt{5}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha = 1+\sqrt{2}$ και $\beta = 1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B} = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\Lambda = 4\sqrt{2}$ και $\mathrm{B} = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

α) $A = a^2 - B^2 = (1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2$

$A = 1+2\sqrt{2}+2-(1-2\sqrt{2}+2) = 3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}$

$A = 4\sqrt{2}$.

β) $B = \sqrt{a^2} - \sqrt{B^2} = |a| - |B| = |1+\sqrt{2}| - |1-\sqrt{2}|$

$= 1+\sqrt{2} - (-1+\sqrt{2}) = 1+\cancel{\sqrt{2}}+1-\cancel{\sqrt{2}} = 2$

γ) $\sqrt{a^2 - B^2} > \sqrt{a^2} - \sqrt{B^2}$

$\sqrt{A} > B \iff A > B^2 \iff$

$\iff 4\sqrt{2} > 4 \iff \sqrt{2} > 1 \iff 2 > 1$ που ισχύει