ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΤΕΣΤ

Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες - Γραφικές παραστάσεις

Οι 6 βασικοί ορισμοί και όλα τα είδη ασκήσεων, με τη λύση ακριβώς κάτω από κάθε άσκηση.

Οι 6 ορισμοί - Ερωτήσεις και απαντήσεις

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ερώτηση: Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο**;
Απάντηση: Η f παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) ελάχιστο, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Το x_0 λέγεται **θέση ελαχίστου** και το $f(x_0)$ **ελάχιστη τιμή** της f στο A.

Ερώτηση: Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο**;
Απάντηση: Η f παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Το x_0 λέγεται **θέση μεγίστου** και το $f(x_0)$ **μέγιστη τιμή** της f στο A.

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται **άρτια**;
Απάντηση: Η f λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν

$$-x \in D_f \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x).$$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται **περιττή**;
Απάντηση: Η f λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν

$$-x \in D_f \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x).$$

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Όλα τα είδη ασκήσεων - με λύσεις

Τύπος 1: Χρήση της μονοτονίας όταν δίνονται τιμές της συνάρτησης

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση f με

$$f(2) = 0, \qquad f(2026) = -7.$$

1. Να βρείτε τη μονοτονία της f.

Λύση. Εφόσον

$$2 < 2026 \quad \text{και} \quad f(2) = 0 > -7 = f(2026),$$

η διάταξη των τιμών αντιστρέφεται. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Να δείξετε ότι $f(34) < 0$.

Λύση. Έχουμε $34 > 2$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα,

$$f(34) < f(2) = 0.$$

Άρα $f(34) < 0$.

3. Να συγκρίνετε τα αθροίσματα $f(a) + f(a+2)$ και $f(a+1) + f(a+3)$.

Λύση. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα,

$$a < a+1 \Rightarrow f(a) > f(a+1)$$

και

$$a+2 < a+3 \Rightarrow f(a+2) > f(a+3).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη,

$$f(a) + f(a+2) > f(a+1) + f(a+3).$$

4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 2x + 3) \leq 0$.

Λύση. Επειδή $0 = f(2)$, η ανίσωση γράφεται

$$f(x^2 - 2x + 3) \leq f(2).$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$x^2 - 2x + 3 \geq 2 \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0.$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $x \in \mathbb{R}$.

5. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 4) + 7 \leq 0$.

Λύση.

$$f(2x-4) + 7 \leq 0 \iff f(2x-4) \leq -7 \iff f(2x-4) \leq f(2026).$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα,

$$2x - 4 \geq 2026 \iff 2x \geq 2030 \iff x \geq 1015.$$

6. Να λύσετε την ανίσωση $f\big(f(x-1) + 9\big) < 0$.

Λύση. Εφόσον $0 = f(2)$,

$$f\big(f(x-1) + 9\big) < f(2).$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(x-1) + 9 > 2 \iff f(x-1) > -7 \iff f(x-1) > f(2026).$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη γνησίως φθίνουσα μονοτονία,

$$x - 1 < 2026 \iff x < 2027.$$

7. Αν $x \in (0,1)$, να συγκρίνετε τις τιμές $f(x^2)$ και $f(x)$.

Λύση. Για $x \in (0,1)$ ισχύει $x^2 < x$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα,

$$f(x^2) > f(x).$$

Τύπος 2: Κανόνες διάταξης που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις μονοτονίας

Να γνωρίζετε και να χρησιμοποιείτε σωστά, με τις κατάλληλες προϋποθέσεις, τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 7 < x_2 - 7$,
- $x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2$,
- $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2$,
- $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$,
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$,
- $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$,
- $x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$,
- $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$.

Χρήση. Οι κανόνες αυτοί συνδυάζονται κατά μέλη για να συγκρίνουμε $f(x_1)$ και $f(x_2)$ χωρίς παραγώγους.

Τύπος 3: Απόδειξη μονοτονίας χωρίς παραγώγους

1. Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = 3x^5 + 2x - 7$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow 3x_1^5 < 3x_2^5$$

και

$$2x_1 - 7 < 2x_2 - 7.$$

Προσθέτοντας,

$$3x_1^5 + 2x_1 - 7 < 3x_2^5 + 2x_2 - 7,$$

δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{x} + x^2$, $x < 0$.

Λύση. Έστω $x_1 < x_2 < 0$. Τότε

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow \sqrt{-x_1} > \sqrt{-x_2},$$

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2},$$

και, επειδή $x_1, x_2 < 0$,

$$x_1^2 > x_2^2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη,

$$\sqrt{-x_1} + \frac{1}{x_1} + x_1^2 > \sqrt{-x_2} + \frac{1}{x_2} + x_2^2,$$

οπότε $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Τύπος 4: Μονοτονία και λύση ανισώσεων με αναγνώριση της ίδιας συνάρτησης

Έστω

$$f(x) = x^5 + x^3 - 2.$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1^5 < x_2^5, \qquad x_1^3 < x_2^3.$$

Άρα

$$x_1^5 + x_1^3 - 2 < x_2^5 + x_2^3 - 2,$$

δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Να λύσετε την ανίσωση $x^5 \le 2 - x^3$.

Λύση.

$$x^5 \le 2 - x^3 \iff x^5 + x^3 - 2 \le 0 \iff f(x) \le f(1),$$

αφού $f(1) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα,

$$x \le 1.$$

3. Να λύσετε την ανίσωση $x^5 \geq -2 - x^3$.

Λύση.

$$x^5 \geq -2 - x^3 \iff x^5 + x^3 + 2 \geq 0 \iff x^5 + x^3 - 2 \geq -4.$$

Επειδή $f(-1) = -4$, έχουμε

$$f(x) \geq f(-1).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$x \geq -1.$$

Τύπος 5: Έλεγχος αν μια συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ή ούτε άρτια ούτε περιττή

1. $f(x) = x^2 + x^4$, $D_f = \mathbb{R}$.

Λύση. Το $\mathbb{R}$ είναι συμμετρικό ως προς το 0 και

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^4 = x^2 + x^4 = f(x).$$

Άρα η f είναι άρτια.

2. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Λύση. Το πεδίο ορισμού $[0, 2]$ δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0. Για παράδειγμα $1 \in D_f$, αλλά $-1 \notin D_f$. Άρα η f είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Λύση.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$$

που είναι συμμετρικό ως προς το 0. Επίσης

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x).$$

Άρα η f είναι άρτια.

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Λύση.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$$

που είναι συμμετρικό ως προς το 0. Επιπλέον

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Άρα η f είναι περιττή.

5. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$.

Λύση.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Το πεδίο ορισμού δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0, αφού $-1 \in D_f$ αλλά $1 \notin D_f$. Άρα η f είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

6. $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$.

Λύση.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

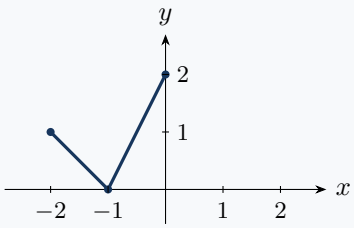
που είναι συμμετρικό ως προς το 0. Όμως

$$f(-x) = \frac{1 - x}{|x|},$$

το οποίο γενικά δεν είναι ούτε $f(x)$ ούτε $-f(x)$. Άρα η f είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Τύπος 6: Συμπλήρωση γραφικής παράστασης άρτιας συνάρτησης και ανάγνωση στοιχεί

Δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης άρτιας συνάρτησης $f : [a, 2] \to \mathbb{R}$ με κορυφές στα σημεία $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ και $(0, 2)$.

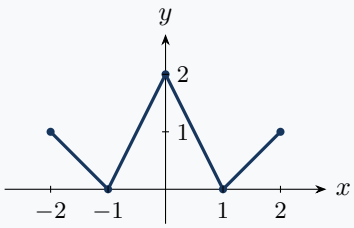


1. Να βρείτε το a.

Λύση. Επειδή η f είναι άρτια, το πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς το 0. Αφού το δεξιό άκρο είναι 2, το αριστερό είναι -2. Άρα $a = -2$.

2. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f.

Λύση. Παίρνουμε το συμμετρικό του δοσμένου τμήματος ως προς τον άξονα $y'y$. Έτσι προστίθενται τα σημεία $(1, 0)$ και $(2, 1)$.



3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

Λύση. Από τη γραφική παράσταση:

$$\text{γνησίως αύξουσα στα } [-1, 0] \text{ και } [1, 2],$$

$$\text{γνησίως φθίνουσα στα } [-2, -1] \text{ και } [0, 1].$$

4. Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και τις αντίστοιχες θέσεις τους.

Λύση. Η μεγαλύτερη τιμή της f είναι 2 και εμφανίζεται στο $x = 0$. Η μικρότερη τιμή είναι 0 και εμφανίζεται στα $x = -1$ και $x = 1$. Άρα

$$\max f = 2 \text{ στη θέση } x = 0,$$

$$\min f = 0 \text{ στις θέσεις } x = -1, 1.$$

Τύπος 7: Παράμετρος - συμμετρία - ολικά ακρότατα

Έστω

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)x}{x^2 + 1},$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

1. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α.

Λύση. Επειδή η γραφική παράσταση διέρχεται από το $A(1, 1)$, ισχύει $f(1) = 1$. Άρα

$$\frac{\alpha - 1}{2} = 1 \iff \alpha - 1 = 2 \iff \alpha = 3.$$

2. Για $\alpha = 3$, να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Λύση. Για $\alpha = 3$,

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \qquad D_f = \mathbb{R}.$$

Το $\mathbb{R}$ είναι συμμετρικό ως προς το 0 και

$$f(-x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Άρα η f είναι περιττή.

3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό μέγιστο ίσο με 1.

Λύση. Επειδή $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{2x}{x^2+1}\le 1 \iff 2x\le x^2+1 \iff (x-1)^2\ge 0.$$

Άρα $f(x)\le 1$ για κάθε x και για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$. Επομένως $\max f=1$ στη θέση $x=1$.

4. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=-1$.

Λύση.

$$f(-1)=\frac{-2}{2}=-1.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{2x}{x^2+1}\ge -1 \iff 2x\ge -x^2-1 \iff (x+1)^2\ge 0.$$

Άρα $f(x)\ge -1$ και η ισότητα ισχύει για $x=-1$. Επομένως $\min f=-1$ στη θέση $x=-1$.

Τύπος 8: Εύρεση ολικών ακροτάτων απευθείας από τον τύπο

1. $f(x)=3-2x^2$. Να βρείτε το ολικό ακρότατο και τη θέση του.

Λύση. Επειδή $x^2\ge 0$, έχουμε

$$-2x^2\le 0 \Rightarrow 3-2x^2\le 3.$$

Άρα $f(x)\le 3$ για κάθε x. Η ισότητα ισχύει όταν $x=0$. Επομένως $\max f=3$ στη θέση $x=0$.

2. $f(x)=2|x|+1$. Να βρείτε το ολικό ακρότατο και τη θέση του.

Λύση. Επειδή $|x|\ge 0$, έχουμε

$$2|x|\ge 0 \Rightarrow 2|x|+1\ge 1.$$

Άρα $f(x)\ge 1$ για κάθε x. Η ισότητα ισχύει όταν $x=0$. Επομένως $\min f=1$ στη θέση $x=0$.

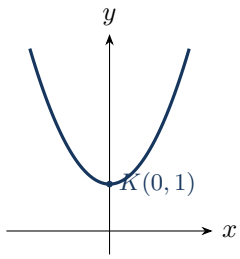
Τύπος 9: Μετατοπίσεις και συμμετρίες γνωστών γραφικών παραστάσεων

Κάτω από κάθε συνάρτηση φαίνεται η μετατόπιση/συμμετρία, η κορυφή και ένα ενδεικτικό σχήμα.

Με αφετηρία την παραβολή $y = x^2$

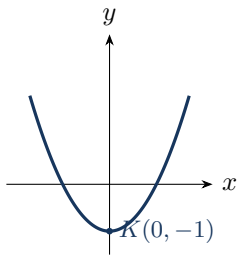
1. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = x^2 + 1$.

Λύση. Μετατοπίζουμε τη $y = x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Κορυφή $K(0, 1)$ και ολικό ελάχιστο 1 στο $x = 0$.



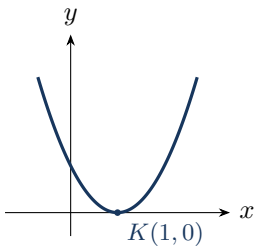
2. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = x^2 - 1$.

Λύση. Μετατοπίζουμε τη $y = x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Κορυφή $K(0, -1)$ και ολικό ελάχιστο -1 στο $x = 0$.



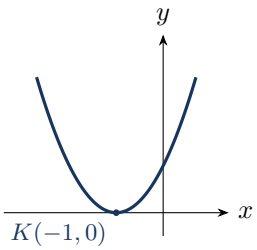
3. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = (x - 1)^2$.

Λύση. Μετατοπίζουμε τη $y = x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά. Κορυφή $K(1, 0)$ και ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 1$.



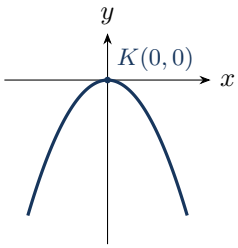
4. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = (x+1)^2$.

Λύση. Μετατοπίζουμε τη $y = x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά. Κορυφή $K(-1,0)$ και ολικό ελάχιστο 0 στο $x = -1$.



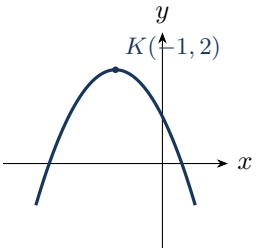
5. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = -x^2$.

Λύση. Παίρνουμε τη συμμετρική της $y = x^2$ ως προς τον άξονα $x'x$. Κορυφή $K(0,0)$ και ολικό μέγιστο 0 στο $x = 0$.



6. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = -(x+1)^2 + 2$.

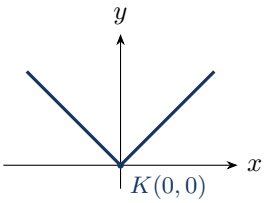
Λύση. Από τη $y = x^2$: συμμετρία ως προς $x'x$, μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά και 2 μονάδες πάνω. Κορυφή $K(-1,2)$ και ολικό μέγιστο 2 στο $x = -1$.



Με αφετηρία τη γραφική παράσταση $y = |x|$

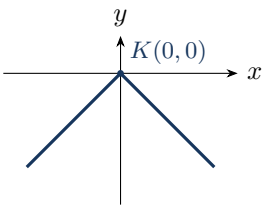
7. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = |x|$.

Λύση. Είναι η βασική γραφική παράσταση απόλυτης τιμής. Κορυφή $K(0,0)$ και ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$.



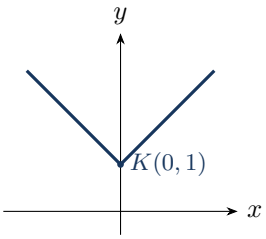
8. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = -|x|$.

Λύση. Είναι η συμμετρική της $y = |x|$ ως προς τον άξονα $x'x$. Κορυφή $K(0,0)$ και ολικό μέγιστο 0 στο $x = 0$.



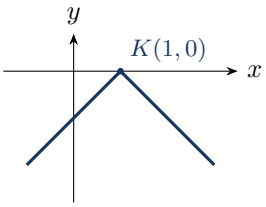
9. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = |x| + 1$.

Λύση. Μετατοπίζουμε τη $y = |x|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Κορυφή $K(0,1)$ και ολικό ελάχιστο 1 στο $x = 0$.



10. Άσκηση: Να σχεδιάσετε τη $y = -|x - 1|$.

Λύση. Από τη $y = |x|$: μετατόπιση 1 μονάδα προς τα δεξιά και συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$. Κορυφή $K(1,0)$ και ολικό μέγιστο 0 στο $x = 1$.



Τύπος 10: Μετατροπή τριωνύμου σε μορφή κορυφής

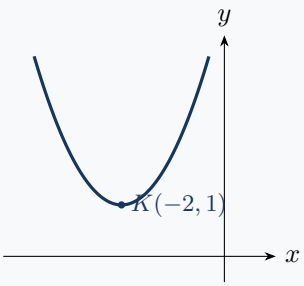
Συμπλήρωση τετραγώνου - λύσεις

1. Να γράψετε τη $f(x) = x^2+4x+5$ σε μορφή κορυφής, να τη σχεδιάσετε και να βρείτε το ακρότατό της.

Λύση.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 5 \\ &= x^2 + 4x + 4 + 1 \\ &= (x+2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Άρα η παραβολή έχει κορυφή $K(-2,1)$, ανοίγει προς τα πάνω και έχει ολικό ελάχιστο 1 στη θέση $x = -2$.



2. Να γράψετε τη $f(x) = x^2+3x+5$ σε μορφή κορυφής, να τη σχεδιάσετε και να βρείτε το ακρότατό της.

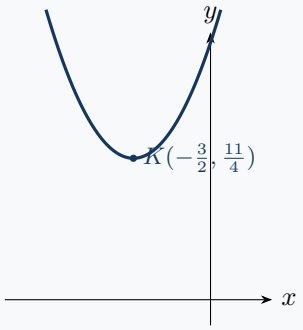
Λύση.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 3x + 5 \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Άρα η παραβολή έχει κορυφή

$$K\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right),$$

ανοίγει προς τα πάνω και έχει ολικό ελάχιστο $\frac{11}{4}$ στη θέση $x = -\frac{3}{2}$.



Τι πρέπει να μπορείτε να κάνετε στο τεστ

- Να γράφετε σωστά και χωρίς βοήθεια τους 6 βασικούς ορισμούς.
- Να χρησιμοποιείτε τη μονοτονία για σύγκριση τιμών και λύση ανισώσεων.
- Να αποδεικνύετε μονοτονία με τον ορισμό, χωρίς παραγώγους.
- Να αναγνωρίζετε την ίδια συνάρτηση μέσα σε μια ανίσωση.
- Να ελέγχετε πρώτα το πεδίο ορισμού πριν εξετάσετε άρτια ή περιττή συνάρτηση.
- Να συμπληρώνετε γραφικές παραστάσεις με συμμετρία και να διαβάζετε μονοτονία και ακρότατα.
- Να βρίσκετε ολικά ακρότατα από απλές ανισότητες.
- Να σχεδιάζετε μετατοπίσεις των x^2 και $|x|$ και να κάνετε συμπλήρωση τετραγώνου.

Καλή μελέτη!