Επανάληψη

για το

Τεστ

Τρίτη 6/10/26

2

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ερωτήσεις - Απαντήσεις & Σωστό / Λάθος

Σκοπός: Συγκεντρωμένο υλικό επανάληψης από τις ενότητες 1.1, 1.3, 1.6, 1.7, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13 και 1.14, μαζί με τις προτάσεις Σωστό/Λάθος των εικόνων.

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1.1: Συνάρτηση

Ερώτηση: Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Απάντηση:

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Ο αριθμός y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x).

Πεδίο ορισμού: Α | Σύνολο τιμών: $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}$

1.3: Ισότητα συναρτήσεων

Ερώτηση: Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση:

Οι συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g = A$, και

ii. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

1.6: Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

1.7: Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

1.10: Γνησίως μονότονη συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Η f λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

1.11: Ακρότατα συνάρτησης - ολικό μέγιστο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:

Η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

1.12: Ακρότατα συνάρτησης - ολικό ελάχιστο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:

Η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

1.13: Συνάρτηση 1-1

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Απάντηση:

Η f λέγεται 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

1.14: Αντίστροφη συνάρτηση

Ερώτηση: Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (i) Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται; (ii) Πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

Απάντηση:

i. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι 1-1 στο A.

ii. Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζουμε με f^{-1} τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f και αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

$$f^{-1} : f(A) \to A, \quad \text{με} \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Β. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Οι προτάσεις είναι γραμμένες σε μορφή επανάληψης. Στις λανθασμένες προτάσεις δίνεται και η σωστή διατύπωση ή η βασική διόρθωση.

1	Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.	**Σωστό**
2	Η γραφική παράσταση της |f| αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.	**Σωστό**
3	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\|x\|}$, $x\in\mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.	**Σωστό**
4	Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f/g είναι το Α∩Β. Διόρθωση: Για το πηλίκο πρέπει επιπλέον $g(x)\neq 0$. Άρα $D_{f/g}=\{x\in A\cap B : g(x)\neq 0\}$.	**Λάθος**
5	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις f∘g και g∘f, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες. Διόρθωση: Γενικά δεν ισχύει $f\circ g = g\circ f$.	**Λάθος**
6	Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι f∘g και g∘f, τότε είναι υποχρεωτικά $f\circ g \neq g\circ f$. Διόρθωση: Μπορεί οι δύο συνθέσεις να είναι ίσες ή διαφορετικές· δεν υπάρχει υποχρεωτικά ανισότητα.	**Λάθος**
7	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η g∘f ορίζεται αν $f(A)\cap B \neq \varnothing$.	**Σωστό**
8	Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0,1] και σύνολο τιμών το [2,3], τότε ορίζεται η g∘f με πεδίο ορισμού το [0,1] και σύνολο τιμών το [2,3]. Διόρθωση: Εδώ $f(x)\in[2,3]$, ενώ το πεδίο ορισμού της g είναι [0,1], οπότε δεν υπάρχει x για το οποίο f(x) να ανήκει στο D_g.	**Λάθος**
9	Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.	**Σωστό**
10	Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.	**Σωστό**
11	Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y=x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.	**Σωστό**
12	Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.	**Σωστό**
13	Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.	**Σωστό**

14	Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.	**Σωστό**
15	Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.	**Σωστό**
16	Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x$, $x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y$, $y\in f(A)$.	**Σωστό**
17	Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f(f^{-1}(x))=x$, για κάθε $x\in A$. Διόρθωση: Η σχέση $f(f^{-1}(y))=y$ ισχύει για $y\in f(A)$, όχι γενικά για κάθε $x\in A$.	**Λάθος**
18	Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη. Διόρθωση: Σε συνάρτηση 1-1 διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης δεν μπορούν να έχουν την ίδια τεταγμένη.	**Λάθος**
19	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.	**Σωστό**
20	Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1)<f(x_2)$. Διόρθωση: Πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$: $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.	**Λάθος**
21	Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$.	**Σωστό**
22	$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.	**Σωστό**
23	Για κάθε συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0\in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0. Διόρθωση: Η ύπαρξη του ορίου στο x_0 δεν συνεπάγεται ότι $\lim f(x)=f(x_0)$. Αυτό απαιτεί συνέχεια της f στο x_0.	**Λάθος**
24	Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Ισχύει: $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.	**Σωστό**

Συμβουλή μελέτης: Κάλυψε τη στήλη «Απάντηση», απάντησε πρώτα μόνος/μόνη σου και μετά έλεγξε. Στις λανθασμένες προτάσεις μάθε κυρίως τη διορθωμένη διατύπωση.

Ισότητα Συναρτήσεων

Δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι ίσες όταν έχουν ίδιο τύπο και ίδιο πεδίο ορισμού.

Δηλαδή $A_f = A_g$ και $f(x) = g(x)$ $\forall x$.

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = x - \ln(e^x - 1)$, $x > 0$

Έστω $g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right)$, $x > 0$

Κατάρχας $A_f = A_g = (0, +\infty)$

$$g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1} = \ln e^x - \ln(e^x - 1) =$$

$$= x - \ln(e^x - 1) = f(x)$$

Έχω ίδιο πεδίο ορισμού

και ίδιο τύπο άρα ίσα!

Άσκηση 2

Έστω $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2)$, $A_f = (2, +\infty)$

Έστω $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$, $A_g = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

Καταρχάς $A_f \neq A_g$ άρα οι γραφικές δεν είναι ίσες.

$g(x) = \ln \frac{x-1}{x-2} = \ln(x-1) - \ln(x-2) = H(x)$

Έχουν ίδιο τύπο.

Το κοινό σύνολο $(2, +\infty)$

είναι ίσες.

Πράξεις Συναρτήσεων

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$A_{f+g} = A_{f-g} = A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$A_{f/g} = A_f \cap A_g$ και $g(x) \neq 0$.

Ασκηση 3

Εστω $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$, $x > 0$

Εστω $g(x) = \frac{1}{4-x}$, $x < 4$

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}$

  $A_{f+g} = A_f \cap A_g = (0, 4)$

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{4-x}$

  $A_{f-g} = A_f \cap A_g = (0, 4)$

- $(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x) = \left(4 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{4-x}$

  $A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g = (0, 4)$.

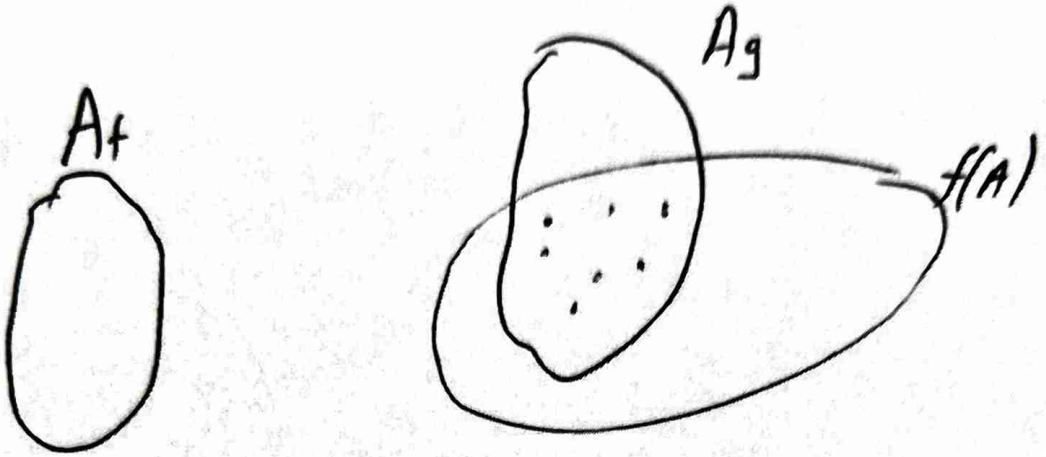
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4-\frac{1}{x}}{\frac{1}{4-x}} = \frac{\frac{4x-1}{x}}{\frac{1}{4-x}} = \frac{(4x-1)(4-x)}{x}$

pentru $g(x) \neq 0$ adică $\frac{1}{4-x} \neq 0 \Rightarrow 1 \neq 0$

Adevărat,

$D_{f/g} = A_f \cap A_g = (0,4)$.

Σύνθεση Συναρτήσεων



Παρατηρώ ότι $A_g \cap f(A) \neq \emptyset$

Τότε ορίζεται η $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

Άσκηση 4

Έστω $f: (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2\ln(x-1)$

Έστω $g: [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) =$

$= 2\ln\sqrt{x-2} = \ln\sqrt{x-2}^2$

$= \ln(x-2)$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \geq 2$ και $g(x) > 1$

$\sqrt{x-2} + 1 > 1$

$\sqrt{x-2} > 0$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$A_{f \circ g} = (2, +\infty)$

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2\ln(x-1) - 2} + 1$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$x > 1$ και $f(x) \geq 2$

$2\ln(x-1) \geq 2$

$\ln(x-1) \geq 1$

$e^{\ln(x-1)} \geq e^1$

$x - 1 \geq e$

$x \geq e + 1$

$D_{g \circ f} = [e+1, +\infty)$.

Αντιστροφή

1. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $\quad x \in (0,1)$

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)$

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1)$$

$$x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ 1-1 άρα}$$

η $f(x)$ αντιστρέφεται.

$y = \ln \frac{x}{1-x}$ ⟶ Τσεκαρω ον $y \geq 0$

Εδω δεν ειναι!

$e^y = e^{\ln \frac{x}{1-x}}$

$e^y = \frac{x}{1-x}$ ⇝ $e^y(1-x) = x$

$e^y - x e^y = x$

$e^y = x + x e^y$

$e^y = x(1+e^y)$

$\frac{e^y}{1+e^y} = x$

$1+e^y \neq 0$ που ειναι.

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad x \in [0,1]$.

$$f(x) = (x-1)^2$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$ (⊖ ⊖)

$$(x_1-1)^2 > (x_2-1)^2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad f \downarrow$$

$\longrightarrow y = (x-1)^2$ אזי $y \geq 0$

$$\sqrt{y}^2 = (x-1)^2$$

$$|\sqrt{y}| = |x-1| \quad (\oplus \; \ominus)$$

אם $0 \leq x \leq 1$

$$0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1$$

$$\sqrt{y} = 1 - x$$

$0 \leq 1 - \sqrt{y}$ וגם $\sqrt{y} \leq x$

$$x = 1 - \sqrt{y}$$

$\sqrt{y} \leq 1$ $\quad -\sqrt{y} \leq 0$

$y \leq 1$ $\quad$ מכאן $0 \leq x \leq 1$

$$\boxed{f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x} \qquad D_{f^{-1}} = [0,1].}$$

Άσκηση 502

Δίνεται $f(x) = x^5 + x$

(α) Νδο η $f(x)$ αντιστρέφεται

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$ $\quad f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 < x_2$ ——| ⊕ $\quad f \nearrow$

(β) Να βρεθεί η μονοτονία της αντίστροφης

Έστω $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

$f \nearrow$

$f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2))$

$x_1 < x_2$ $\quad f^{-1} \nearrow$

(γ) Νδο f περιττή

$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x$

$= -(x^5 + x)$

$= -f(x)$

f περιττή $f(-x) = -f(x)$

⑧ Εξίσωση $f(x^5+2x-2)-x^5=x$

$$f(x^5+2x-2)=x^5+x$$

$$f(x^5+2x-2)=f(x)$$

f 1-1

$$x^5+2x-2=x$$

$$x^5+x-2=0$$

$$x^5+x=2$$

$$f(x)=f(1)$$

f 1-1

$$x=1.$$

(ε) Ανίσωση $\left(f^{-1}(x)\right)^5 + f^{-1}(x) < 1 - \ln x$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) < 1 - \ln x$$

$$x < 1 - \ln x$$

$$\underbrace{x + \ln x - 1 < 0}$$

$$h(x) < 0$$

$$h(x) < h(1)$$

Η h ↑

$$0 < x < 1$$

αφού $\ln x$ Τα $x > 0$

Μονοτονία $h(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$

$\Big\}$ ⊕ $h(x_1) < h(x_2)$

(3) Επίσης $f^{-1}\left(f(e^{x+1}) - f^{-1}(34)\right) = 0$

Αφού $f(2) = 34$ τότε $f^{-1}(34) = 2$

$$f^{-1}\left(f(e^{x+1}) - 2\right) = 0$$

$$f\left(f^{-1}\left(f(e^{x+1}) - 2\right)\right) = f(0)$$

$$f(e^{x+1}) - 2 = 0$$

$$f(e^{x+1}) = 2$$

$$f(e^{x+1}) = f(1)$$

f 1-1

$$e^{x+1} = 1$$

$$\ln e^{x+1} = \ln 1$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

(h) Επίσης $f(2x) - f(x) + x = 0$

$$f(2x) + 2x = f(x) + x$$

$$\boxed{g(x) = f(x) + x}$$

$$g(2x) = g(x)$$

g : 1-1

$$2x = x$$

$$2x - x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

Μονοτονία $g(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 < x_2$ ——| $\ominus$

$$f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$$

$$g(x_1) < g(x_2)$$

$g \nearrow$

(θ) εξίσωση $f(x) = 2 + f^{-1}(1-x)$

$$\underbrace{f(x) - 2 - f^{-1}(1-x)}_{h(x)} = 0$$

$h(x) = 0$

$h(x) = h(1)$

$h \circ 1$

$x = 1$

Μονοτονία $h(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - 2 < f(x_2) - 2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow f^{-1}(1-x_1) > f^{-1}(1-x_2)$

$$-f^{-1}(1-x_1) < -f^{-1}(1-x_2)$$

$h(x_1) < h(x_2)$

$h \nearrow$

(+)

$\rightarrow h(1) = f(1) - 2 - f^{-1}(0) = 2 - 2 + 0 = 0$

αφού $f(0) = 0$ το $f^{-1}(0) = 0$

(i) Έστω $f(x^2)+x=f(x)+1$ στο $[0,+\infty)$.

$$f(x^2)-f(x)+x-1=0$$

Προφανή ρίζα $x=1$

$x>1$

- $x^2>x \Rightarrow f(x^2)>f(x) \Rightarrow f(x^2)-f(x)>0$
- $x>1 \Rightarrow x-1>0$ ——— (+)

$$f(x^2)-f(x)+x-1>0$$

$0\leq x<1$

- $x^2<x \Rightarrow f(x^2)<f(x) \Rightarrow f(x^2)-f(x)<0$
- $x<1 \Rightarrow x-1<0$ ——— (+)

$$f(x^2)-f(x)+x-1<0$$