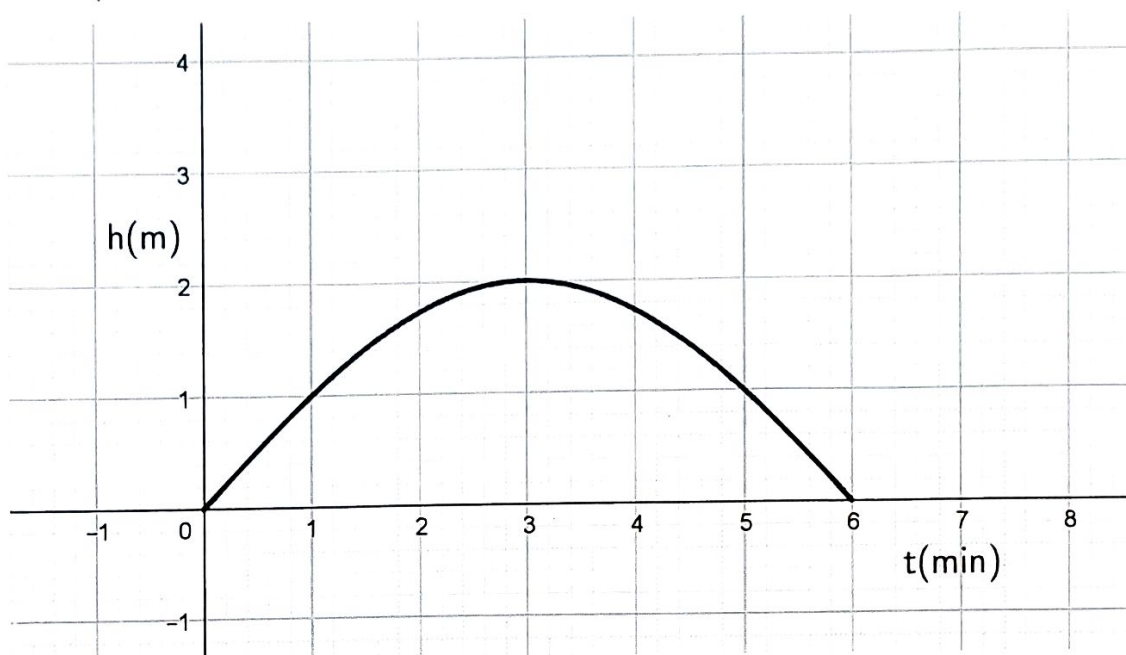


ΘΕΜΑ 2

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:



α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος.

(Μονάδες 5)

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.

(Μονάδες 10)

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.

(Μονάδες 10)

α) $t=1$ και $t=5$.

β) Τη χρονική στιγμή $t=3$ η μέγιστη τιμή του ύψους είναι 2m.

γ) 6 min.

ΘΕΜΑ 2

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4,4]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

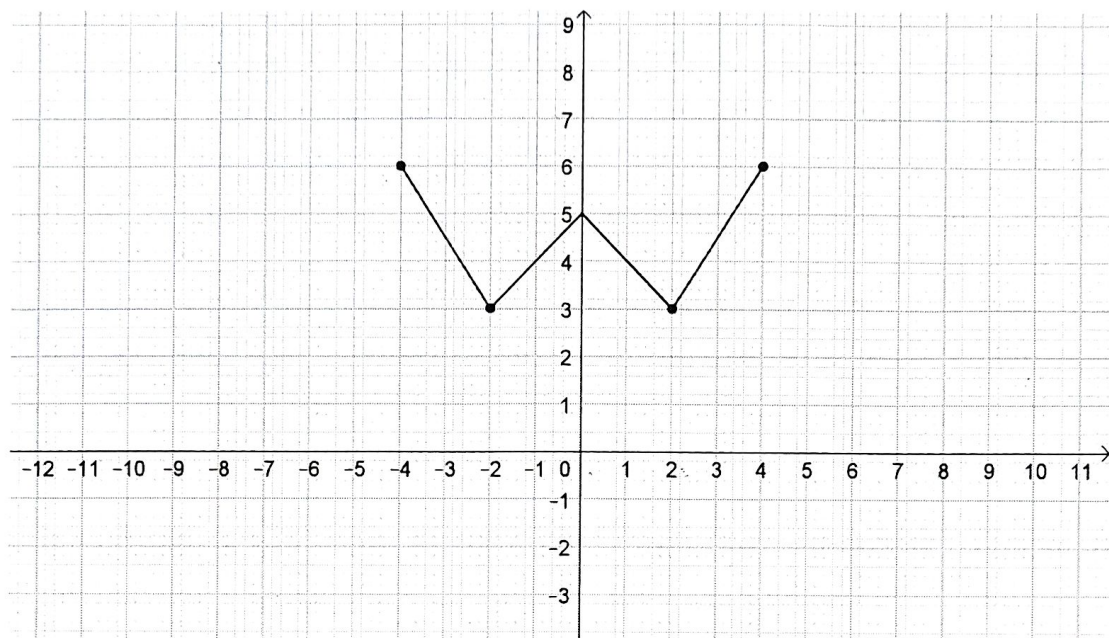
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.

(Μονάδες 9)



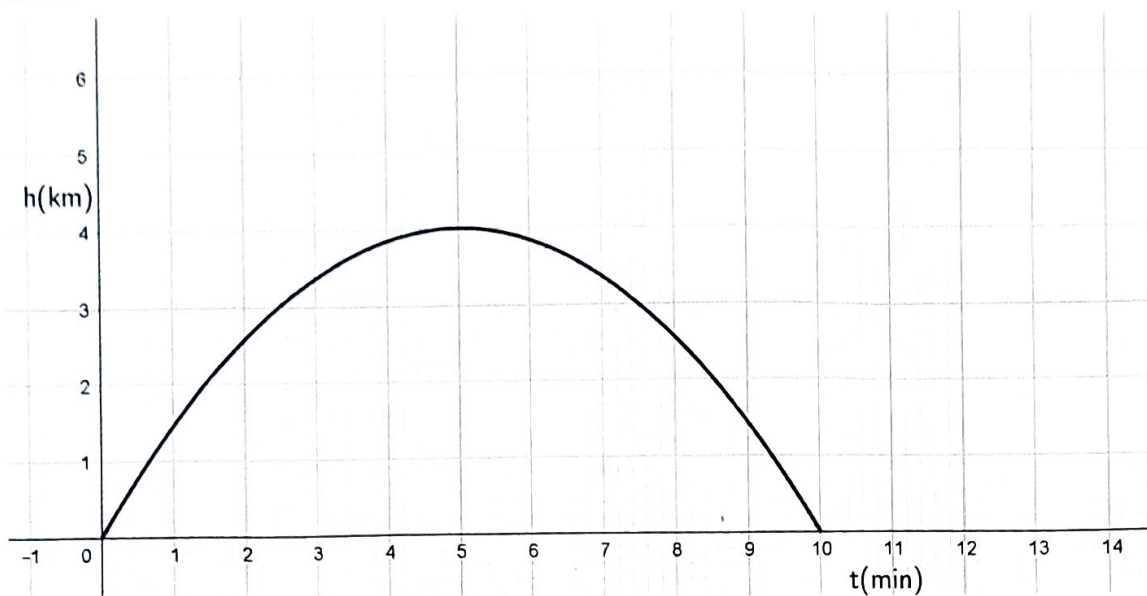
α) Παρατηρώ ότι η f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ άρα είναι άρτια.

β). Η f $\downarrow$ $[-4, -2]$ και $[0, 2]$
 Η f $\uparrow$ $[-2, 0]$ και $[2, 4]$.

γ) Τα σημεία $A(-2, 3)$ και $B(2, 3)$ είναι ολικά ελάχιστα.

ΘΕΜΑ 2

Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α) Να βρείτε:

i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.

(Μονάδες 5)

ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

(Μονάδες 6)

β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km .

i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.

(Μονάδες 7)

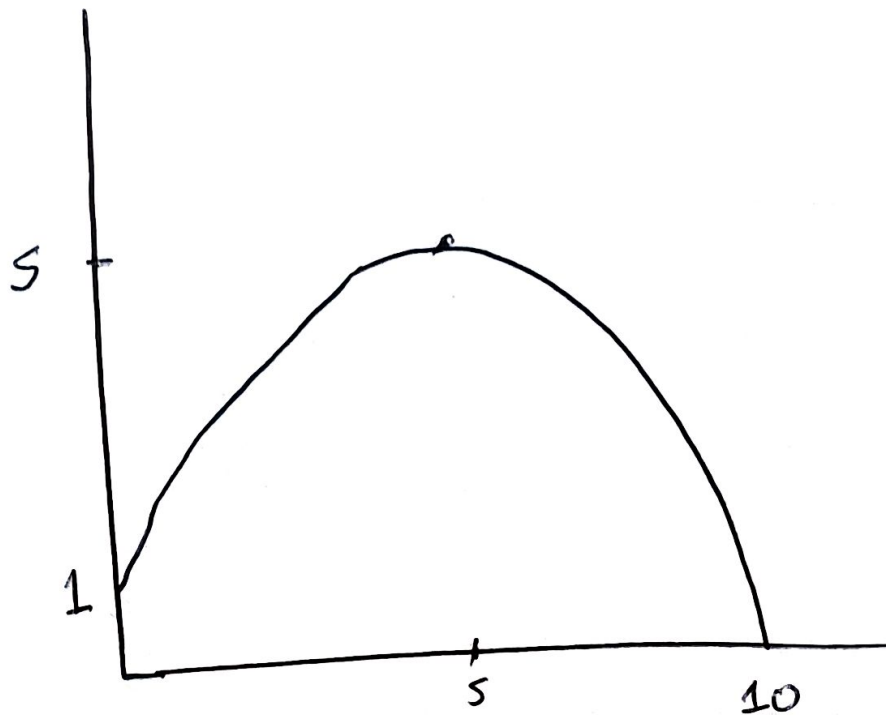
ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

(Μονάδες 7)

α) i) 10 min

ii). Τη χρονική στιγμή $t=5$ το μέγιστο
υψος είναι 4 km.

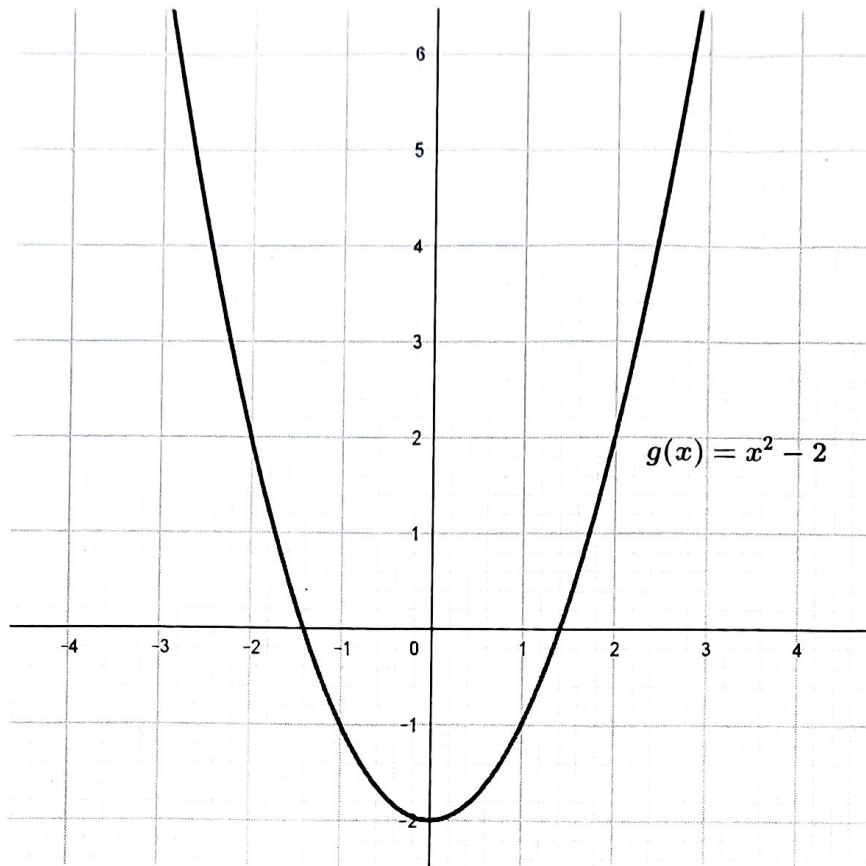
β) i)



ii) Την χρονική στιγμή $t=5$ το υέο
περισσότερο υψος θα είναι 5 km

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

(Μονάδες 9)

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 7)

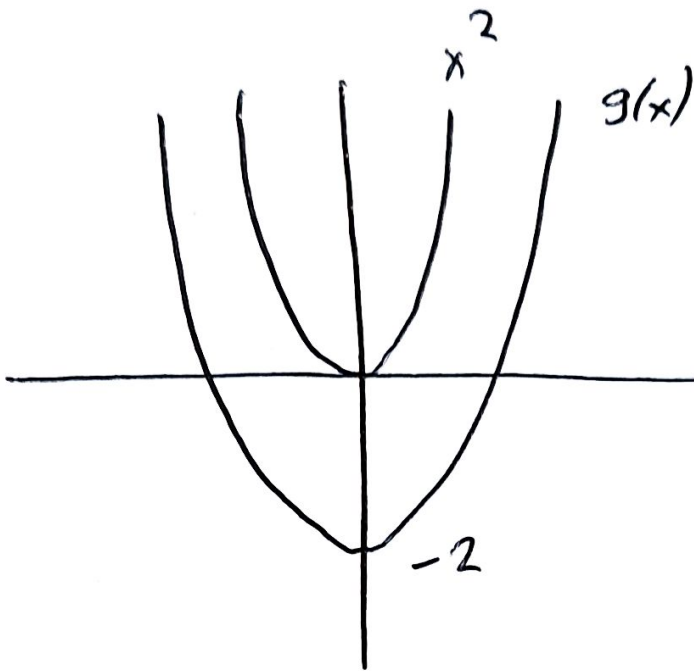
β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(Μονάδες 9)

α) i) Η g είναι άρτια γιατί είναι συμμετρική ως προς τον y .

11/. Το σημείο $A(0, -2)$ είναι ολικό
ελάχιστο.

(B).



Η μετατόπιση είναι κατά 2 πάνω

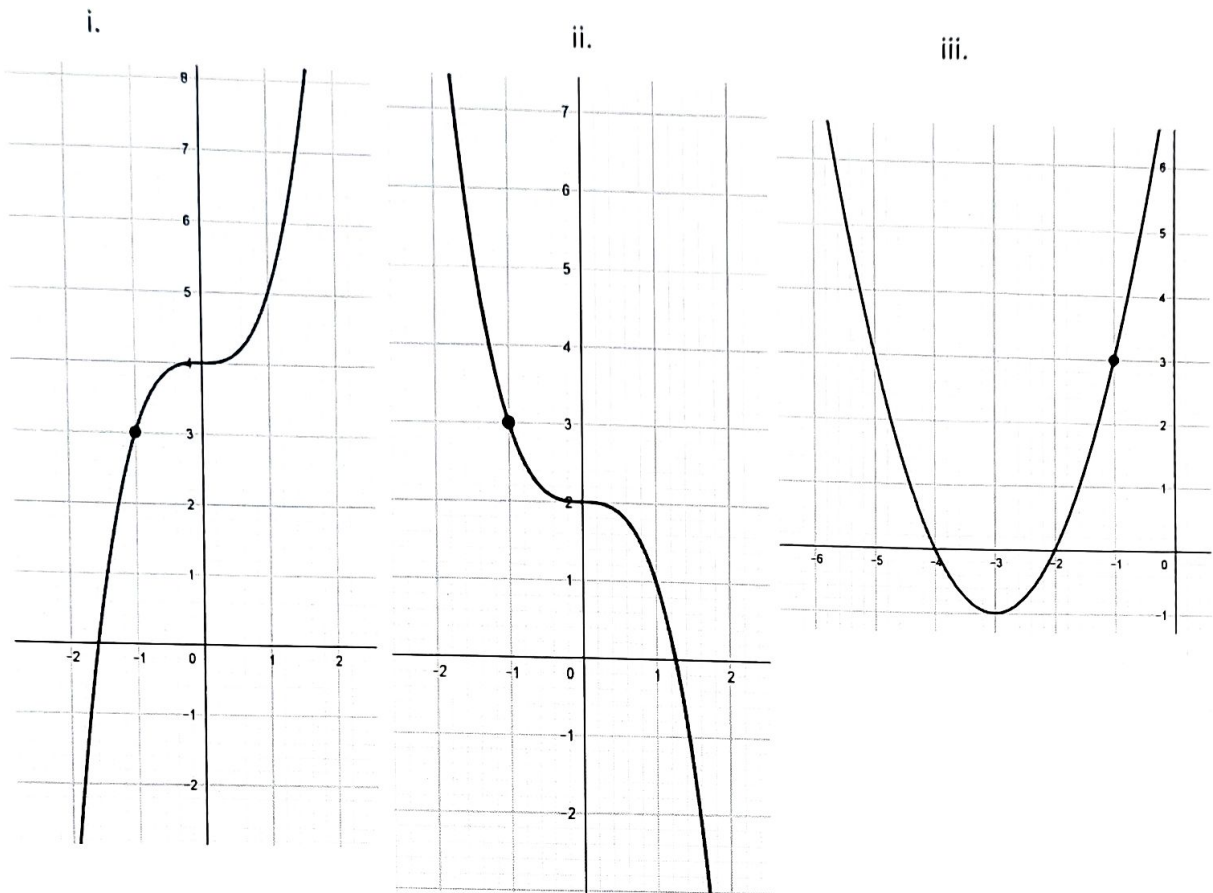
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

α) Εάν το $B \in G$ τότε

$$-1 < 2 \Rightarrow f(-1) > f(2) \text{ όπου } f \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \text{ ΑΤΟΛΟ}$$

Άρα όχι το B δεν είναι σημείο της G

β) Η 2η γιατί είναι η μονη γν. φθίνουσα.

ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\phi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω.

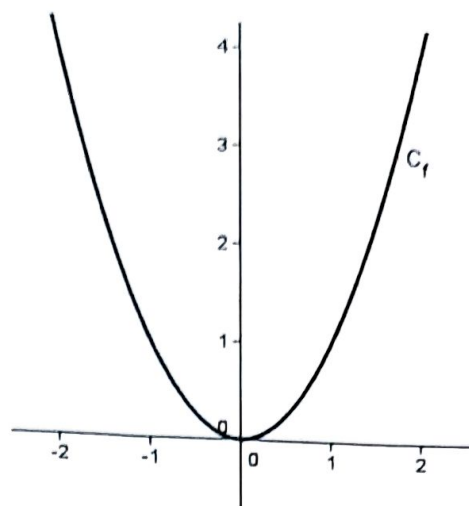
(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\phi(x)$.

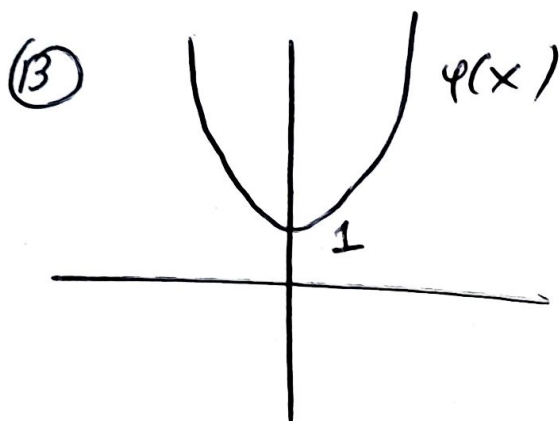
(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\phi(x)$.

(Μονάδες 9)



α) $\phi(x) = x^2 + 1$.



γ) η ϕ $\downarrow$ στο $(-\infty, 0]$

η ϕ $\uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

Το $A(0,1)$ $O \in$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$.

Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια.

(Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.

(Μονάδες 8)

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 9)

α) Εάν ήταν άρτια το $f(-1) = f(1)$
και που δεν ισχύει.

β) Αν ήταν περιττή $f(-1) = -f(1)$
που δεν ισχύει επίσης.

γ) Αν ήταν γνησίως αύξουσα θα είχαμε

$$-1 < 1 \Rightarrow f(-1) < f(1) \Rightarrow 2 < 0$$

που προφανώς δεν ισχύει.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(I) $f(x) = g(x + 3) + 1$. (II) $f(x) = g(x + 3) - 1$. (III) $f(x) = g(x - 3) + 1$.

(IV) $f(x) = g(x - 3) - 1$.

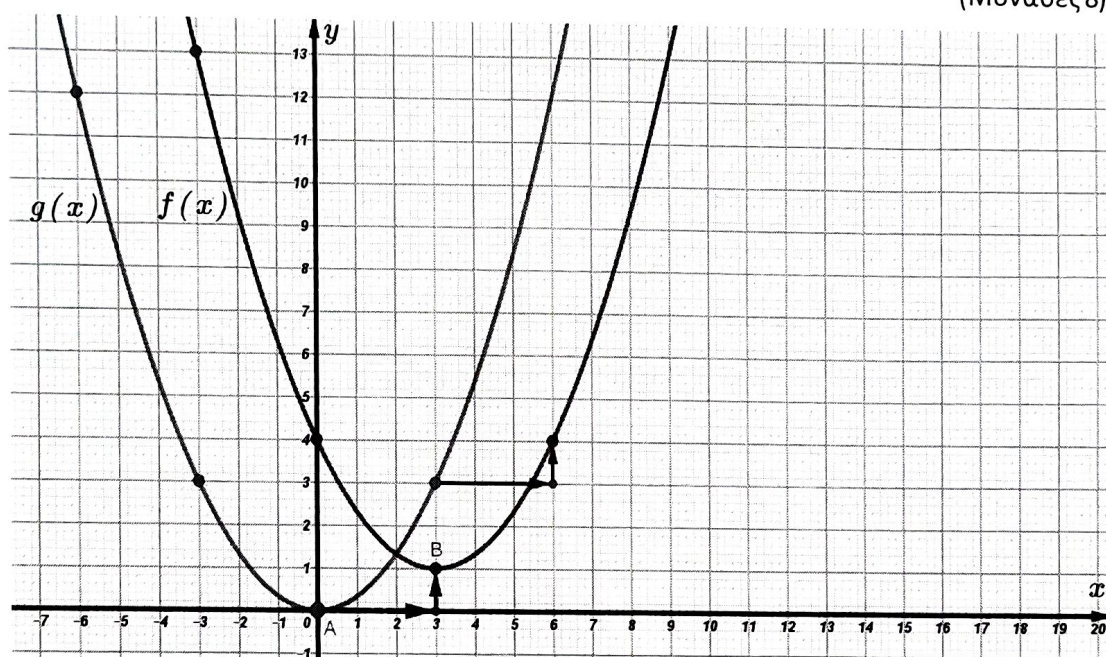
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

(Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)



α) Σωστό/ ο λανθασμένο (III) $f(x) = g(x-3) + 1$.

β) $\min f = 1$ και $B(3,1)$

γ) Η f $\downarrow$ στο $(-\infty, 3]$ και $\uparrow$ στο $[3, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1), B(3,3)$.

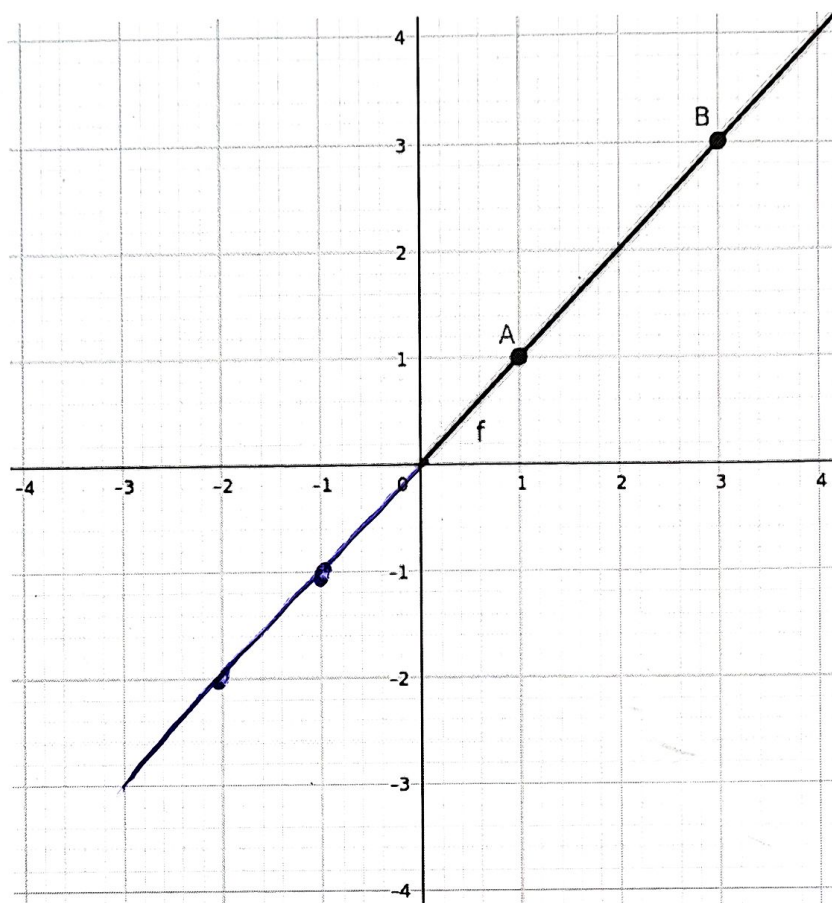
α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A, B και είναι περιττή.



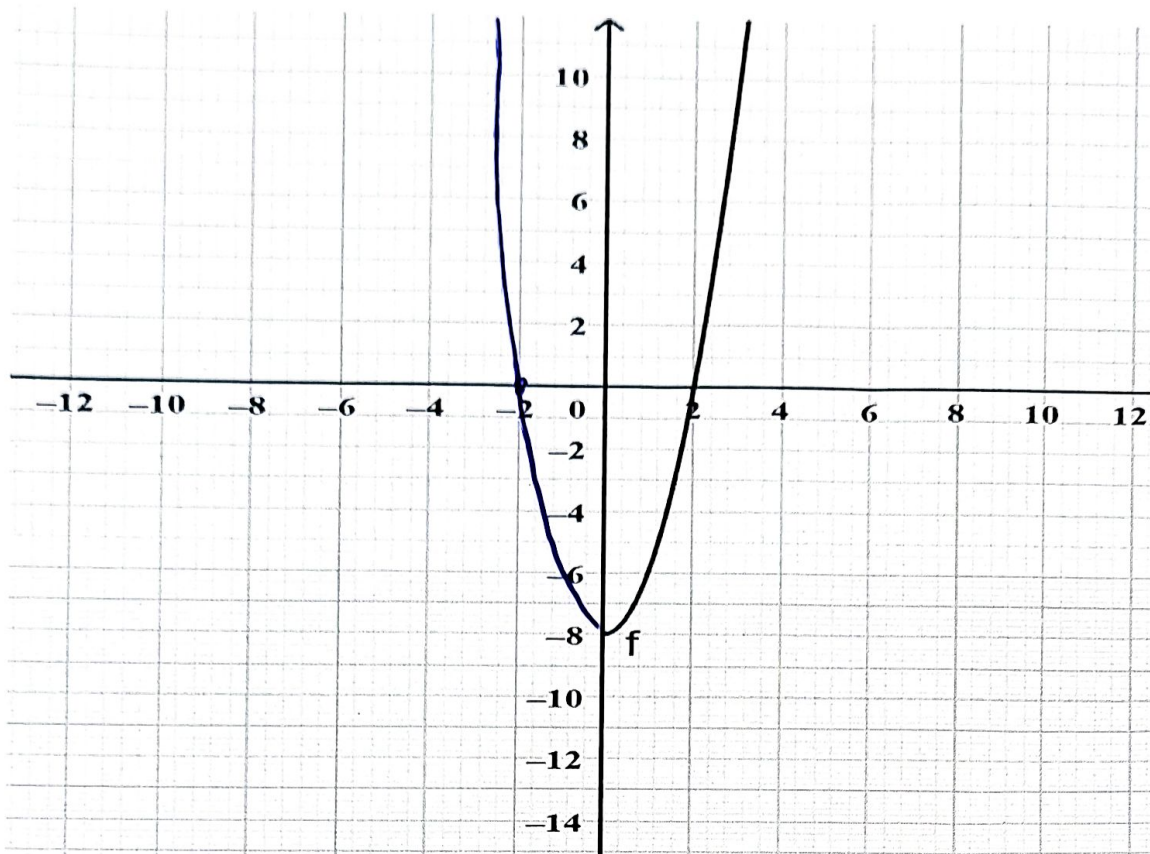
Μονάδες 13

α) i) Δω μπορεί να είναι σταθερή, γιατί $f(1) \neq f(3)$.

ii) Δω μπορεί να είναι γν. φθίνουσα, γιατί $1 < 3 \Rightarrow f(1) < f(3)$.

β) Αφού είναι περιττή έχω κενό συρреτωει των αρχών των αξόνων.

ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)

α) Σχήμα.

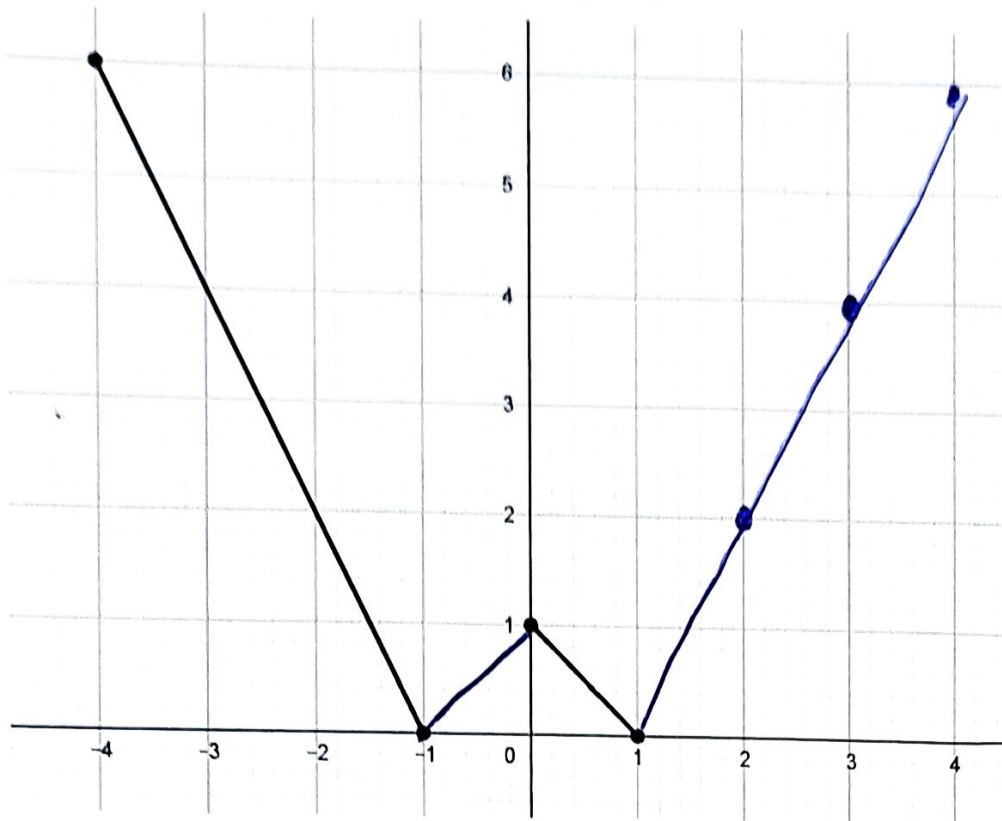
β) i) Η f ↓ σε $(-\infty, 0]$ και

Η f ↑ σε $[0, +\infty)$.

ii). $A(0, -8)$ ο.ε.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 9)

α) Σχημα.

$\Gamma(-1,0) \cup (0, \infty)$
 $\Delta(1,0)$

β) i) Η f $\downarrow$ στο $[-4, -1]$ και $[0, 1]$

Η f $\uparrow$ στο $[-1, 0]$ και $[1, +\infty)$.

ii). $\text{Max } f = 6$ $\text{Min } f = 0$ $\left. \begin{array}{l} A(-4, 6) \\ B(4, 6) \end{array} \right\} \text{ΟΜ.}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

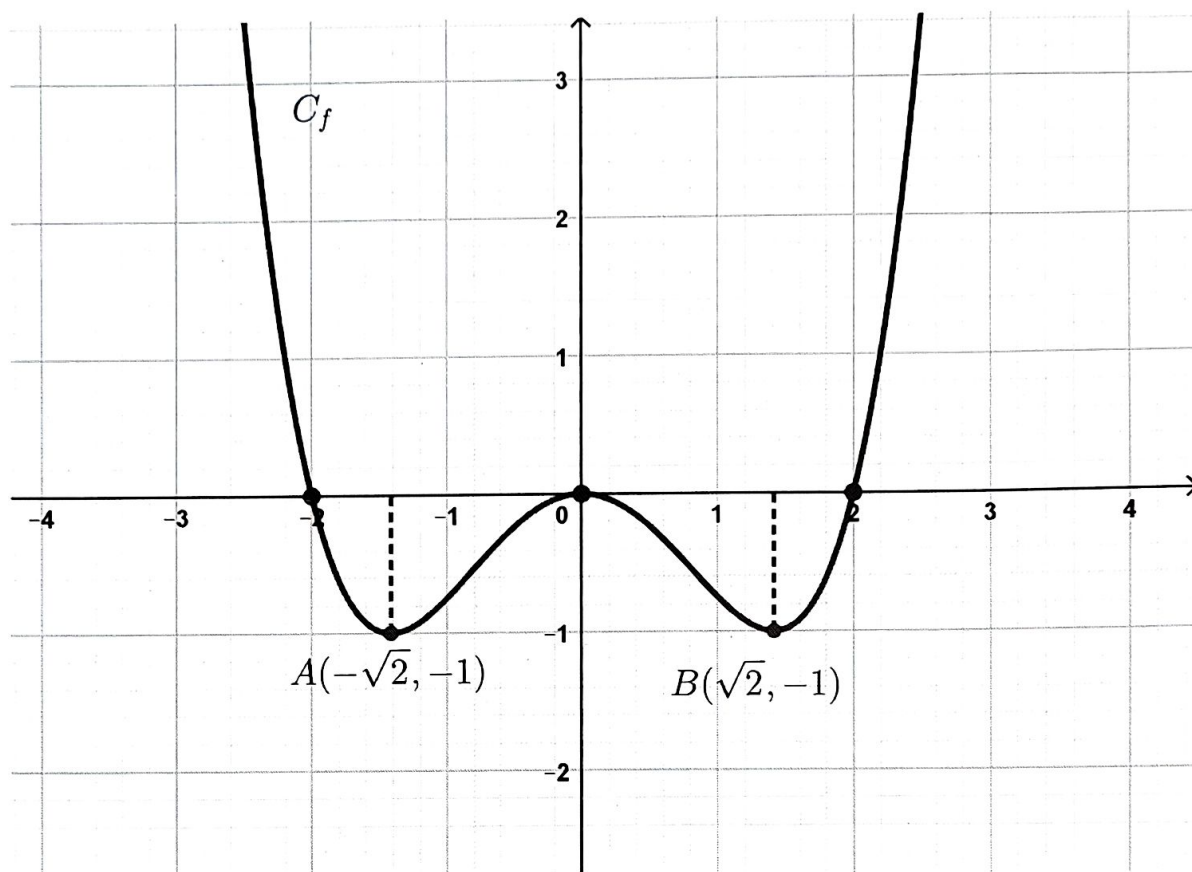
(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2}, -1)$ και $B(\sqrt{2}, -1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησής f .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 10)



α) Είναι άρτια γιατί η f είναι
συμ/κη ως προς τον y .

β) Η $f \downarrow$ στο $(-\infty, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$

Η $f \uparrow$ στο $[-1, 0]$ και $[\sqrt{2}, +\infty)$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 0, x = 2$.

ΘΕΜΑ 2

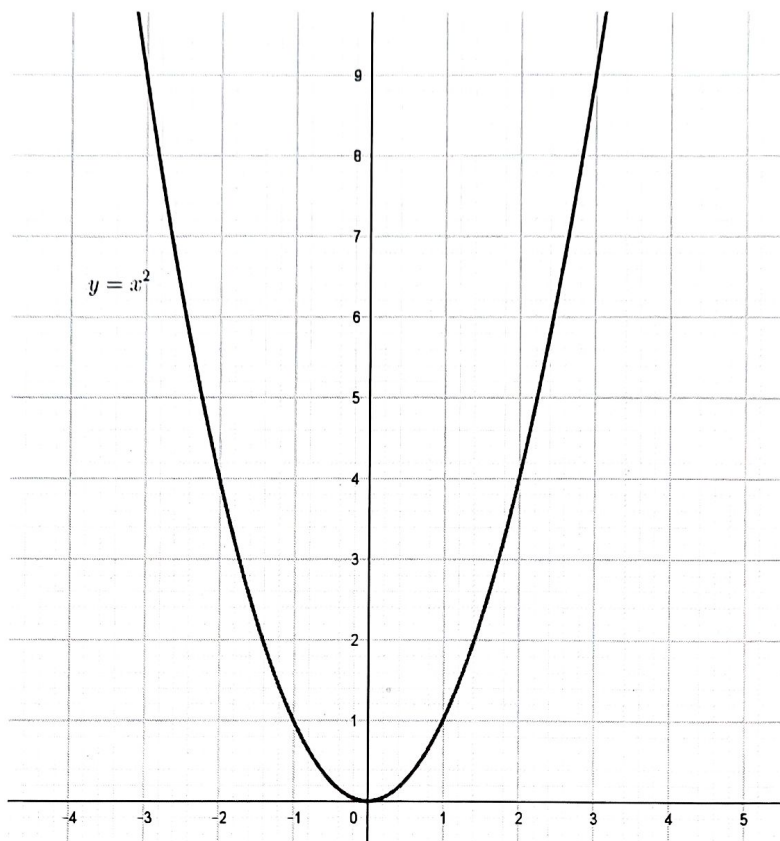
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.

(Μονάδες 15)



α) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$

β) κάτω 2 δεξιά και κάτω ένα πάνω.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

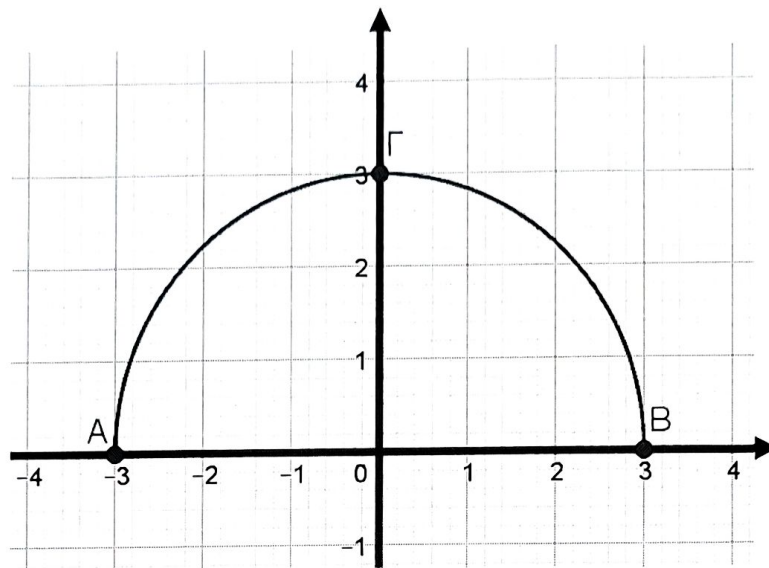
(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 10)



α) $D_f = [-3, 3]$

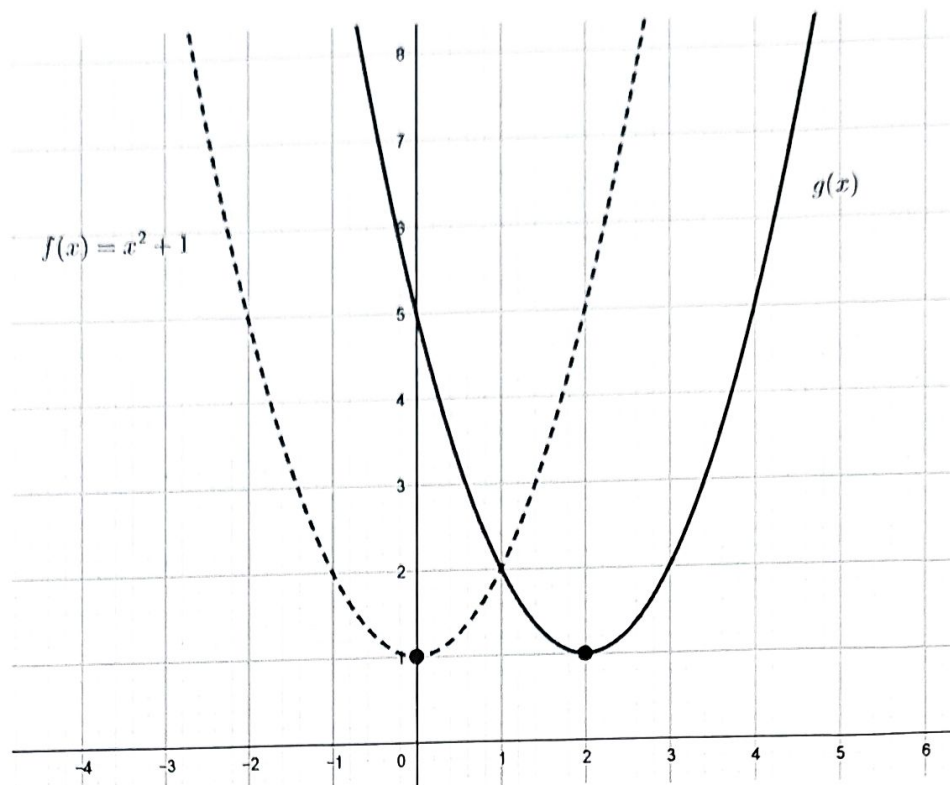
β) Άρτια αφού είναι συμ/κη w/ ημ/ του $y'y$

γ) $A(-3, 0) \left. \vphantom{\begin{matrix} A(-3, 0) \\ B(3, 0) \end{matrix}} \right\} 0. \in$
 $B(3, 0)$

$\Gamma(0, 3)$ Ο.Μ.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.



α)

i. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β)

i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(Μονάδες 4)

α) i) Η $f(x)$ είναι άρτια αφού είναι συμ/κη ως προς τον y ' y

ii) Έχει ελάχιστη τιμή το 1.

(B) i) बता 2 संकेत -

11/ $g(x) = (x - 2)^2 + 1$.

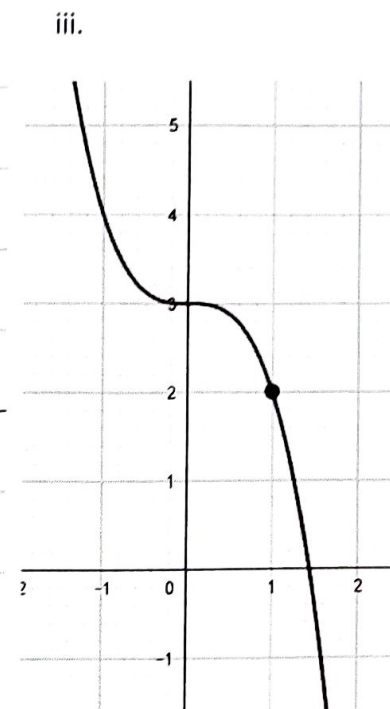
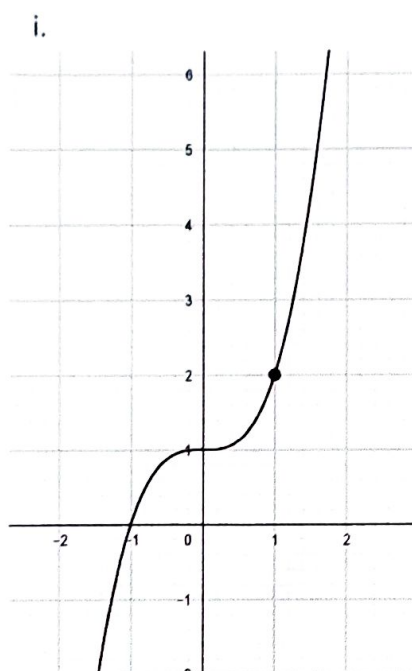
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

α) Αν $B \in Cf$ τότε

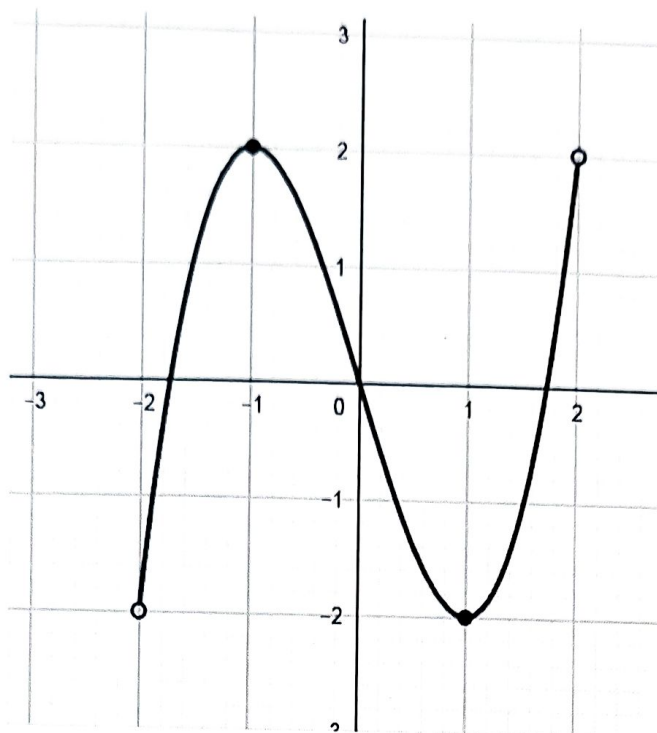
$1 < 2 \xrightarrow{f \uparrow} f(1) < f(2) \Leftrightarrow 2 < 9$ που ισχύει.

Ναι θα μπορούσα.

β). Η 1_n αφού είναι η μονη που είναι γν.αύουσα.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 10)

α) Η $f(x)$ είναι περιττή αφού

έχει κεντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

β) f $\nearrow$ στο $(-2, -1]$ και $[1, 2)$.

γ) $A(-1, 2)$ ΟΜ $B(1, -2)$ ΟΕ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A(-2, 8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f .

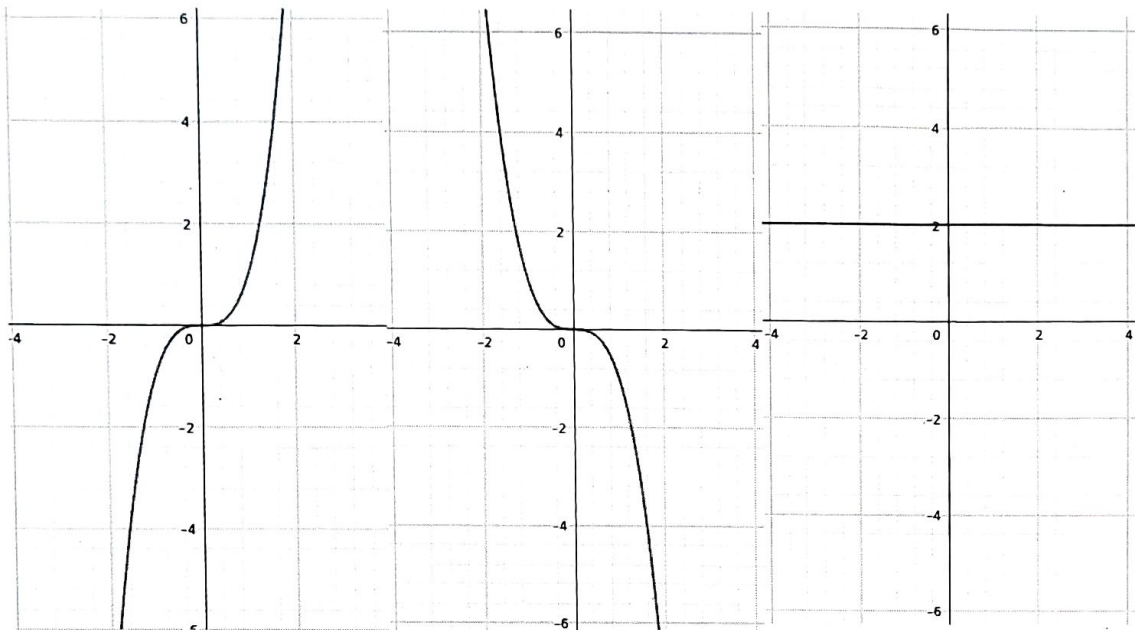
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)

Γραφική παράσταση (β)

Γραφική παράσταση (γ)

α) Αφού η f είναι περιττή

(Μονάδες 8)

$$f(-x) = -f(x) \text{ άρα } f(-2) = -f(2)$$

$$8 = -f(2)$$

$$f(2) = -8.$$

Άρα $B(2, -8)$.

③ Αφού η f γρ. ποσοτική θα είναι
η γρ. αύξηση ή γρ. φθίνουσα.

$$-2 < 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad \underbrace{f(-2)}_8 > \underbrace{f(2)}_{-8} \quad \text{αφού } f \text{ } \nabla.$$

④ Η $2n$ γραμμή είναι η πρώτη

γρ. φθίνουσα

ΘΕΜΑ 2

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

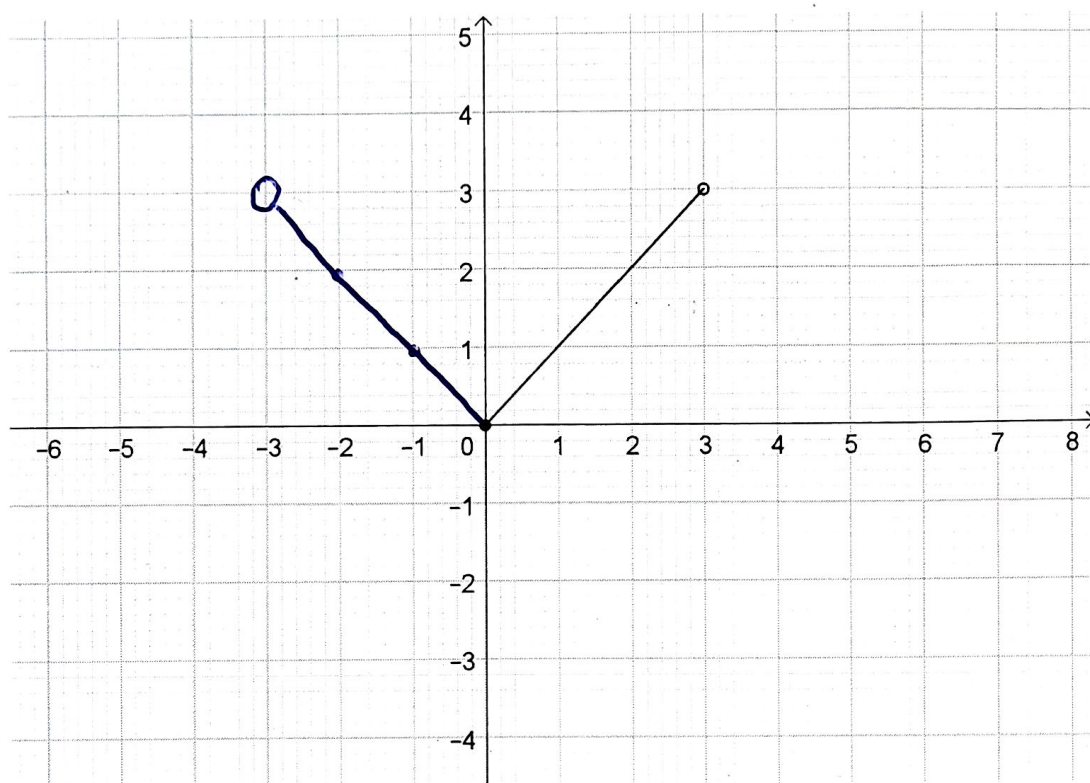
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



α) Αφού η f είναι άρτια. τότε

αν $x \in D_f$ και $-x \in D_f$ $\alpha = -3$

β) $f(2) = 2$ και $f(-2) = f(2) = 2 \Rightarrow f(-2) = 2$

γ) Σχήμα

ΘΕΜΑ 2

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

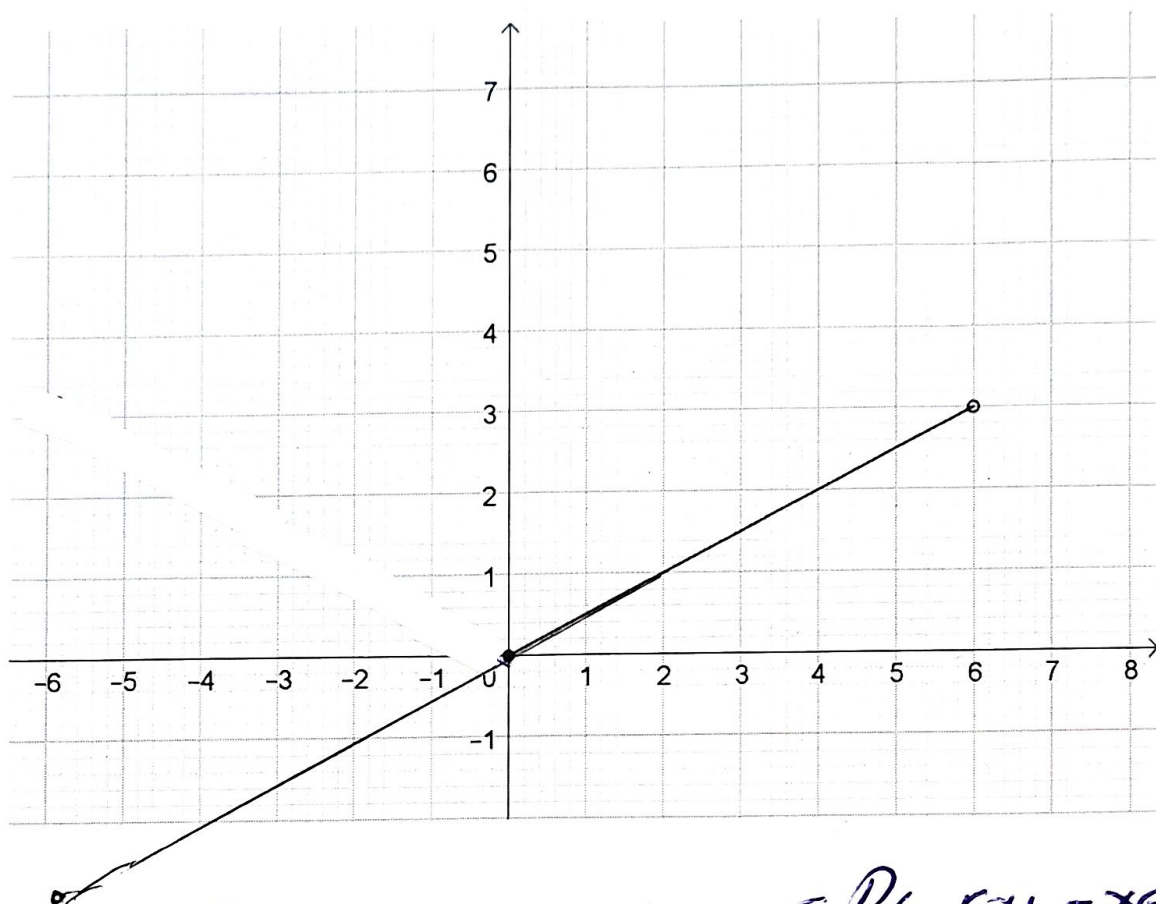
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



α) Αφού f περιττή $\Rightarrow x \in D_f$ και $-x \in D_f$.
αφού $\alpha = -6$

β) $f(-4) = -f(4) = -2$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

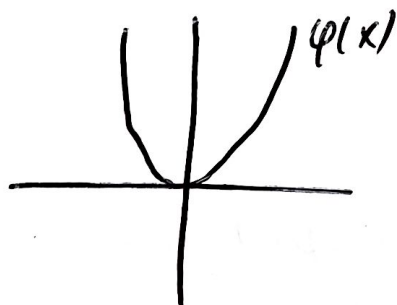
(Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 7)

α) $x \in D_f$ και $-x \in D_f$.

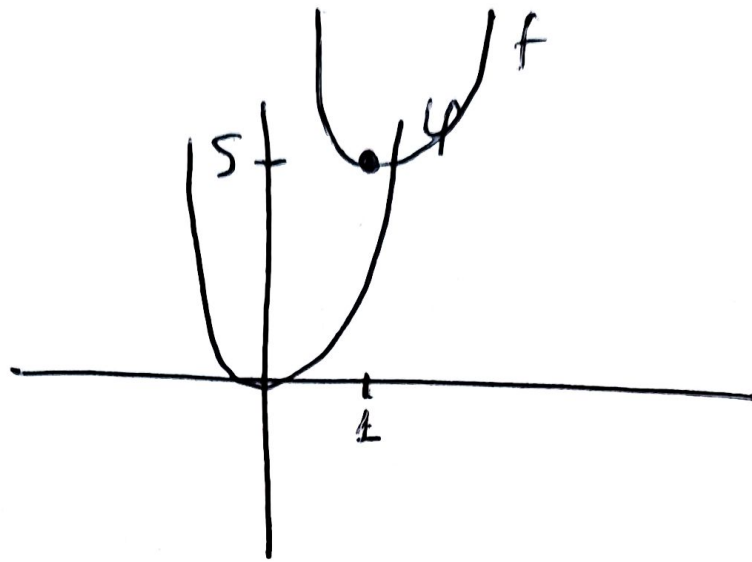
$$\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x) \quad \text{αρτία.}$$



β) $f(x) = 3x^2 - 6x + 8 = 3(x^2 - 2x) + 8$

$$f(x) = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 8 = 3((x-1)^2 - 1) + 8$$

$$f(x) = 3(x-1)^2 + 5.$$



Η f προκύπτει από μετατόπιση
της f_φ κατά 1 δεξιά και κατά
5 πάνω

⑧ i) Η $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1]$

Η $f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$.

Αξονας συμπεριφοράς $x=1$.

ii). $A(1, 5) \in$

iii). Αν $\lambda < 5$ τότε καμία λύση

Αν $\lambda = 5$ τότε 1 λύση

Αν $\lambda > 5$ τότε 2 λύσεις.

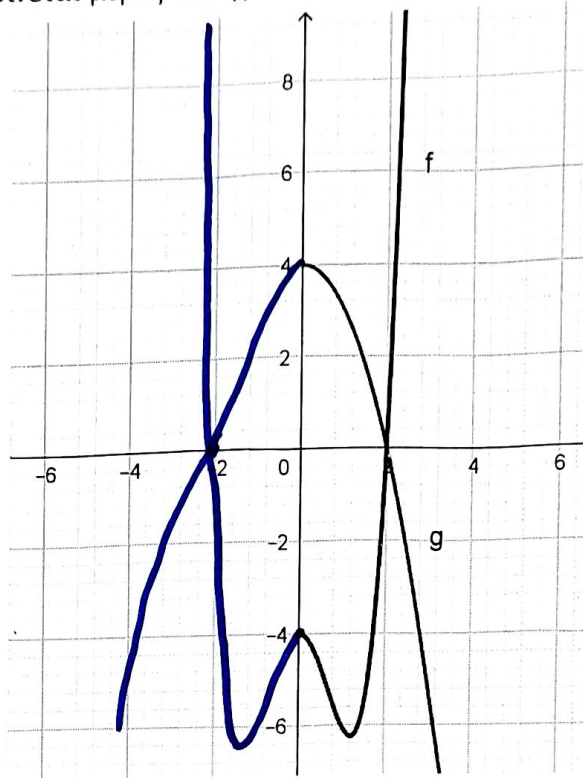
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{a} \quad f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$$

$$g(x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x).$$

β) και οι δυο συναρτήσεις είναι αρτίες
αρα συμμετρικές ως προς τον y'y

$$\textcircled{1} \text{ i) } f(x) = g(x)$$

γραμμή

$$x=2 \quad \text{и} \quad x=-2$$

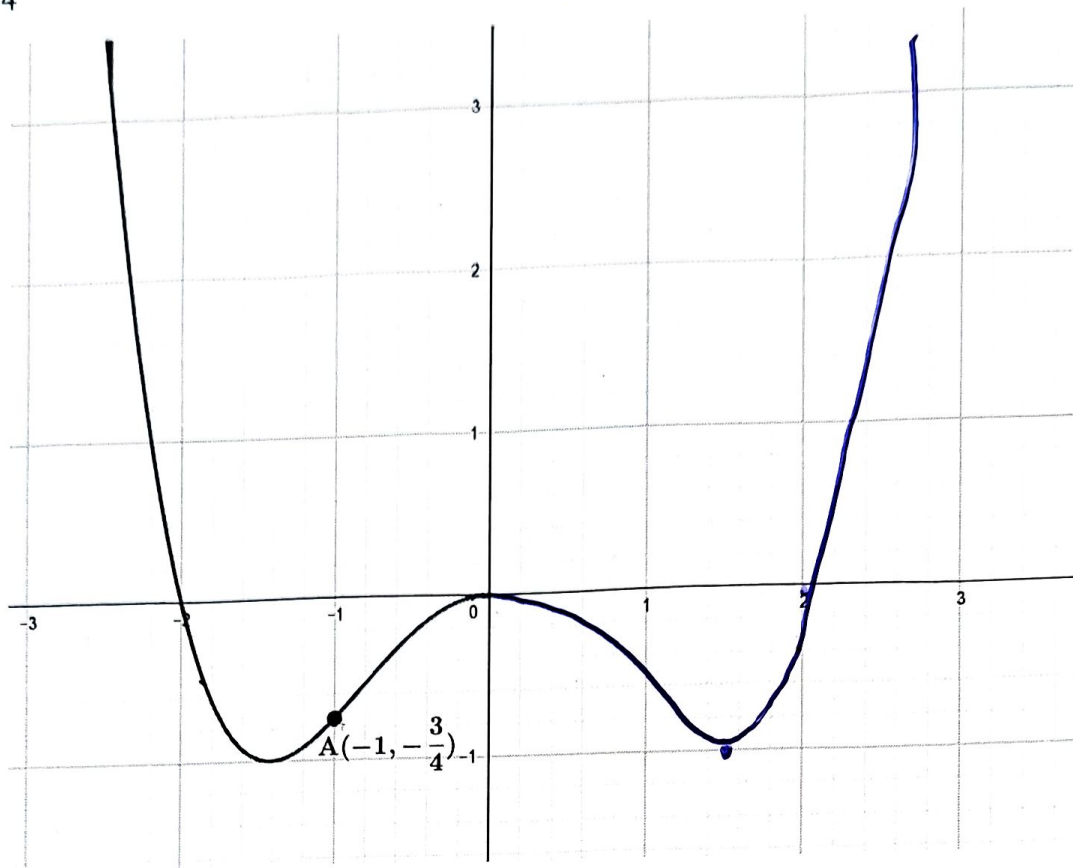
$$\text{ii) } f(x) < g(x)$$

$$x \in (-2, 2).$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ και το σημείο } A\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \text{ αυτής.}$$



α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = -1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο

τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση

της f .

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(-1) = \frac{1}{4} + a = -\frac{3}{4} \quad (\Rightarrow) a = -\frac{4}{4}$$

$$\boxed{a = -1}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{i)} f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2.$$

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - (-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - x^2 = f(x)$$

ii) $\sum x^n$. Η $f(x)$ είναι άρτια .

$$\textcircled{\gamma} \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4 - (-\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} \cdot 9 - 3$$

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}.$$

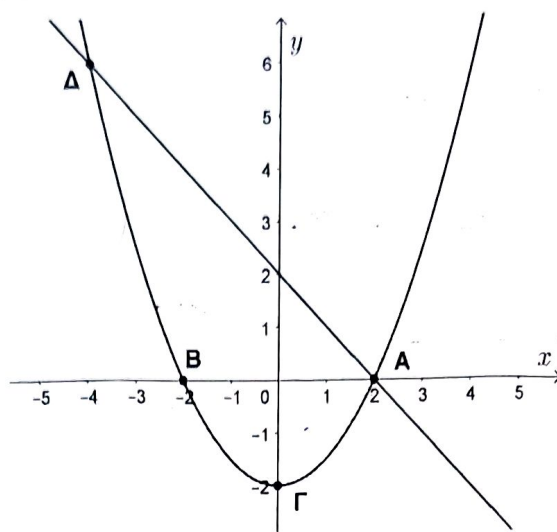
Γρούμε

$$f(x) = -\frac{3}{4}.$$

$$x = \sqrt{3} \quad x = -\sqrt{3} \quad , \quad x = 1 \quad x = -1.$$

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ , να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{a} \quad f(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

$$A(2, 0) \Rightarrow 0 = 4a + 2b + \gamma \quad \text{ε) } 0 = 4a + 2b - 2$$

$$B(-2, 0) \Rightarrow 0 = 4a - 2b + \gamma \quad 0 = 4a - 2b - 2 \quad \oplus \quad \left. \begin{array}{l} \text{ε) } 0 = 4a + 2b - 2 \\ 0 = 4a - 2b - 2 \end{array} \right\}$$

$$\Gamma(0, -2) \Rightarrow \boxed{-2 = \gamma}$$

$$0 = 8a - 4 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$0 = 2 - 2b - 2$$

$$b = 0$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2}$$

$$\textcircled{B} \quad f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 - 2 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = -2x + 4$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = -4$$

$$x = 2$$

$$\Delta(-4, 6)$$

$$A(2, 0)$$

$$\textcircled{Y} \quad f(x) + 4,5 = g(x)$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 + \frac{9}{2} = -x + 2$$

$$x^2 - 4 + 9 = -2x + 4$$

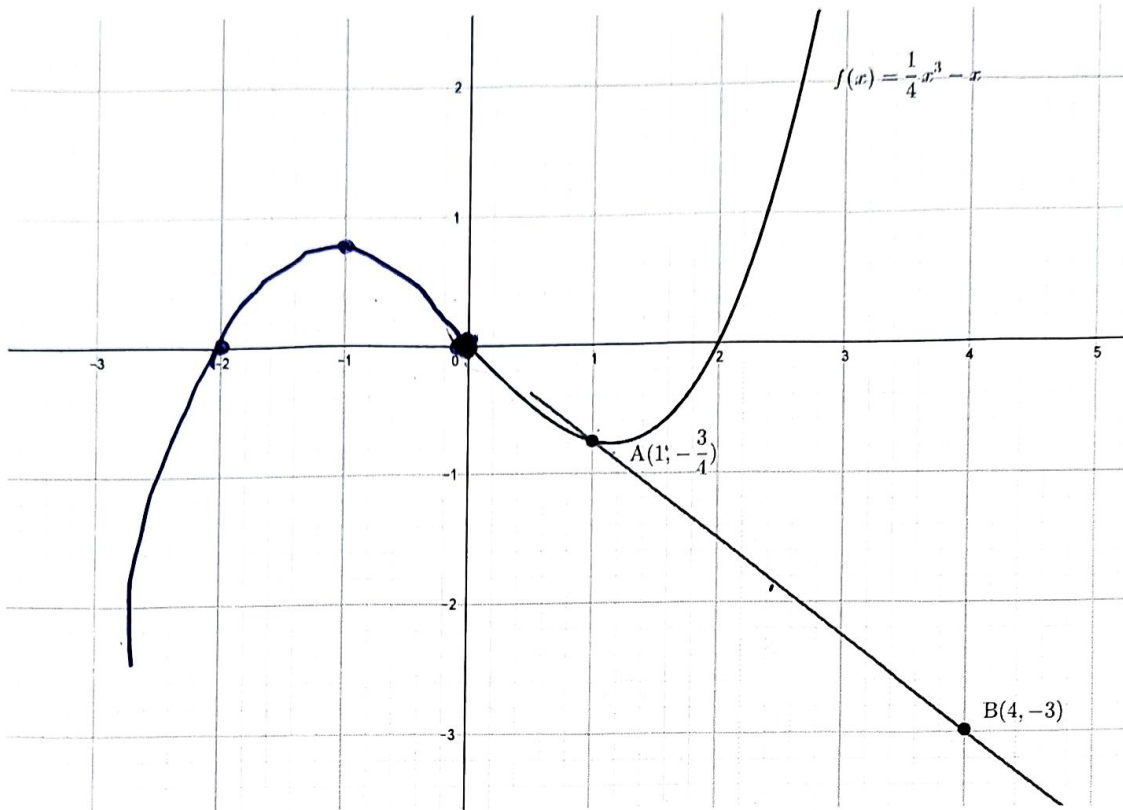
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1,$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο

τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

а) $\Sigma_{AB} \ni y = ax + b$ $\begin{matrix} \nearrow A(1, -\frac{3}{4}) \\ \searrow B(4, -3) \end{matrix}$

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} = a + b & \Leftrightarrow \frac{3}{4} = -a - b \\ -3 = 4a + b \end{cases} \quad \text{---} \oplus$$

$$-3 + \frac{3}{4} = 3a$$

$$\boxed{\Sigma_{AB} \ni y = -\frac{3}{4}x}$$

$$-\frac{9}{4} = 3a$$

$$\Leftrightarrow -9 = 12a \quad \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$\boxed{b = 0}$$

б) i) $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - (-x) = -\frac{1}{4}x^3 + x$

$$f(-x) = -\left(\frac{1}{4}x^3 - x\right) \quad \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad \text{нечетн}$$

ii) $\Sigma_{четн}$.

в) $A(1, -\frac{3}{4})$

$$O(0, 0)$$

$$\Gamma(-1, \frac{3}{4})$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60 \text{ cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

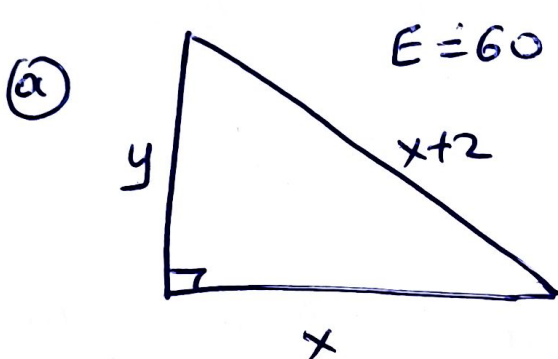
(Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



$$x^2 + y^2 = (x+2)^2$$

$$\frac{xy}{2} = 60$$

$$y = \frac{120}{x}$$

$$\text{Αρα } x^2 + \left(\frac{120}{x}\right)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\frac{14400}{x^2} = 4x + 4 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{3600}{x^2} = x + 1$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 - 3600 = 0$$

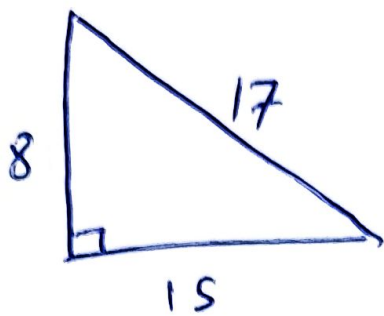
β)	1	1	0	-3600
	↓	15	240	3600
	1	16	240	0

(15)

$$(x-15)(x^2+16x+240)=0$$

$\Delta < 0$.

$$\underline{\underline{x=15}}$$



⑧. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος
μας οδηγούν στην εξίσωση

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

η οποία έχει το πολύ 3 λύσεις.
δίνοντάς το πολύ 3 τριγωνικά.

οπότε βρήκα μοναδική λύση $x = 15$.

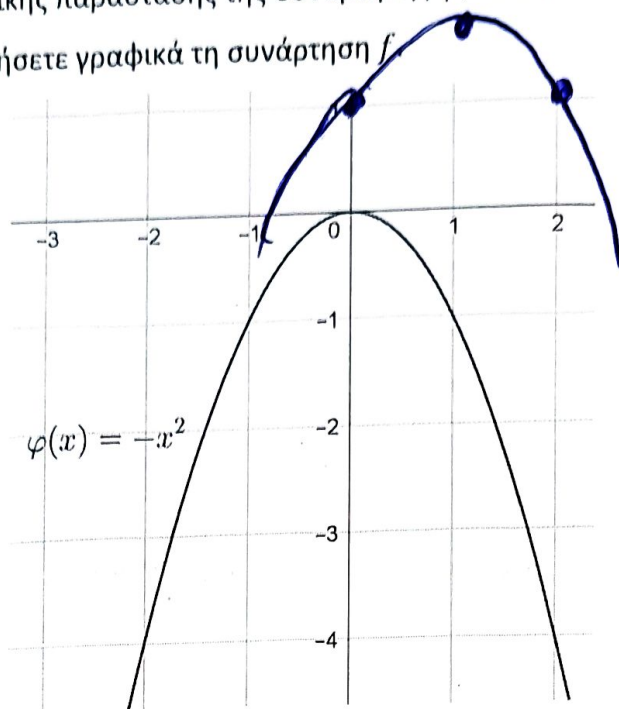
άρα ένα και μοναδικό τριγωνικό.

ικανοποιεί τα δεδομένα

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .



(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

$$\textcircled{a} \quad f(x) = -x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x) + 1$$

$$f(x) = -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 1 = -((x-1)^2 - 1) + 1$$

$$f(x) = -(x-1)^2 + 1 + 1 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{f(x) = -(x-1)^2 + 2}$$

③ i) Η $f \in (-\infty, 1]$ και $f \notin \text{σε } [1, +\infty)$

ii) Το $A(1, 2)$ Ο.Μ.

iii). Όταν $k < 2$ η εξίσωση

$f(x) = k$ έχει 2 ριζ.

Αφού οποιαδήποτε ορίζεται

εξίσωση $y = k$ τέμνει τη C

ακριβώς δύο φορές.

ΘΕΜΑ 4

Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = -(x-5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

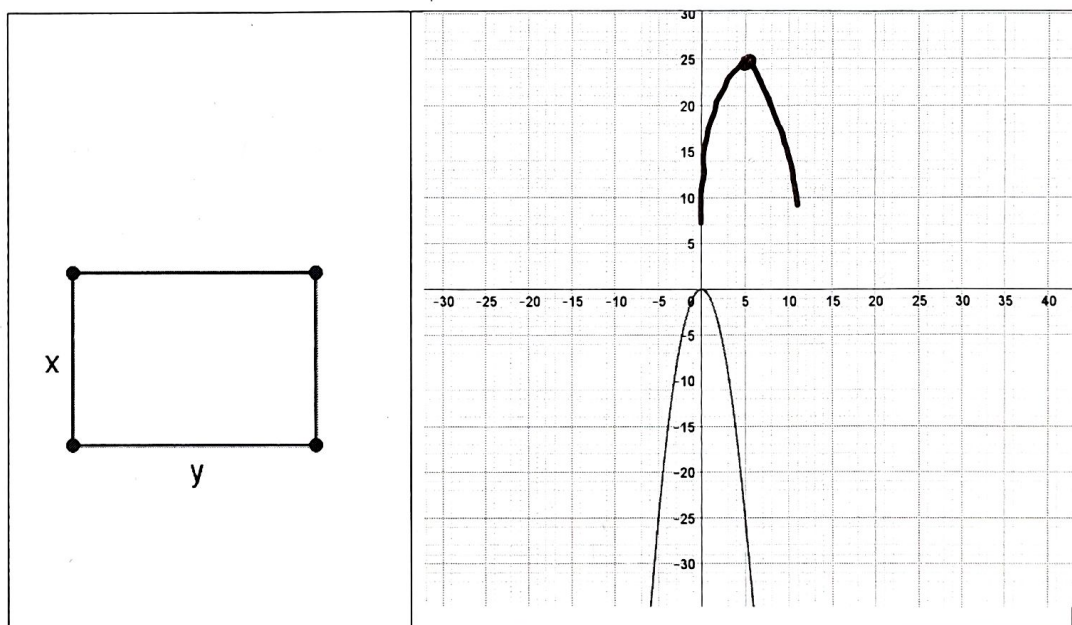
(Μονάδες 7)

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)



α)

$$2x + 2y = 20$$

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x, \quad x \in (0, 10).$$

$$\textcircled{B} \quad C = xy = x(10-x) = -x^2 + 10x$$

$$\boxed{C(x) = -x^2 + 10x}$$

$$C(x) = -(x^2 - 10x) = -(x^2 - 10x + 25 - 25)$$

$$C(x) = -((x-5)^2 - 25) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(x) = -(x-5)^2 + 25}$$

$x \in (0, 10)$

⑧ Σημειώματα.

Μαγιστό ερβάριον για $x=5$.

⑨ Για $x=5$ το $y=5$. από το πρόβλημα

ΘΕΜΑ 4

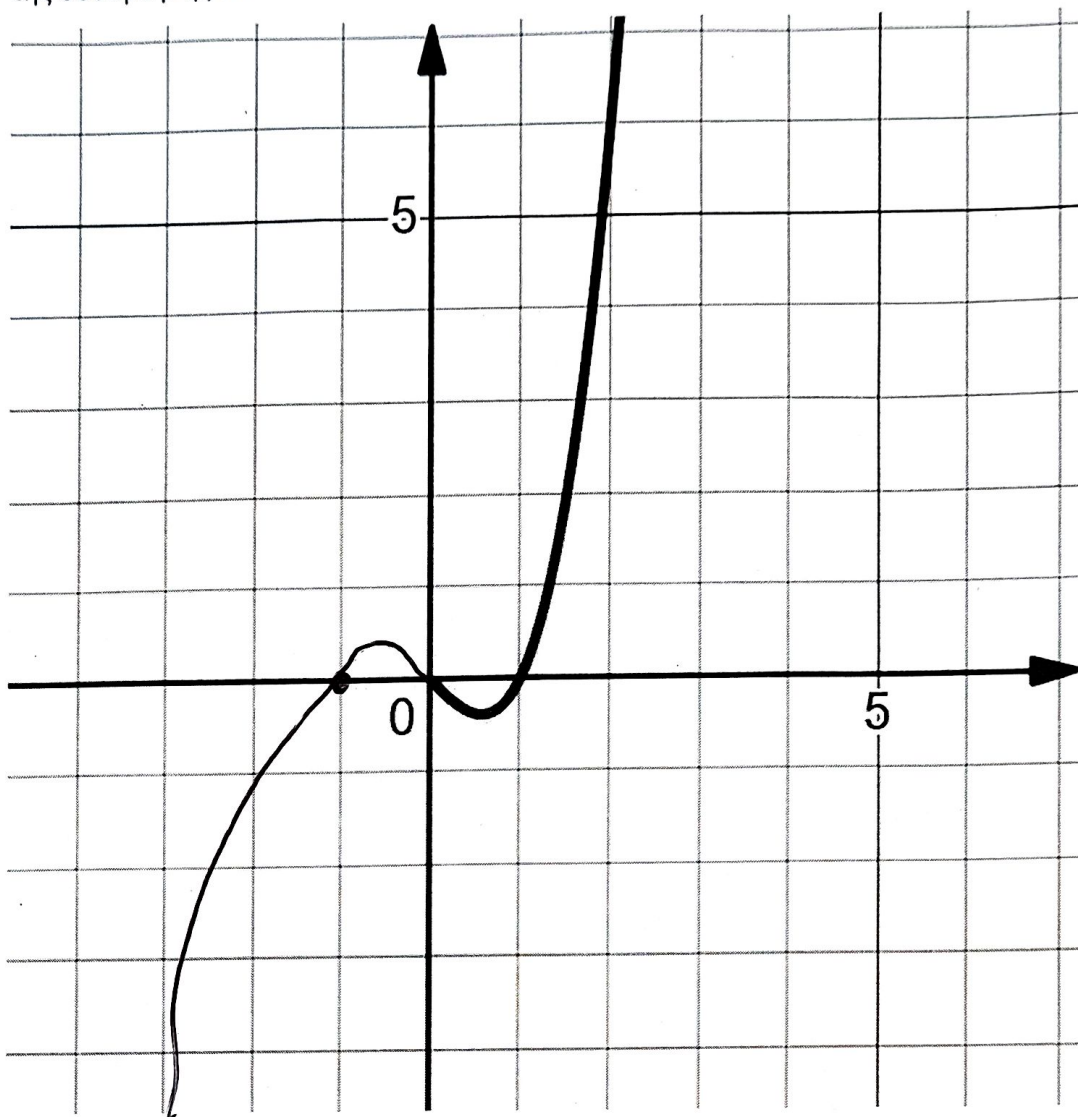
Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

(Μονάδες 03)

- ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .



(Μονάδες 04)

- iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \text{ i) } h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -h(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in D_h \\ -x \in D_h \end{array} \right\} h \text{ περιττή.}$$

ii) Σχολία.

$$\text{iii) } h(x) = 0$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$\textcircled{x=0} \quad \textcircled{x=1} \quad \textcircled{x=-1}$$

$$\textcircled{\beta} \quad g(x) \geq x \quad \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{x} \geq x \quad \Leftrightarrow x \geq x^3 \quad \Leftrightarrow 0 \geq x^3 - x \\ 0 \geq h(x)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx - 1$, με $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $k = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(-x) = (-x)^4 + k(-x) - 1$$

$$f(-x) = x^4 - kx - 1$$

$$\text{Προτιμώ} \quad \cancel{x^4 - kx - 1} = \cancel{x^4 + kx - 1}$$

$$-kx = kx$$

$$-k = k \Rightarrow -2k = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{i) } f(x) = x^4 - 1 \quad \text{στο } (-\infty, 0]$$

$$\text{Έστω } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^4 > x_2^4 \Rightarrow x_1^4 - 1 > x_2^4 - 1 \\ f(x_1) > f(x_2).$$

$$\text{ii) } f(x) \geq -1$$

$$x^4 - 1 \geq -1$$

$$x^4 \geq 0 \quad \text{που ισχύει.}$$

$$\text{III) } f(x) < 0$$

$$x^4 - 1 < 0$$

$$x^4 < 1$$

$$x^4 < 1^4$$

$$|x| < |1|$$

$$|x| < 1$$

$$-1 < x < 1.$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

(Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\alpha. f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad \beta. f(x) = -\sqrt{9-x^2} \quad \gamma. f(x) = \sqrt{x^2-9} \quad \delta. f(x) = -\sqrt{x^2-9}$$

(Μονάδες 6)

α) Άρα f άρτια $f(-1) = f(1)$

$$1 < 2 \xrightarrow{f \uparrow} f(1) < f(2) \Rightarrow f(-1) < f(2)$$

β) $0 \leq x \leq 3 \xrightarrow{f \uparrow} f(0) \leq f(x) \leq f(3)$

$$-3 \leq x \leq 0 \xrightarrow{f \downarrow} f(-3) \geq f(x) \geq f(0)$$

$$f(3) \geq f(x) \geq f(0)$$

Σε κάθε περίπτωση αν

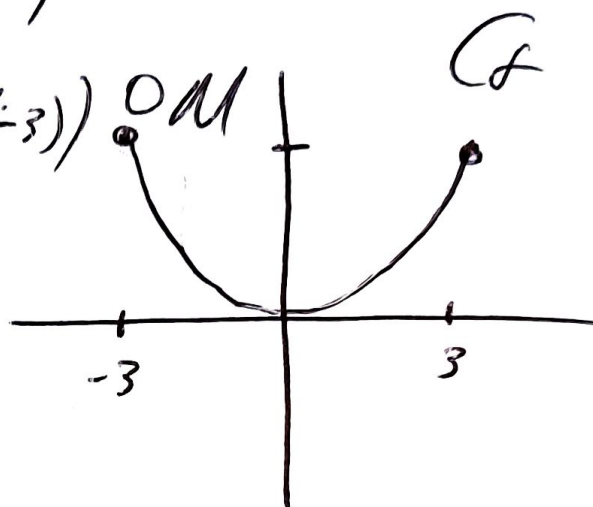
$$-3 \leq x \leq 3 \text{ τότε } f(0) \leq f(x) \leq f(3)$$

⑧ $A \varphi \omega \quad |f(0)| \leq f(x) \leq f(3)$

To $A(0, f(0))$ O. E

To $B(3, f(3))$ O. M.

To $C(-3, f(-3))$ O. M.



⑧. $x^2 - 9 \geq 0$

$x^2 \geq 9$

$|x| \geq 3$

$x \geq 3$ ή $x \leq -3$

$x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

$\text{Επειδή } x \in [-3, 3]$

από το $x^2 - 9 \leq 0$

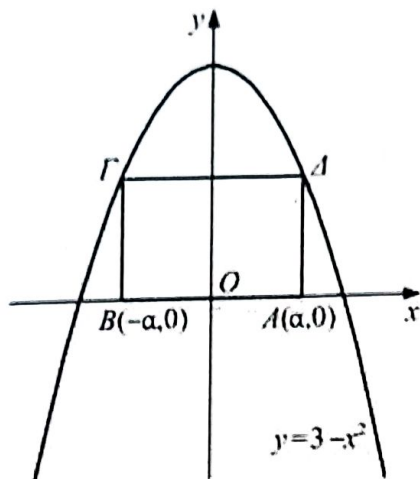
Απόρ/τα.

δ και δ .

$\sum \omega \omega \omega \omega A$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ . Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.



α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 08)

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$.

(Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 03)

$$\textcircled{\alpha} \text{ i) } E = 2\alpha \cdot (3 - \alpha^2) = -2\alpha^3 + 6\alpha$$

$$\text{ii) Για } \alpha = 1 \quad E = 4$$

$$\textcircled{\beta} \text{ Αρκεί να } E(\alpha) \leq 4 \quad (\Rightarrow) -2\alpha^3 + 6\alpha \leq 4$$

$$-\alpha^3 + 3\alpha \leq 2 \quad (\Rightarrow) -\alpha^3 + 3\alpha - 2 \leq 0,$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 3 & -2 & \textcircled{1} \\ \downarrow & -1 & -1 & 2 & \\ -1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$(a-1)(-a^2-a+2) \leq 0.$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$a = \frac{1 \pm 3}{-2} \rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{-2} \\ \textcircled{1} \end{array}$$

a	-2	1
$a-1$	$-$	$+$
$-a^2-a-2$	$-$	$-$
$P(a)$	$+$	$-$

$$\text{Εστω ότι } E(a) > 4 \Leftrightarrow P(a) > 0$$

$$a \in (-\infty, -2)$$

Αποκλείεται!
γιατί οι $(2, \sqrt{3})$

① Αφού $E(a) \leq 4$ η μέγιστη τιμή είναι το 4.

$$\text{Αφού } E(a) = 4 \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1}}$$