

Θεωρία Πραγματικών Αριθμών

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

α) $(2\alpha - 1)(\beta - 1) = 1$

$$2\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 1 = 1$$

$$2\alpha\beta - 2\alpha - \beta = 0$$

$$\boxed{2\alpha\beta = 2\alpha + \beta}$$

β) Αρκεί να $x + y = 0$.

$$\alpha - \beta + \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta = 0$$

$$\alpha - \beta + \alpha - 2\alpha\beta + 2\beta = 0$$

$$\underbrace{2\alpha + \beta - 2\alpha\beta = 0}$$

$$2\alpha\beta - 2\alpha\beta = 0$$

$$0 = 0$$

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha' = 2\alpha + \beta \text{ και } \beta' = 2\beta + \alpha.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta.$

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1.$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2.$

(Μονάδες 9)

α) i) $\forall \delta \alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$

$$2\alpha + \beta - (2\beta + \alpha) = \alpha - \beta$$

$$2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha = \alpha - \beta$$

$$\alpha - \beta = \alpha - \beta.$$

$$0 = 0$$

ii). $\forall \delta \alpha + \beta = 1.$

Αφού $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta.$$

$$\frac{(\cancel{\alpha - \beta})(\alpha + \beta)}{\cancel{\alpha - \beta}} = \frac{\cancel{\alpha - \beta}}{\cancel{\alpha - \beta}}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

β) $A = \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta)$
 $= 3 \cdot 1 = 3,$

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad \boxed{2 \leq \alpha \leq 4} \quad \textcircled{+} \quad \boxed{-4 \leq \beta \leq -3} \Rightarrow \boxed{-8 \leq 2\beta \leq -6} \quad \underline{\underline{-6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \begin{array}{l} 2 \leq \alpha \leq 4 \quad \Leftrightarrow 4 \geq \alpha \geq 2 \\ -4 \leq \beta \leq -3 \quad \Leftrightarrow 4 \geq -\beta \geq 3 \end{array} \quad \textcircled{+} \quad \underline{\underline{8 \geq \alpha - \beta \geq 5}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$$

$$A = \alpha^2 + 4\alpha + 4 + 1$$

$$\boxed{A = (\alpha + 2)^2 + 1.}$$

$$\textcircled{\beta} \text{ i) } A + B \geq 0$$

$$(\alpha + 2)^2 + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 \geq 0$$

$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 \geq 0$$

$$\text{ii) } A + B = 0$$

$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 0 \\ 2\beta + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

$$\boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

(Μονάδες 13)

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = \\ &= x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10, \end{aligned}$$

$$\textcircled{\beta} \quad x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow \underline{x=1} \\ y+3=0 & \underline{y=-3} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

α) Νδo $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$

• $2 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \alpha - 3 \leq 0$ αρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$

Νδo $|\beta + 2| = \beta + 2$

• $-2 \leq \beta \leq -1 \Rightarrow 0 \leq \beta + 2 \leq 1$ αρα $|\beta + 2| = \beta + 2$

β) Νδo $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$

• $2 \leq \alpha \leq 3$
• $-2 \leq \beta \leq -1$ } $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$

γ) $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta - \alpha + 3 - \beta - 2 = 1$

• $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$

• $2 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \alpha - 3 \leq 0$

• $-2 \leq \beta \leq -1 \Rightarrow 0 \leq \beta + 2 \leq 1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

β) $0 < A < 4$.

(Μονάδες 12)

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = |x-1|^{\oplus} + |y-3|^{\ominus} = x-1-y+3 = x-y+2$$

$$\bullet \quad 1 < x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x-1 < 3$$

$$\bullet \quad 2 < y < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < y-3 < 0$$

$$\textcircled{\beta} \bullet \quad 1 < x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > x > 1$$

$$\bullet \quad 2 < y < 3 \quad \Rightarrow \quad -2 > -y > -3$$

$$\} \textcircled{\gamma} \quad 2 > x-y > -2$$

$$4 > x-y+2 > 0$$

$$4 > A > 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}+1)^2 =$$

$$= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}^2 - 1^2 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 =$$

$$= 4 + 3 - 1 + 3 + 1 = 10.$$

$$\textcircled{\beta} \quad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = 4$$

$$\beta^2 + \alpha^2 = 4\alpha\beta$$

$$(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 = 4(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$$

$$3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4(\sqrt{3}^2 - 1^2)$$

$$8 = 8.$$

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1.$$

$$\textcircled{\beta} \quad \Pi = A^2 + B^2 = (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 =$$

$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 14.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = \alpha^2 - \beta^2 = (1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2$$

$$A = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - (1 - 2\sqrt{2} + 2) = 3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}$$

$$A = 4\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\beta} \quad B &= \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} = |\alpha| - |\beta| = |1 + \sqrt{2}|^{\oplus} - |1 - \sqrt{2}|^{\ominus} \\ &= 1 + \sqrt{2} - (-1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$$

$$\sqrt{A} > B \quad (\Leftrightarrow) \quad A > B^2 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} > 4 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{2} > 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2 > 1 \quad \text{που ισχύει}$$