Επανάληψη

για το

διαγώνισμα

Απριλίου

Θεωρια

Θεωρια ολοκληρωματα pdf.

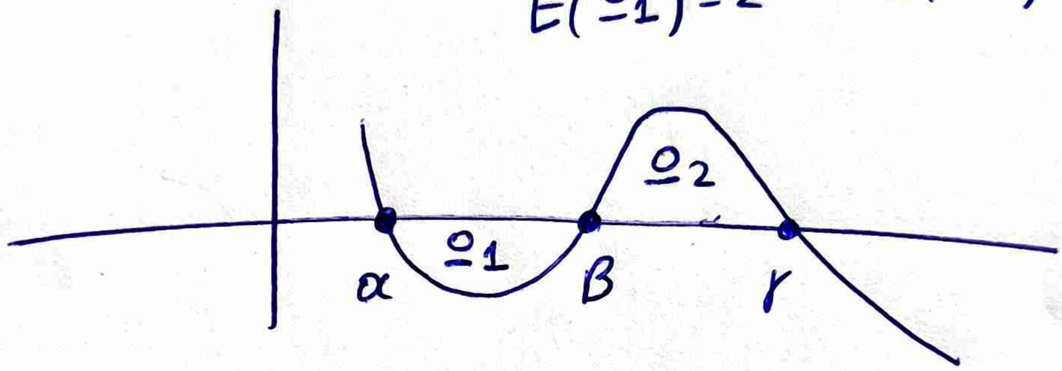
83 Ορισμος

84 Αποδειξη

92 Αποδειξη.

1. Εστω η γραφικη παρασταση της $f(x)$

$E(\Omega_1)=2 \qquad E(\Omega_2)=3$



- $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \underline{\quad -2 \quad}$

Γνωριζω οτι $E(\Omega_1) = \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

$\Leftrightarrow 2 = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \Leftrightarrow \underline{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -2}$

- $\int_\beta^\gamma f'(x)\,dx = \left(f(x)\right)_\beta^\gamma = f(\gamma) - f(\beta) = 0$

$G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Κάθε συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ. Σ

β. Αν η F είναι μια αρχική της συνάρτησης f στο διάστημα Δ, τότε $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Σ

γ. Αν οι συναρτήσεις F, G είναι παράγουσες της συνάρτησης f στο Δ, τότε οι F και G είναι ίσες. Λ

δ. i. Μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $F(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$. Λ

ii. Μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=\text{συν}x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $F(x)=\text{ημ}x$, $x\in\mathbb{R}$. Σ

iii. Όλες οι παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=\text{ημ}x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\text{συν}x+c$, $c\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. Λ

iv. Όλες οι παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$ είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\ln x+c$, $c\in\mathbb{R}$, $x>0$. Σ

ε. Όλες οι αρχικές της συνάρτησης f στο διάστημα Δ έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0\in\Delta$. Σ

Β. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**

α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ Λ

β. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$ Σ

γ. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$$ Λ

δ. $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)' = 0$ Σ

ε. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Σ

$\int_\alpha^\beta f(g(x))\, g'(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος

α. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx$, Λ

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

β. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, Λ

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

γ. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, Σ

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις.

δ. $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$,

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, Σ

$du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

α.
β.
γ.
δ.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (

α. Αν η f' είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = [xf(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta xf'(x)dx$$ Σ

β. Αν οι f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du \ , \text{ όπου } u = g(x)$$

Σ

α.
β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x)<0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Λ

β. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$. Σ

γ. Έστω δύο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, είναι

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$ Σ

δ. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εκφράζει πάντοτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Λ

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Σ

στ. Αν $I=\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε το I εκφράζει πάντοτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Λ

Ασκησεις Εμπεδωσης Θεωριας

1. Α. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$.

α. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$. Σ

β. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Λ

γ. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$. Σ

α.	β.	γ.

Β. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**

α. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

i. Αν $f(x) \geq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$. Σ

ii. Αν $f(x) \geq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε

$f(x_0) \neq g(x_0)$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$ Σ

β. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$.

i. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx \geq 0$. Σ

ii. Αν υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_0) \neq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx > 0$. Σ

iii. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Σ

iv. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Σ

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Σ

α.		β.				γ.
i.	ii.	i.	ii.	iii.	iv.	

Ασκηση 1

Εστω συναρτηση $f(x) = e^{x-1} + x\ln x - 2x$

προφανως $x>0$

$$f'(x) = e^{x-1} + \ln x + x\frac{1}{x} - 2 = e^{x-1} + \ln x - 1$$

$f'(1) = 0$

$$f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0$$

f κυρτη

x	0	1	$+\infty$
f''	$+$	$+$	
f'	$\nearrow$ $-$	0 $+$ $\nearrow$	
f	$\frac{1}{e}$ $\searrow$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

ΣΤf

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x-1} + x\ln x - 2x = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$f(1) = -1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[e^{x-1} + x\ln x - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x-1}}{x} + \ln x - 2\right) = +\infty$$

$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-1}}{x} = +\infty$

ΣΤf $= [-1, +\infty)$.

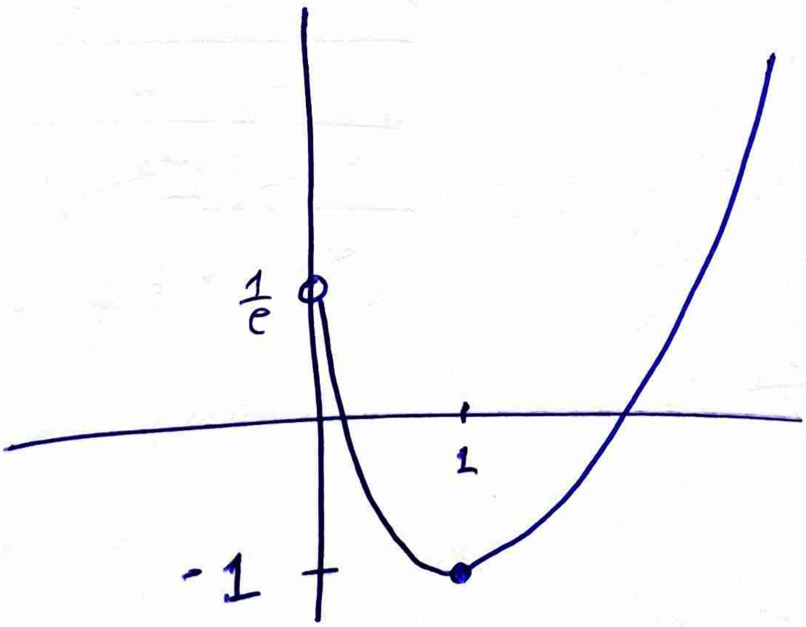
Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{e}$ δεν έχει κατακόρυφη

Αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ δεν έχει οριζόντια.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x-1} + x\ln x - 2x}{x} =$$

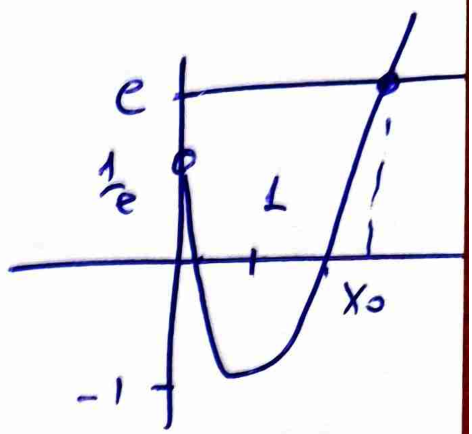
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x-1} + \ln x + 1 - 2}{1} = +\infty$$

Δεν έχει ούτε πλάγια.



SOS

Νδο η εξισωση $e^{x-1}+x\ln x=2x+e$ εχει μοναδικη ριζα.



$$e^{x-1}+x\ln x-2x=e$$

$$f(x)=e$$

Αρκει νδο η C_f τεμνει την οριζοντια ευθεια $y=e$ ακριβως μια φορα

$0<x<1$

$\Sigma T_f=[-1,\frac{1}{e})$

Το $e\notin\Sigma T_f$ αρα δεν υπαρχει ριζα εδω.

$x\geq 1$

- f συνεχης
- $f\nearrow$
- $\Sigma T_f=[-1,+\infty)$

Το $e\in\Sigma T_f$ αρα $\exists!\, x_0$ τ.ω $f(x_0)=e$.

Ασκηση 2

Εστω $f(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x \quad , x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$

$f \downarrow$

$E : (C_f , x'x , x = 2$

$\to f(x) = 0$ Προφανης ριζα το $x = 1$
και αφου $f\downarrow$ μοναδικη.

$E = \int_1^2 |f(x)|\, dx = \int_1^2 -\frac{1}{x} + 1 + \ln x \, dx$

$\boxed{x > 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0}$

$E = \int_1^2 -\frac{1}{x}\, dx + \int_1^2 1\, dx + \int_1^2 \ln x\, dx$

$E = -(\ln x)_1^2 + (x)_1^2 + \int_1^2 (x)' \ln x\, dx$

$E = -(\ln 2 - \ln 1) + 1 + (x \ln x)_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$E = -\ln 2 + 1 + 2\ln 2 - (x)_1^2 = \ln 2$

Άσκηση 3

Δίνεται $f(x) = \alpha \ln x - x + 1$, $x > 0$

και $f(x) \leq 0$ $\forall x > 0$.

Νδο $\alpha = 1$.

Γνωρίζω ότι $f(x) \leq 0$

$f(x) \leq f(1)$

Ακρότατο στο 1

Fermat $f'(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} - 1$$

$$f'(1) = \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = 1$$

Άσκηση 4

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1$$

SOS

ψάχνω ρίζα και προσιμώ την $f(x)$

Για $x = 0$

$$e^{f(0)} + f(0) = 1$$

$$e^{f(0)} + f(0) - 1 = 0$$

$$\boxed{\varphi(x) = e^x + x - 1}$$

Προφανής ρίζα το $x=0$

$$\varphi'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow$$

$$\varphi(f(0)) = \varphi(0)$$

$$\varphi \text{ 1-1}$$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Μονοτονία της $f(x)$

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1$$

$$e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1$$

$$f'(x)\left(e^{f(x)} + 1\right) = 1$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0}$$

$f(x)$ ↗

x		0	
$f(x)$	↗ $-$	0	$+$ ↗

$x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$

$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$.

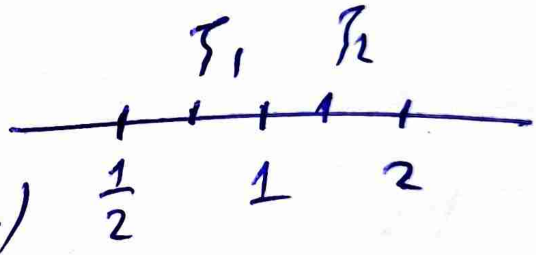
κυρτότητα f(x)

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}+1}$$

$$f''(x) = \frac{-e^{f(x)} f'(x)}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2} < 0$$

f κοίλη

ΘΜΤ



$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f'(\xi_1) = 2f(1) - 2f(\tfrac{1}{2})}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1)$$

$$\boxed{f'(\xi_2) = f(2) - f(1)}$$

$\xi_1 < \xi_2$

f κοίλη $\Rightarrow f' \downarrow$

$f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$

$2f(1) - 2f(\frac{1}{2}) > f(2) - f(1)$

$$\boxed{3f(1) > f(2) + 2f(\tfrac{1}{2})}$$

Πιθανό ερώτημα

Νδο $3f(1) > f(2) + 2f(\frac{1}{2})$.

Ευρεση αντιστροφης

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1$$

Αφου $f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1 $\Rightarrow f$ αντιστρεψιμη

Εστω $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$

$$e^{y} + y = f^{-1}(y) + 1$$

$$f^{-1}(y) = e^{y} + y - 1$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = e^{x} + x - 1}$$

E : C_f, $x'x$, $x=0$, $x=e$

$$E=\int_0^e |f(x)|\,dx = \int_0^e f(x)\,dx \stackrel{*}{=}$$

$\boxed{\cdot\ x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0}$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Θέτω}\quad f(x)&=t\\ f^{-1}(f(x))&=f^{-1}(t)\\ x&=f^{-1}(t)\\ dx&=f^{-1\,\prime}(t)\,dt\end{aligned}}$$

$$\stackrel{*}{=} \int_0^1 t\, f^{-1\,\prime}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 t\cdot(e^t+1)\,dt = \int_0^1 te^t+t\,dt$$

$$= (te^t)_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt + \left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1$$

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(x)&=e^x+x-1\\ f^{-1\,\prime}(x)&=e^x+1\end{aligned}}$$

$$= e - (e-1) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Άσκηση 5

Έστω $f^2(x) = (x^3+x)^2$ και $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$

Εύρεση τύπου $f(x)$

$$|f(x)| = |x^3+x|$$

Ρίζα $f(x)$

$$f(x) = 0$$

$$|f(x)| = 0$$

$$|x^3+x| = 0$$

$$x^3+x = 0$$

$$x(x^2+1) = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x<0$

$$|\underset{\ominus}{f(x)}| = |\underset{\ominus}{x^3+x}|$$

$$-f(x) = -x^3-x$$

$$\boxed{f(x) = x^3+x}$$

$x \geq 0$

$$|\underset{\oplus}{f(x)}| = |\underset{\oplus}{x^3+x}|$$

$$\boxed{f(x) = x^3+x}$$

$$f(x) = x^3 + x$$

Νδο η $y=4x-2$ εφαπτεται

της C_f.

Αρκει νδο το συστημα αυτο

$$\begin{cases} f'(x)=4 \\ f(x)=4x-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3x^2+1=4 \Rightarrow 3x^2=3$

$x^2=1$

$x=1$

$x=-1$

$x^3+x=4x-2$

$x^3-3x+2=0$

$x=1$ ✓ $\cancel{x=-1}$

Η $y=4x-2$ ειναι

εφαπτομενη της C_f

στο 1.