Προετοιμασία για το Διαγώνισμα

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Θεωρία - Σωστά/Λάθος - Επιλεγμένες ασκήσεις - Τυπολόγιο - Χρήσιμες παρατηρήσεις

Καθαρογραμμένη έκδοση με πλήρη μαθηματικό συμβολισμό

Περιεχόμενα

1 Θεωρία - Ερωτήσεις και απαντήσεις **3**

2 Σωστά - Λάθος 2004–2022 **7**

3 Εύρεση τύπου συνάρτησης **10**

4 Ισότητα - Πράξεις - Σύνθεση συναρτήσεων **12**

5 Θεώρημα Bolzano - Επιλεγμένες ασκήσεις **15**

6 Επιλεγμένες ασκήσεις συναρτήσεων **19**

7 Τυπολόγιο **23**

8 Μεγάλη προσοχή - Κριτήριο παρεμβολής **24**

9 Σύνολο τιμών - Χρήσιμοι κανόνες **25**

10 Μονοτονία σύνθεσης - Παράδειγμα **25**

1. Θεωρία - Ερωτήσεις και απαντήσεις

1.1 - Συνάρτηση

Ερώτηση: Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;
Απάντηση: Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μία διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.
Πεδίο ορισμού:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Σύνολο τιμών:

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

1.3 - Ισότητα συναρτήσεων

Ερώτηση: Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
Απάντηση: Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g = A$, και

ii. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

1.6 - Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

1.7 - Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

1.10 - Γνησίως μονότονη συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

1.11 - Ακρότατα συνάρτησης - ολικό μέγιστο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση: Η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \forall x \in A.$$

1.12 - Ακρότατα συνάρτησης - ολικό ελάχιστο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;
Απάντηση: Η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in A.$$

1.13 - Συνάρτηση 1-1

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$;
Απάντηση: Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

1.14 - Αντίστροφη συνάρτηση

Ερώτηση: Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

i. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται;

ii. Με την προϋπόθεση ότι η f αντιστρέφεται, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

Απάντηση:

i. Η $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι $1-1$ στο A.

ii. Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1}, τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Δηλαδή

$$f^{-1} : f(A) \to A, \qquad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

1.15 - Κριτήριο παρεμβολής

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
Απάντηση: Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

1.18 - Συνέχεια σε σημείο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;
Απάντηση: Η f είναι συνεχής στο x_0, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.21 - Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Ερώτηση: Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;
Απάντηση: Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha), \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

1.22 - Θεώρημα Bolzano

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.
Απάντηση: Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β).

1.23 - Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Bolzano

Ερώτηση: Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.
Απάντηση: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

1.24 - Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.
Απάντηση: Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \eta.$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση στο ανοικτό διάστημα (α, β).

1.26 - Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.
Απάντηση: Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν δύο, τουλάχιστον, σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε

$$\min f(x) = m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M = \max f(x), \qquad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

2.3 - Αντιπαράδειγμα

Ερώτηση: Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.»

Απάντηση: Ο ισχυρισμός είναι **ψευδής**. Για παράδειγμα,

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Η g είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$: είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

2.5 - Αντιπαράδειγμα

Ερώτηση: Θεωρήστε τον ισχυρισμό: Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, αν

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty,$$

τότε

$$\lim_{x \to 0^+} (f(x) + g(x)) = 0.$$

Απάντηση: Ο ισχυρισμός είναι **ψευδής**. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad x > 0,$$

τότε

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x \to 0^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} \right) = 1.$$

3.4 - Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών - Απόδειξη

Ερώτηση: Να αποδείξετε το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.
Απάντηση: Έστω f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = \eta$.
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε

$$f(\alpha) < \eta < f(\beta).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \eta.$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Επιπλέον,

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0, \qquad g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0,$$

οπότε

$$g(\alpha) g(\beta) < 0.$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή

$$f(x_0) = \eta.$$

2. Σωστά - Λάθος 2004–2022

Α/Α	Πρόταση	Απ.
1	Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.	**Σ**
2	Η γραφική παράσταση της $\|f\|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.	**Σ**
3	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.	**Σ**
4	Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.	**Λ**
5	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.	**Λ**
6	Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.	**Λ**
7	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.	**Σ**
8	Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.	**Λ**
9	Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.	**Σ**
10	Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.	**Σ**
11	Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.	**Σ**
12	Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.	**Σ**
13	Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.	**Σ**
14	Η συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.	**Σ**
15	Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.	**Σ**
16	Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$, και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.	**Σ**
17	Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.	**Λ**
18	Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασής της με την ίδια τεταγμένη.	**Λ**
19	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.	**Σ**
20	Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.	**Λ**
21	Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ πραγματικός αριθμός. Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0}(f(x) - \ell) = 0$.	**Σ**
22	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.	**Σ**
23	Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριό της καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή $f(x_0)$.	**Λ**
24	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.	**Σ**

Α/Α	Πρόταση	Απ.
25	Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, με $k\in\mathbb{N}$ και $k\geq 2$.	**Σ**
26	Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκην υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$.	**Λ**
27	Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim f(x)=0$ και $\lim g(x)=+\infty$, τότε $\lim(f(x)g(x))=0$.	**Λ**
28	Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.	**Σ**
29	Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.	**Λ**
30	Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.	**Σ**
31	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.	**Λ**
32	Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to 0^+}(f(x)+g(x))=0$.	**Λ**
33	Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.	**Σ**
34	Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.	**Λ**
35	Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.	**Λ**
36	Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.	**Σ**
37	Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.	**Σ**
38	Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\leq\lim_{x\to x_0} g(x)$.	**Σ**
39	Αν $\alpha>1$, τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0$.	**Σ**
40	Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$.	**Λ**
41	Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0$.	**Λ**
42	Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=0$.	**Σ**
43	Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.	**Σ**
44	$\lim_{x\to-\infty} e^x=-\infty$.	**Λ**
45	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.	**Λ**
46	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.	**Λ**
47	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.	**Σ**
48	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.	**Λ**
49	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.	**Λ**
50	$\lvert\eta\mu x\rvert\leq\lvert x\rvert$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	**Σ**
51	$\lvert\eta\mu x\rvert<\lvert x\rvert$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.	**Σ**
52	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.	**Λ**
53	Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.	**Σ**
54	Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.	**Λ**
55	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και $1-1$ στο διάστημα αυτό.	**Σ**
56	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.	**Σ**
57	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.	**Λ**
58	Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.	**Σ**
59	Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.	**Σ**

Α/Α	Πρόταση	Απ.
60	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.	**Σ**
61	Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.	**Σ**
62	Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.	**Λ**
63	Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.	**Σ**
64	Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.	**Σ**
65	Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.	**Σ**
66	Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστά της, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστό της.	**Λ**
67	Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.	**Σ**
68	Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\, x$, με $x \in \mathbb{R}$, έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.	**Λ**
69	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (A, B), όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$.	**Σ**
70	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (A, B), όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$.	**Λ**

3. Εύρεση τύπου συνάρτησης

Άσκηση 1

Εκφώνηση. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x+1) = (x+1)e^{-x}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.
Λύση. Θέτουμε $x+1 = t$, οπότε $x = t-1$. Τότε

$$f(t) = te^{-(t-1)} = te^{1-t}.$$

Άρα

$$f(x) = xe^{1-x}.$$

Άσκηση 2

Εκφώνηση. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu\, x, \qquad \forall x \neq 0.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.
Λύση. Θέτουμε $\frac{1}{x} = t$, άρα $x = \frac{1}{t}$. Για $t \neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{1}{t}\right)^2 f(t) = \eta\mu\left(\frac{1}{t}\right),$$

οπότε

$$f(t) = t^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{t}\right).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0,

$$f(0) = \lim_{x\to 0} x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right).$$

Από

$$-x^2 \leq x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to 0} x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Άσκηση 3

Εκφώνηση. Έστω συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και

$$e^{2x}f^2(x)-2x^2e^xf(x)=2x^2+1,\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.
Λύση. Προσθέτουμε x^4 και στα δύο μέλη:

$$e^{2x}f^2(x)-2x^2e^xf(x)+x^4=x^4+2x^2+1.$$

Άρα

$$(e^xf(x)-x^2)^2=(x^2+1)^2,$$

οπότε

$$|e^xf(x)-x^2|=x^2+1.$$

Θέτουμε

$$h(x)=e^xf(x)-x^2.$$

Η h είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, διότι $|h(x)|=x^2+1>0$. Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή

$$h(0)=e^0f(0)-0=1>0,$$

έχουμε $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα

$$e^xf(x)-x^2=x^2+1$$

και επομένως

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{e^x}.$$

Άσκηση 4

Εκφώνηση. Έστω συνεχής $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ με

$$x^2+f^2(x)=3x+4,\qquad \forall x\in[-1,4],$$

και $f(0)=-2$. Να βρεθεί ο τύπος της f.
Λύση. Από τη σχέση έχουμε

$$f^2(x)=-x^2+3x+4,$$

άρα

$$|f(x)|=\sqrt{-x^2+3x+4}.$$

Στο εσωτερικό $(-1,4)$ ισχύει $-x^2+3x+4>0$, οπότε η f δεν μηδενίζεται εκεί και, λόγω συνέχειας, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0)=-2<0$, προκύπτει

$$-f(x)=\sqrt{-x^2+3x+4}.$$

Συνεπώς

$$f(x)=-\sqrt{-x^2+3x+4},\qquad x\in[-1,4].$$

4. Ισότητα - Πράξεις - Σύνθεση συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες όταν έχουν **ίδιο τύπο και ίδιο πεδίο ορισμού**. Δηλαδή

$$A_f = A_g \quad \text{και} \quad f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in A_f.$$

Άσκηση 1 - Ισότητα συναρτήσεων

Εκφώνηση. Δίνονται, για $x > 0$,

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1), \qquad g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right).$$

Να εξεταστεί αν οι f, g είναι ίσες.
Λύση. Έχουμε

$$A_f = A_g = (0, +\infty).$$

Επίσης

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \ln e^x - \ln(e^x - 1) = x - \ln(e^x - 1) = f(x).$$

Άρα οι δύο συναρτήσεις έχουν ίδιο πεδίο ορισμού και ίδιο τύπο, επομένως

$$f = g.$$

Άσκηση 2 - Ισότητα συναρτήσεων

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f(x) = \ln(x - 1) - \ln(x - 2), \qquad A_f = (2, +\infty),$$

και

$$g(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{x - 2}\right), \qquad A_g = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

Να εξεταστεί αν οι f, g είναι ίσες.
Λύση. Παρατηρούμε ότι $A_f \neq A_g$, άρα οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες. Πράγματι, στο κοινό τους μέρος $(2, +\infty)$ ισχύει

$$g(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{x - 2}\right) = \ln(x - 1) - \ln(x - 2) = f(x),$$

όμως τα πεδία ορισμού τους είναι διαφορετικά. Επομένως

$$f \neq g.$$

Πράξεις συναρτήσεων

Για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

με

$$A_{f+g} = A_{f-g} = A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g.$$

Για το πηλίκο

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

με

$$A_{f/g} = \{x \in A_f \cap A_g : g(x) \neq 0\}.$$

Άσκηση 3 - Πράξεις συναρτήσεων

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x}, \quad x > 0, \qquad g(x) = \frac{1}{4-x}, \quad x < 4.$$

Να βρεθούν το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο των f, g, μαζί με τα πεδία ορισμού τους.
Λύση. Έχουμε $A_f = (0, +\infty)$ και $A_g = (-\infty, 4)$, άρα

$$A_f \cap A_g = (0, 4).$$

Επομένως

$$(f+g)(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, \qquad A_{f+g} = (0,4),$$

$$(f-g)(x) = 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{4-x}, \qquad A_{f-g} = (0,4),$$

$$(f \cdot g)(x) = \left(4 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{4-x}, \qquad A_{f\cdot g} = (0,4).$$

Για το πηλίκο,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{4-x}} = \frac{(4x-1)(4-x)}{x}.$$

Επειδή $g(x) = \frac{1}{4-x} \neq 0$ στο πεδίο ορισμού της,

$$A_{f/g} = (0,4).$$

Σύνθεση συναρτήσεων

Για τη σύνθεση $g \circ f$ πρέπει να ισχύει

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g,$$

και τότε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Αντίστοιχα, για τη σύνθεση $f \circ g$ πρέπει να ισχύει

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f,$$

και τότε

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Άσκηση 4 - Σύνθεση συναρτήσεων

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\ln(x-1),$$

και

$$g : [2, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

Να βρεθούν οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και τα πεδία ορισμού τους.
Λύση. Για $f \circ g$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln\sqrt{x-2} = \ln(x-2).$$

Οι συνθήκες ορισμού είναι

$$x \geq 2 \quad \text{και} \quad \sqrt{x-2} + 1 > 1,$$

άρα $x > 2$ και

$$D_{f \circ g} = (2, +\infty).$$

Για $g \circ f$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2\ln(x-1) - 2} + 1.$$

Οι συνθήκες ορισμού είναι

$$x > 1 \quad \text{και} \quad f(x) \geq 2.$$

Άρα

$$2\ln(x-1) \geq 2 \iff \ln(x-1) \geq 1 \iff x - 1 \geq e \iff x \geq e + 1.$$

Επομένως

$$D_{g \circ f} = [e + 1, +\infty).$$

5. Θεώρημα Bolzano - Επιλεγμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Εκφώνηση. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\, x+x^2+3x}{x}, & -\pi\le x<0,\\ e^x-x+3, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-\pi,1]$.
Λύση. Η f είναι συνεχής στα $[-\pi,0)$ και $(0,1]$. Εξετάζουμε τη συνέχεια στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu\, x}{x}+x+3\right)=4,$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-x+3)=4.$$

Επίσης $f(0)=4$, άρα η f είναι συνεχής στο 0 και συνεπώς στο $[-\pi,1]$.
Τέλος,

$$f(-\pi)=\frac{\pi^2-3\pi}{-\pi}=3-\pi<0,$$

ενώ

$$f(1)=e+2>0.$$

Άρα $f(-\pi)f(1)<0$, οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-\pi,1]$.

Άσκηση 2

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$3x+\ln x^4=x^2+4$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.
Λύση. Γράφουμε την εξίσωση ως

$$3x+\ln x^4-x^2-4=0$$

και θεωρούμε

$$f(x)=3x+\ln x^4-x^2-4.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$. Επιπλέον

$$f(1)=-2<0,$$

και

$$f(e)=3e+4-e^2-4=3e-e^2=e(3-e)>0.$$

Άρα $f(1)f(e)<0$ και, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Δηλαδή

$$3\xi+\ln\xi^4=\xi^2+4,\qquad \xi\in(1,e).$$

Άσκηση 3

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.
Λύση. Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ των παρονομαστών και παίρνουμε

$$(x^2+1)(x-2)+(x-1)(e^x+1)=0.$$

Θεωρούμε

$$f(x)=(x^2+1)(x-2)+(x-1)(e^x+1),$$

η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$. Υπολογίζουμε

$$f(1)=-2<0, \qquad f(2)=e^2+1>0.$$

Άρα $f(1)f(2)<0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Επειδή $\xi\in(1,2)$, οι παρονομαστές δεν μηδενίζονται, οπότε

$$\frac{\xi^2+1}{\xi-1}+\frac{e^\xi+1}{\xi-2}=0.$$

Άσκηση 4

Εκφώνηση. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, όπου η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,-1)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$x_0(f(x_0)-1)=\beta f(x_0)-\alpha.$$

Λύση. Η ζητούμενη σχέση ισοδυναμεί με

$$x(f(x)-1)-\beta f(x)+\alpha=0.$$

Θεωρούμε

$$g(x)=x(f(x)-1)-\beta f(x)+\alpha.$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή $f(\alpha)=-1$,

$$g(\alpha)=\alpha(f(\alpha)-1)-\beta f(\alpha)+\alpha=f(\alpha)(\alpha-\beta)=\beta-\alpha>0.$$

Επίσης

$$g(\beta)=\beta(f(\beta)-1)-\beta f(\beta)+\alpha=\alpha-\beta<0.$$

Άρα $g(\alpha)g(\beta)<0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $g(x_0)=0$. Επομένως

$$x_0(f(x_0)-1)=\beta f(x_0)-\alpha.$$

Άσκηση 5

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f(x)=3x-e^x, \qquad g(x)=x^2-4.$$

α') Να δειχθεί ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(0,1)$.

β') Να δειχθεί ότι οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(-1,0)$.

Λύση. α) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Έχουμε

$$f(0) = -1 < 0, \qquad f(1) = 3 - e > 0.$$

Άρα, από Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

β) Τα κοινά σημεία των C_f, C_g προκύπτουν από την εξίσωση

$$f(x) = g(x) \iff 3x - e^x = x^2 - 4 \iff 3x - e^x - x^2 + 4 = 0.$$

Θεωρούμε

$$\varphi(x) = 3x - e^x - x^2 + 4,$$

η οποία είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Έχουμε

$$\varphi(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0,$$

και

$$\varphi(0) = -1 + 4 = 3 > 0.$$

Άρα, από Bolzano, υπάρχει $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0$. Συνεπώς

$$f(\xi) = g(\xi).$$

Άσκηση 7

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$e^x = 3 - 2x$$

έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση. Θεωρούμε

$$f(x) = e^x - 3 + 2x.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Έχουμε

$$f(0) = -2 < 0, \qquad f(1) = e - 1 > 0.$$

Άρα, από Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία $\xi \in (0,1)$ με $f(\xi) = 0$.
Επιπλέον,

$$f'(x) = e^x + 2 > 0,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως έχει το πολύ μία ρίζα. Συνεπώς η ρίζα είναι μοναδική.

Άσκηση 9

Εκφώνηση. Έστω συνεχής $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$-1 < f(x) < 0, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0.$$

Λύση. Η ζητούμενη σχέση ισοδυναμεί με

$$f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0.$$

Θεωρούμε

$$g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x,$$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$. Στο $x = 0$,

$$g(0) = f^2(0) - 2f(0) = f(0)(f(0) - 2) > 0,$$

επειδή $-1 < f(0) < 0$ και άρα $f(0) - 2 < 0$.
Στο $x = 1$,

$$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = (f(1) - 3)(f(1) + 1) < 0,$$

διότι $f(1) - 3 < 0$ και $f(1) + 1 > 0$.
Άρα $g(0)g(1) < 0$. Από Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $g(x_0) = 0$. Επομένως

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0.$$

Άσκηση 13

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\ln x = x^2 - 4x + 2$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.
Λύση. Θεωρούμε

$$f(x) = \ln x - x^2 + 4x - 2, \qquad x > 0.$$

Η $f(0)$ δεν ορίζεται, αλλά

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Άρα υπάρχει $\alpha > 0$, αρκετά κοντά στο 0, τέτοιο ώστε $f(\alpha) < 0$.
Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, 1]$ και

$$f(1) = 0 - 1 + 4 - 2 = 1 > 0.$$

Επομένως $f(\alpha)f(1) < 0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\alpha, 1) \subset (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$. Δηλαδή

$$\ln \xi = \xi^2 - 4\xi + 2, \qquad \xi \in (0,1).$$

6. Επιλεγμένες ασκήσεις συναρτήσεων

Άσκηση 1

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x^2}{x-2}=-1.$$

Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Λύση. Θέτουμε

$$g(x)=\frac{f(x)-x^2}{x-2},\qquad x\neq 2.$$

Από την υπόθεση,

$$\lim_{x\to 2}g(x)=-1.$$

Για $x\neq 2$ ισχύει

$$f(x)=g(x)(x-2)+x^2.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\left(\lim_{x\to 2}g(x)\right)\left(\lim_{x\to 2}(x-2)\right)+\lim_{x\to 2}x^2=(-1)\cdot 0+4=4.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2,

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=4>0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται. Επομένως δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο, διότι διαφορετικά, από το θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε σημείο στο οποίο $f(x)=0$. Αφού $f(2)>0$, καταλήγουμε ότι

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=3-\sqrt{x+1}.$$

Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και, στη συνέχεια, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x)=\ln k,$$

ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου $k>0$.
Λύση. Από $x+1\geq 0$ έχουμε

$$D_f=[-1,+\infty).$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f. Πράγματι, αν $x_1<x_2$, τότε

$$x_1+1<x_2+1\Rightarrow\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1}\Rightarrow-\sqrt{x_1+1}>-\sqrt{x_2+1},$$

και επομένως $f(x_1)>f(x_2)$.
Επιπλέον,

$$f(-1)=3,\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

Άρα

$$\Sigma\mathrm{T}_f=(-\infty,3].$$

Για την εξίσωση $f(x) = \ln k$ διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\ln k > 3$, δηλαδή $k > e^3$, τότε $\ln k \notin \Sigma\mathrm{T}_f$ και η εξίσωση δεν έχει ρίζα.
- Αν $\ln k \leq 3$, δηλαδή $0 < k \leq e^3$, τότε $\ln k \in \Sigma\mathrm{T}_f$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.

$0 < k \leq e^3$	μία ρίζα
$k > e^3$	καμία ρίζα

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1, & x \leq 0, \\ \text{συν}\, x - x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

α′) Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής στο $[-1, \pi]$.

β′) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$.

γ′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ′) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

ε′) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right)$ τέτοιο ώστε

$$7f(\xi) = 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 3f\left(\frac{1}{7}\right).$$

ς′) Να λυθεί η ανίσωση

$$f(1 - f(x)) - f\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Λύση.
α) Εφαρμογή Θ.Μ.Ε.Τ. Η f είναι συνεχής στα $[-1, 0]$ και $(0, \pi]$. Στο 0 έχουμε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + 2x + 1) = 1$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\text{συν}\, x - x) = 1.$$

Επίσης $f(0) = 1$. Άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$. Επομένως, ως συνεχής σε κλειστό διάστημα, ικανοποιεί το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής στο $[-1, \pi]$.
β) Υπολογισμός ορίου. Για $x \to 0^-$,

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{x^3 + 2x + 1 - 1}{x} = x^2 + 2 \to 2.$$

Για $x \to 0^+$,

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\text{συν}\, x - x - 1}{x} = \frac{\text{συν}\, x - 1}{x} - 1 \to -1,$$

αφού

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{συν}\, x - 1}{x} = 0.$$

Τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} \text{ δεν υπάρχει.}$$

γ) Σύνολο τιμών. Για $x\le 0$, η $f_1(x)=x^3+2x+1$ είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=-\infty, \qquad f_1(0)=1.$$

Άρα

$$\Sigma\mathrm{T}_{f_1}=(-\infty,1].$$

Για $0<x\le\pi$, η $f_2(x)=\text{συν}\, x-x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=1, \qquad f_2(\pi)=-1-\pi.$$

Άρα

$$\Sigma\mathrm{T}_{f_2}=[-1-\pi,1).$$

Συνεπώς

$$\Sigma\mathrm{T}_f=(-\infty,1].$$

δ) Οι ρίζες της $f(x)=0$**.** Στο $(-\infty,0]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, με

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \qquad f(0)=1>0.$$

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα $x_1<0$.
Στο $(0,\pi]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1>0, \qquad f(\pi)=-1-\pi<0.$$

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα $x_2\in(0,\pi)$. Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες και είναι ετερόσημες.
ε) Ύπαρξη του ξ**.** Η f είναι συνεχής στο $[\frac{1}{7},\frac{1}{6}]$. Από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ ώστε

$$m\le f(x)\le M, \qquad x\in\left[\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right].$$

Ειδικότερα,

$$m\le f\left(\frac{1}{7}\right)\le M, \qquad m\le f\left(\frac{1}{6}\right)\le M.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 3 και 4 αντίστοιχα και προσθέτοντας,

$$7m\le 3f\left(\frac{1}{7}\right)+4f\left(\frac{1}{6}\right)\le 7M.$$

Άρα

$$m\le\frac{3f(1/7)+4f(1/6)}{7}\le M.$$

Ο αριθμός στο μέσο ανήκει στο σύνολο τιμών της f στο παραπάνω διάστημα. Επομένως, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi\in\left(\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right)$$

τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{3f(1/7)+4f(1/6)}{7},$$

δηλαδή

$$7f(\xi) = 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 3f\left(\frac{1}{7}\right).$$

στ) Τροποποιημένο τελευταίο ερώτημα. Θέλουμε

$$f(1-f(x)) < f\left(x+\frac{1}{2}\right), \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Για $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ έχουμε

$$f(x) = \text{συν}\, x - x$$

και

$$0 < 1 - f(x) = 1 - \text{συν}\, x + x < \pi, \qquad 0 < x + \frac{1}{2} < \pi.$$

Στο $(0, \pi]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$f(1-f(x)) < f\left(x+\frac{1}{2}\right) \iff 1 - f(x) > x + \frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$1 - (\text{συν}\, x - x) > x + \frac{1}{2} \iff 1 - \text{συν}\, x > \frac{1}{2} \iff \text{συν}\, x < \frac{1}{2}.$$

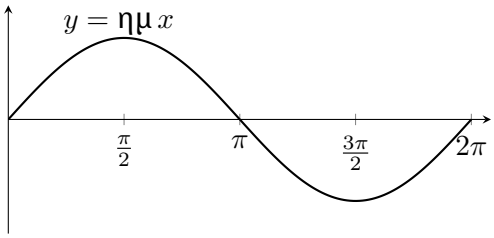
Στο $(0, \frac{\pi}{2}]$ η $\text{συν}\, x$ είναι γνησίως φθίνουσα και $\text{συν}\, \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, άρα

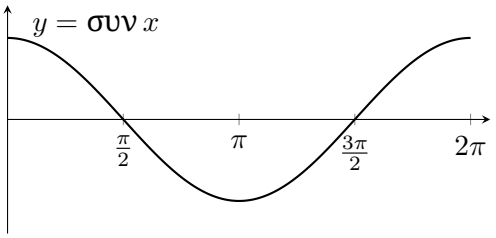
$$\text{συν}\, x < \frac{1}{2} \iff x > \frac{\pi}{3}.$$

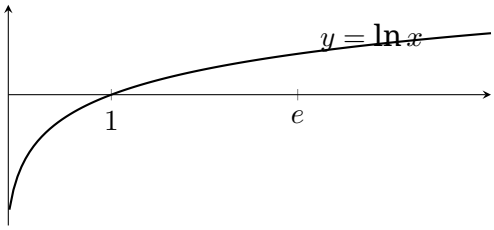
Συνεπώς

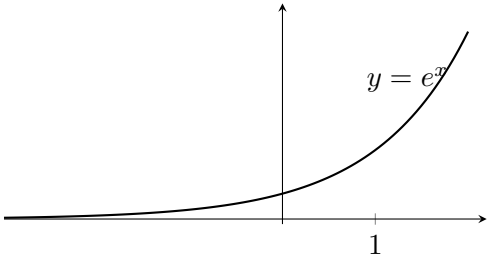
$$x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Τυπολόγιο









Βασικές τιμές και όρια για $\ln x$

$$\ln e = 1, \qquad \ln 1 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Βασικές τιμές και όρια για e^x

$$e^0 = 1, \qquad e^1 = e,$$
$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty.$$

Χρήσιμες σχηματικές μορφές ορίων (με θετικά πρόσημα)

$$\frac{0}{+\infty} = 0, \qquad \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

8. Μεγάλη προσοχή - Κριτήριο παρεμβολής

Παράδειγμα 1

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και

$$x+\eta\mu\, x\le xf(x)\le 2x^2+x+\eta\mu\, x.$$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Για $x<0$: Διαιρώντας με $x<0$, οι ανισότητες αλλάζουν φορά:

$$\frac{x+\eta\mu\, x}{x}\ge f(x)\ge \frac{2x^2+x+\eta\mu\, x}{x}.$$

Δηλαδή

$$1+\frac{\eta\mu\, x}{x}\ge f(x)\ge 2x+1+\frac{\eta\mu\, x}{x}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{\eta\mu\, x}{x}\right)=2,\qquad \lim_{x\to 0^-}\left(2x+1+\frac{\eta\mu\, x}{x}\right)=2,$$

από το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=2.$$

Για $x>0$: Διαιρώντας με $x>0$ οι ανισότητες διατηρούν τη φορά τους:

$$1+\frac{\eta\mu\, x}{x}\le f(x)\le 2x+1+\frac{\eta\mu\, x}{x}.$$

Και πάλι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\eta\mu\, x}{x}\right)=2,\qquad \lim_{x\to 0^+}\left(2x+1+\frac{\eta\mu\, x}{x}\right)=2,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2.$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=2}.$$

Επέκταση

Αν, αντίστοιχα, ισχύει

$$\eta\mu\, x\le xf(x+1)\le x,$$

ζητούμε το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Θέτουμε $x+1=t$, δηλαδή $x=t-1$. Η ανισότητα γράφεται

$$\eta\mu(t-1)\le (t-1)f(t)\le t-1.$$

Άρα, για $t>1$,

$$\frac{\eta\mu(t-1)}{t-1}\le f(t)\le \frac{t-1}{t-1}.$$

Καθώς $t\to 1^+$,

$$\lim_{t\to 1^+}\frac{\eta\mu(t-1)}{t-1}=1,\qquad \lim_{t\to 1^+}\frac{t-1}{t-1}=1.$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1}.$$

9. Σύνολο τιμών - Χρήσιμοι κανόνες

1. $D_f = \mathbb{R}$ **και** f **γνησίως αύξουσα**

$$\Sigma\mathrm{T}_f = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right).$$

2. $D_f = \mathbb{R}$ **και** f **γνησίως φθίνουσα**

$$\Sigma\mathrm{T}_f = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right).$$

3. $D_f = (1,2)$ **και** f **γνησίως αύξουσα**

$$\Sigma\mathrm{T}_f = \left(\lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to 2^-} f(x)\right).$$

4. $D_f = (1,2)$ **και** f **γνησίως φθίνουσα**

$$\Sigma\mathrm{T}_f = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x)\right).$$

5. $D_f = [1,2)$ **και** f **γνησίως αύξουσα**

$$\Sigma\mathrm{T}_f = \left[f(1),\ \lim_{x\to 2^-} f(x)\right).$$

6. $D_f = (-\infty,1)$ **και** f **γνησίως φθίνουσα**

$$\Sigma\mathrm{T}_f = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right).$$

10. Μονοτονία σύνθεσης - Παράδειγμα

Έστω f **γνησίως φθίνουσα και** $g(x) = f(1-e^x)$**. Να εξεταστεί η μονοτονία της** g**.**

Έστω $x_1 < x_2$. Τότε

$$e^{x_1} < e^{x_2}$$

και άρα

$$-e^{x_1} > -e^{x_2}.$$

Επομένως

$$1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2}.$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, αντιστρέφει τη φορά της ανισότητας:

$$f(1-e^{x_1}) < f(1-e^{x_2}).$$

Άρα

$$g(x_1) < g(x_2),$$

οπότε

Η g είναι **γνησίως αύξουσα**.