

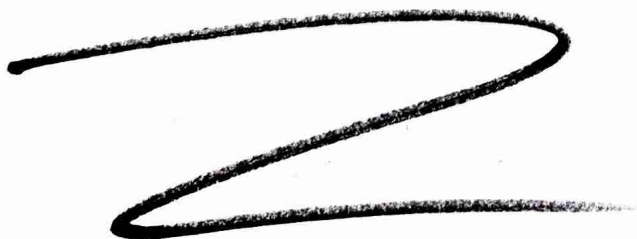
Επαναληψη

για το

1ο Τεστ

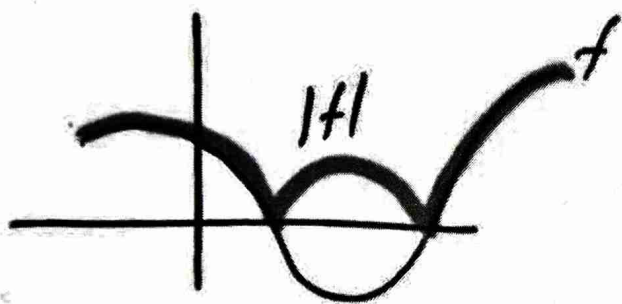
Μαθηματικων

Συναρτησεις



1. καθώς κατακόρυφη ευθεία τερνι
τη γραφική παράσταση της $f(x)$
το πολύ 1 φορά. Σωστό

2. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτε-
λείται από τα θετικά τμήματα της
 $f(x)$ και τα συρρετρικά των αρνητικών
Σωστό



3. Η $f(x) = \sqrt{|x|}$ είναι άρτια συνάρτηση
συρρετρική ως προς y/y Σωστό

4. Οι $f \circ g$ και $g \circ f$ δεν είναι
υποχρεωτικά ίσα Σωστό

5. Οι $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Σωστό

6. Αν f, g με $D_f = A, D_g = B$ τότε η
gof ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$ Σωστό

7. Η f, f^{-1} είναι συμμετρικά ως
προς την $y = x$ Σωστό

8. Αν το $M(a, b) \in f$ το $N(b, a) \in f^{-1}$
Σωστό

9. Αν η f είναι 1-1 τότε

→ καθε ορίζοντα εικόνα τέμνει τη f
το πολύ μια φορά.

→ Η επίσωση $f(x) = y$ έχει το πολύ μια
λύση.

→ Αν οπως $f: A \rightarrow B$ τότε η $f(x) = y$
έχει ακριβώς μια λύση Σωστό.

→ Δεν υπάρχουν σημεία της f με την
ίδια τεταγμένη.

10. $f(f^{-1}(x)) = x \quad x \in H(A)$

2050

11. Η f είναι συμμετρική με την

Σωστό

12. Av n f :-1 Tozc Σωσζ

$$x_1 = x_2 \quad (\Rightarrow) f(x_1) = f(x_2)$$

13. Av n f3/-1 TOCC Σνωω

$$x_1 \neq x_2 \quad (\Rightarrow) \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

αριθμός
που έχει
απάντηση

Σωστά - Λάθος 2004 - 2022
(Κανονικές και Επαναληπτικές)

Απάντηση

1	Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .	Σ
1	Η γραφική παράσταση της $ f $ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.	Σ
1	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{ x }$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.	Σ
1	Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.	Λ
3	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.	Λ
1	Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.	Λ
2	Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.	Σ
1	Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.	Λ
2	Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.	Σ

1	Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.	Σ
1	Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .	Σ
1	Αν ένα σημείο $M(a,b)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(b,a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .	Σ
3	Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow R$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .	Σ
2	Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.	Σ
1	Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow R$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$	Σ
1	Αν μια συνάρτηση $f:A \rightarrow R$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$	Σ
1	Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.	Λ

1	Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.	Λ
1	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f	Σ
1	Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.	Λ

1 Ορισμοί

super sos

Ορισμός 1.1: (Συνάρτηση)

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Απάντηση:

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Πεδίο Ορισμού: $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Σύνολο τιμών: $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

sos

Ορισμός 1.2: (Γραφική παράσταση συνάρτησης)

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$ λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

super sos

Ορισμός 1.3: (Ισότητα συναρτήσεων)

Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση:

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g = A$ και
- ii. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

505

Ορισμός 1.4: (Πράξεις συναρτήσεων)

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

Απάντηση:

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο $f \cdot g$ και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Επιπλέον,

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = A \cap B$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

505

Ορισμός 1.5: (Σύνθεση συναρτήσεων)

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση:

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και τη συμβολίζουμε $g \circ f$ τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A: f(x) \in B\}$.

Η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

supersos

Ορισμός 1.6: (Γνησίως αύξουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

supersos

Ορισμός 1.7: (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

boru

Ορισμός 1.8: (Αύξουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

600M

Ορισμός 1.9: (Φθίνουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

505

Ορισμός 1.10: (Γνησίως μονότονη συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .

super505

Ορισμός 1.11: (Ακροτάτα συνάρτησης - ολικό μέγιστο)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

super505

Ορισμός 1.12: (Ακροτάτα συνάρτησης - ολικό ελάχιστο)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

supersos

Ορισμός 1.13: (Συνάρτηση 1-1)

Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

supersos

Ορισμός 1.14: (Αντιστροφή συνάρτησης)

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του B .

- i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ αντιστρέφεται;
- ii. Με την προϋπόθεση ότι η f αντιστρέφεται, πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;

Απάντηση:

- i. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ αντιστρέφεται όταν είναι 1-1 στο A .
- ii. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι 1-1, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1} , τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A, \text{ με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις,

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2)$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

Να εξετάσεται αν είναι ισός σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x-2) = f(x)$$

έχων ως πεδ.

D_f

πρέπει $x-1 > 0$ και $x-2 > 0$

$$x > 1$$

$$x > 2$$

$$\underline{D_f = (2, +\infty)}$$

Εν γὰρ δὲν είναι ισός.

Σὺν $(2, +\infty)$ είναι ισός

D_g

πρέπει $\frac{x-1}{x-2} > 0$

x	1	2
x-1	-	+
x-2	-	+
$\frac{x-1}{x-2}$	+	+

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

2.

Εστω συναρτήσεις.

$$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g: (-\infty, 3) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{x}{x-3}$$

Ψάχνω την $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

$$\bullet (f+g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x-3} = \frac{x-3+x^2}{x(x-3)} = \frac{x^2+x-3}{x^2-3x}$$

$$\bullet (f-g)(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x-3} = \frac{x-3-x^2}{x(x-3)} = \frac{-x^2+x-3}{x^2-3x}$$

$$\bullet (f \cdot g)(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-3} = \frac{\cancel{x}}{x(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [1, 3)$$

$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-3}} = \frac{x-3}{x^2}$$

$$\text{οπότε } g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{x-3} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_{f/g} = [1, 3)$$

3.

 $\in \sigma_{TW}$

$$f(x) = \ln(x-1), \quad x > 1$$

$$\text{or } g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad x \leq 2$$

Bpd $\tau_{TW} (f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(x^2 - 4x + 4 - 1) = \\ = \ln(x^2 - 4x + 3)$$

$$\boxed{x \in D_g \quad \text{or} \quad g(x) \in D_f}$$

$$x \leq 2$$

$$x^2 - 4x + 4 > 1$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

x	1	3
$x^2 - 4x + 3$	+	-

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{Apd } D_{f \circ g} = (-\infty, 1)$$

4

Δίνονται οι συναρτήσεις.

$$\bullet f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet g(x) = x - \sqrt{1-x}, x \leq 1$$

Νόσο η f και η g είναι 1-1.

f

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1}$$

$$(e^{x_1} - 1)(e^{x_2} + 1) = (e^{x_2} - 1)(e^{x_1} + 1)$$

$$\cancel{e^{x_1/x_2}} \cancel{e^{x_2/x_1}} + \cancel{e^{x_1}} - \cancel{e^{x_2}} - 1 = \cancel{e^{x_2/x_1}} \cancel{e^{x_1/x_2}} + \cancel{e^{x_2}} - \cancel{e^{x_1}} - 1$$

$$2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

$$f \text{ 1-1.}$$

g

$$\bullet x_1 < x_2$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$$

$$1 - x_1 > 1 - x_2$$

$$(\oplus) \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2}$$

$$-\sqrt{1-x_1} < -\sqrt{1-x_2}$$

$$x_1 - \sqrt{1-x_1} < x_2 - \sqrt{1-x_2}$$

$$g(x_1) < g(x_2)$$

$$f \nearrow$$

$$\Rightarrow g \text{ 1-1.}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad x > 1.$$

Νόο η f αντιστρέφεται και να

Βρω την αντιστροφή.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln \frac{x_1}{x_1-1} = \ln \frac{x_2}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1-1} = \frac{x_2}{x_2-1} \quad (\Rightarrow x_1(x_2-1) = x_2(x_1-1))$$

$$x_1 \cancel{x_2} - x_1 = \cancel{x_2} x_1 - x_2 \quad \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$f(x)-1$

$$y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

απ' αντιστρέφεται.

$$e^y = \frac{x}{x-1}$$

$$x(e^y-1) = e^y$$

$$x = \frac{e^y}{e^y-1}$$

$$e^y - 1 \neq 0$$

$$e^y \neq 1$$

$$e^y(x-1) = x$$

$$f^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y-1}$$

$$\underline{\underline{y \neq 0}}$$

$$e^y x - e^y = x$$

$$e^y x - x = e^y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$$

Opwd

$$x > 1$$

$$\frac{e^y}{e^y - 1} > 1$$

$$\frac{e^y}{e^y - 1} - 1 > 0$$

$$\frac{e^y}{e^y - 1} - \frac{e^y - 1}{e^y - 1} > 0$$

$$\frac{e^y - e^y + 1}{e^y - 1} > 0$$

$$\frac{1}{e^y - 1} > 0$$

$$e^y - 1 > 0$$

$$e^y > 1$$

$$y > 0$$

$$D_{f-1} = (0, +\infty).$$

tips αντιστροφής.

$$y = \sqrt{x-1}$$

$$\underline{\underline{y \geq 0}}$$

$$y = e^{x-2} \quad \vee \quad y = (x-2)^2$$

$$\underline{\underline{y > 0}}$$

$$y \geq 0$$

Αυτο αφορά πάντα το $\{ \text{examples} \}$

Μπορεί οπρ. να έχει.

$$y = \ln|x-2| \quad \vee \quad y = \frac{x-1}{x-2}$$

εδώ δε θεωρούμε

Στη συνέχεια καβάλ θεωρούμε

πρ. x όταν διαρκ. π.χ με $y-1$

πρέπει να πω $y-1 \neq 0$

$$\vee \text{ όταν έχω } e^x = \frac{y-1}{y-2}$$

$$x = \ln\left(\frac{y-1}{y-2}\right) \text{ πρέπει } \frac{y-1}{y-2} > 0$$

6. Ανιστορυφ (περλτωσα.)

• $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $x \geq 1$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$\underline{\underline{y \geq 0}}$$

$$y^2 = \frac{x-1}{x}$$

$$x y^2 = x - 1$$

$$x y^2 - x = -1$$

$$x(y^2 - 1) = -1$$

$$x = \frac{-1}{y^2 - 1}$$

$$y^2 - 1 \neq 0$$

$$\underline{\underline{y \neq 1}} \quad \underline{\underline{y \neq -1}}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{-1}{y^2 - 1}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{-1}{x^2 - 1}}$$

$$x \geq 1$$

$$\frac{-1}{y^2 - 1} \geq 1$$

$$-\frac{1}{y^2 - 1} - 1 \geq 0$$

$$\frac{-1}{y^2-1} - \frac{y^2-1}{y^2-1} \geq 0$$

$$\frac{-1-y^2+1}{y^2-1} \geq 0$$

$$\frac{-y^2}{y^2-1} \geq 0$$

$$y^2-1 < 0$$

y	-1	1
y^2-1	+	-

$$\underline{\underline{y \in (-1, 1)}}$$

Перепроверка

• $y \geq 0$

• $y \neq 1$

• $y \neq -1$

• $y \in (-1, 1)$

$$D_{f-1} = [0, 1)$$

$$\bullet f(x) = (x-1)^2$$

$$y = (x-1)^2$$

$$\sqrt{y}^2 = (x-1)^2$$

$$|\sqrt{y}^{\oplus}| = |x-1|^{\ominus}$$

$$\sqrt{y} = -x+1$$

$$x = 1 - \sqrt{y}$$

$$f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}}}$$

$$x \leq 1$$

$$\underline{\underline{y \geq 0}}$$

$$\text{opnd } x \leq 1$$

$$\cancel{1 - \sqrt{y} \leq 1}$$

$$-\sqrt{y} \leq 0$$

now $10x \leq 1$

$$D_{f^{-1}} = [0, +\infty).$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 0$$

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$y(x+1) = x$$

$$yx + y = x$$

$$yx - x = -y$$

$$x(y-1) = -y$$

$$x = \frac{-y}{y-1}$$

$$y-1 \neq 0$$

$$\underline{\underline{y \neq 1}}$$

$$x \geq 0$$

$$\frac{-y}{y-1} \geq 0$$

$$f^{-1}(y) = \frac{-y}{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-x}{x-1}$$

$$D_{f^{-1}} = [0, 1)$$

y	0	1
-y	+	-
y-1	-	+
$\frac{-y}{y-1}$	-	+

$$\underline{\underline{y \in [0, 1)}}$$

7. $\subset \sigma \tau w$ $f(x) = e^x + x - 1$

α) Νόσ u $f \circ | - 1$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad \} \oplus$$

$$e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$f \nearrow$

αρα $f \circ | - 1$.

β) Λύσε που τινε εξίσωση

$$f(\ln x) - f(1-x) = 0$$

$$f(\ln x) = f(1-x)$$

$$f \circ | - 1$$

$$\ln x = 1-x$$

$$\ln x + x - 1 = 0$$

$$h(x) = 0$$

$$h(x) = h(1)$$

$$\begin{matrix} h \circ | - 1 \\ \circlearrowleft \\ x=1 \end{matrix}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad \oplus$$

$h \nearrow$

$$\Rightarrow h \circ | - 1$$

$$\textcircled{1} \quad f(e^x + x - 1) = 0 \quad \text{ε ίδιον$$

$$f(e^x + x - 1) = f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$e^x + x - 1 = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$f(1) = f(2)$$

$$f(3) = 1$$

$$x = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$