

Επαναληπτική

Εργασία

Ροθρου

μεταβολής.

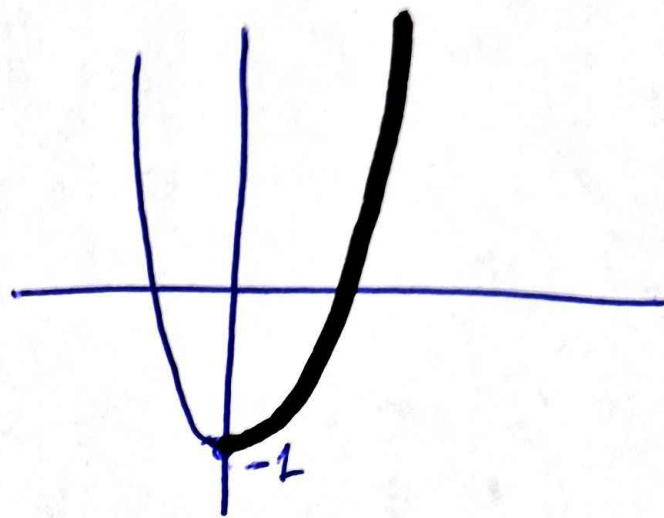
Ένα υλικό σημείο M

κινείται κατά μήκος της παραβολής

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad x \geq 0$$

Η ταχύτητα του M
αλλάσσεται με ρυθμό

$$1 \text{ μον/sec}$$



Τη χρονική στιγμή t_1

το M διέρχεται από σημείο A με
ταχύτητα 2.

Ζητούμενα

1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής
της ταχύτητας του M τη
χρονική στιγμή t_1 .

2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής
του εμβαδού του τριγώνου $\triangle MOK$
όπου O η αρχή των αξόνων και K
η προβολή του M στον $y'y$, $y > 0$

3. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής
της απόστασης από τη χρονική στιγμή
 t_1

4. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής
του εμβαδού του κύκλου εσωτερικού
Μ ο οποίος εφαπτάται στον $x'x$
αν $y > 0$.

5. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής
της γωνίας $\angle MOx$, αν $y > 0$
τη χρονική στιγμή t_1 .

6. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου
 $ΜΚΓ$ όπου $Γ(4,0)$ τη χρονική στιγμή
 t_1 .
Κ η προβολή στον $x'x$ του Μ
όπου $κ(x,0)$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 4$.

7. Να Βρωθι ο ρυθμος ρεζονανς
τη τστυρωσι του συριου τωρι
τη εφασωρι τη $(f \text{ σε } \omega$
Μ ρε ζων x'x τη χρονικη
συχη f_1 .

1. Γνωρίζω ότι

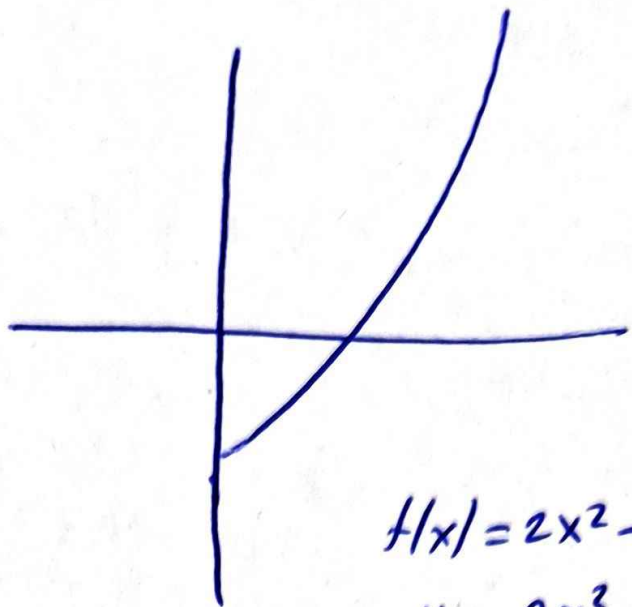
$$x'(t) = 1$$

$$A(2, 7)$$

$$x(t_1) = 2$$

$$y(t_1) = 7$$

Ψάχνω το $y'(t_1)$



$$f(x) = 2x^2 - 1$$

$$y = 2x^2 - 1$$

$$\rightarrow y(t) = 2x^2(t) - 1$$

$$y'(t) = 4x(t)x'(t)$$

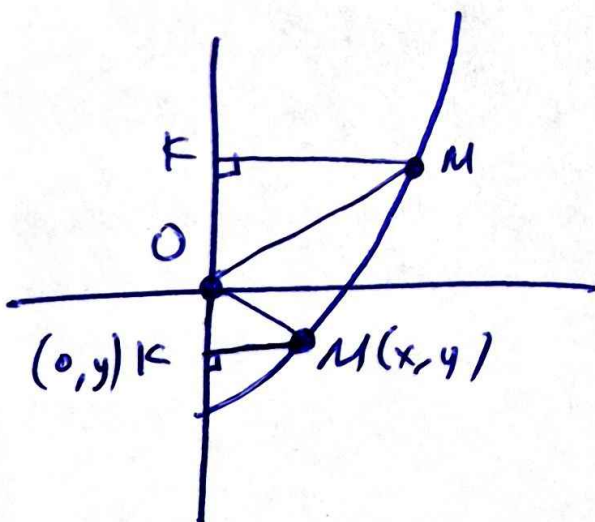
$$\underline{t = t_1}$$

$$y'(t_1) = 4x(t_1)x'(t_1)$$

$$y'(t_1) = 4 \cdot 2 \cdot 1$$

$$y'(t_1) = 8$$

2.



$$E = \frac{B \cdot U}{2}$$

$$E = \frac{y \cdot x}{2}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t)y(t)$$

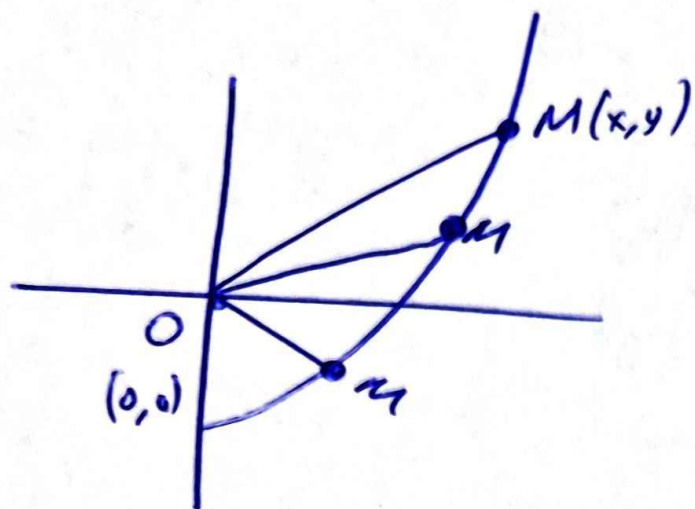
$$E'(t) = \frac{1}{2} (x'(t)y(t) + x(t)y'(t))$$

$$\underline{t = t_1}$$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2} (x'(t_1)y(t_1) + x(t_1)y'(t_1))$$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2} (1 \cdot 7 + 2 \cdot 8) = \frac{23}{2}$$

3. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης OM τη χρονική στιγμή t_1 .



$$OM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$$

$$\underline{t = t_1}$$

$$d'(t_1) = \frac{x(t_1)x'(t_1) + y(t_1)y'(t_1)}{\sqrt{x^2(t_1) + y^2(t_1)}}$$

$$d'(t_1) = \frac{2 \cdot 1 + 7 \cdot 8}{\sqrt{2^2 + 7^2}}$$

$$d'(t_1) = \frac{58}{\sqrt{53}}$$

4. $E = n \rho^2$

$E = n \cdot y^2$

$E(t) = n y^2(t)$

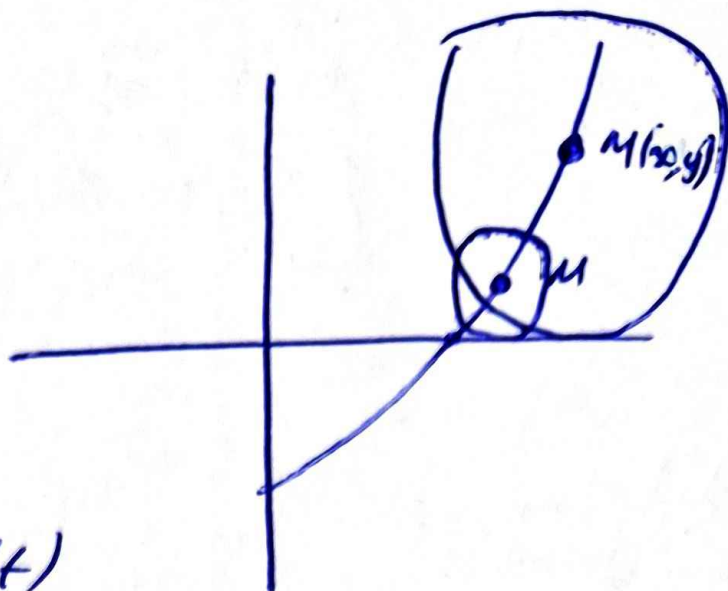
$E'(t) = 2n y(t) y'(t)$

$t = t_1$

$E'(t_1) = 2n y(t_1) y'(t_1)$

$E'(t_1) = 2n \cdot 7 \cdot 8$

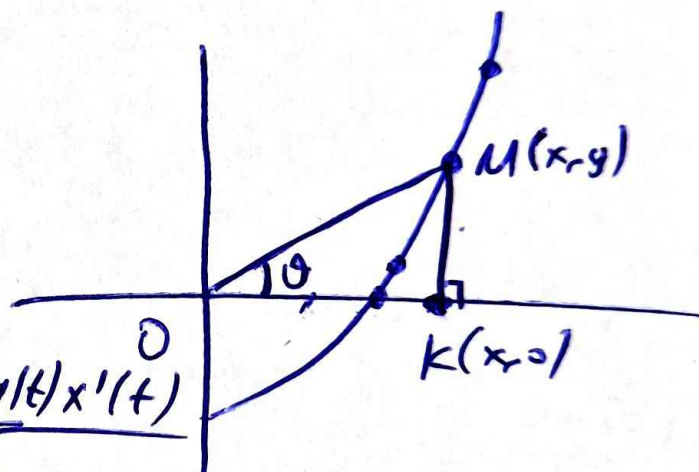
$E'(t_1) = 112n$



5. $\varepsilon \varphi \dot{\theta} = \frac{y}{x}$

$\varepsilon \varphi \dot{\theta}(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$

$\frac{1}{\sigma \omega^2 \theta(t)} \dot{\theta}(t) = \frac{y'(t)x(t) + y(t)x'(t)}{x^2(t)}$



$\dot{\theta}(t) = \frac{y'(t)x(t) + y(t)x'(t)}{x^2(t)} \cdot \sigma \omega^2 \theta(t)$

$\dot{\theta}(t) = \frac{y'(t)x(t) + y(t)x'(t)}{x^2(t)} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \theta(t)}$

$$\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) + y(t)x'(t)}{x^2(t)} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}$$

$$\underline{t = t_1}$$

$$\theta'(t_1) = \frac{y'(t_1)x(t_1) + y(t_1)x'(t_1)}{x^2(t_1)} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t_1)}{x(t_1)}\right)^2}$$

$$\theta'(t_1) = \frac{8 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\theta'(t_1) = \frac{23}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{49}{4}} = \frac{23}{4} \cdot \frac{1}{\frac{53}{4}}$$

$$\theta'(t_1) = \frac{23}{53}$$

$$6. \quad \mathcal{E} = \frac{B \cdot V}{2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{(4-x)y}{2}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (4 - x(t)) y(t)$$

$$\mathcal{E}'(t) = \frac{1}{2} \left[-x'(t) y(t) + (4 - x(t)) y'(t) \right]$$

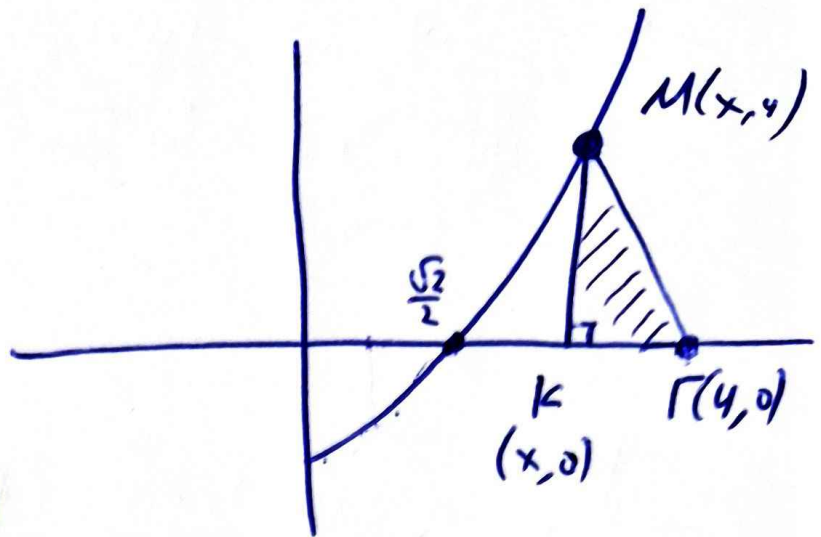
$$\underline{t = t_1}$$

$$\mathcal{E}'(t_1) = \frac{1}{2} \left[-x'(t_1) y(t_1) + (4 - x(t_1)) y'(t_1) \right]$$

$$\mathcal{E}'(t_1) = \frac{1}{2} \left[-1 \cdot 7 + (4 - 2) \cdot 8 \right]$$

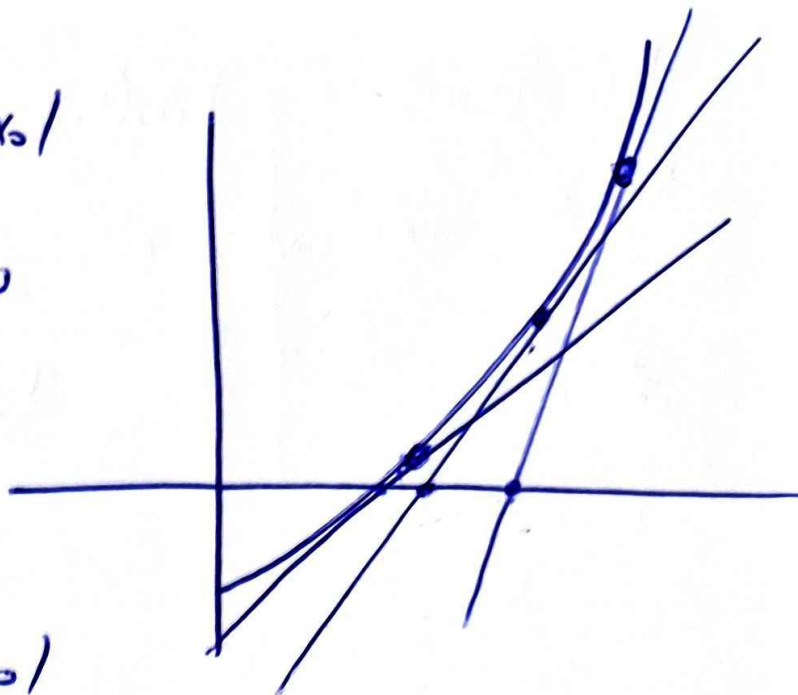
$$\mathcal{E}'(t_1) = \frac{1}{2} \left[-7 + 16 \right]$$

$$\mathcal{E}'(t_1) = \frac{9}{2}$$



7. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Για $y=0$ Βρίσκω
το σημείο τομής
με τον $x'x$.



$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-(2x_0^2 - 1) = 4x_0(x - x_0)$$

$$-2x_0^2 + 1 = 4x_0x - 4x_0^2$$

$$2x_0^2 + 1 = 4x_0x$$

$$x = \frac{2x_0^2 + 1}{4x_0}$$

Η τετρήνηση του σημείου
τομή της εφαπτομένης
στο $M(x_0, y_0)$ με τον $x'x$.

$$x(t) = \frac{2x_0^2(t) + 1}{4x_0(t)}$$

$$x'(t) = \frac{4x_0(t)x_0'(t) - (2x_0^2(t) + 1)4x_0'(t)}{16x_0^2(t)}$$

$$t=t_1 \Rightarrow x'(t_1) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 - (2 \cdot 2^2 + 1) \cdot 4 \cdot 1}{16 \cdot 4} = \frac{64 - 36}{64} = \frac{28}{64}$$