

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} P(1) = 1^4 - 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2$$

$$P(1) = 1 - 1 - 5 + 7 - 2$$

$$P(1) = 0 \quad \text{Ναι, ναι!}$$

β) Οι πιθανοί ακέραιοι ρίζες είναι $\pm 1 \pm 2$.

$$P(-1) = 1 + 1 - 7 - 2 = -7 \quad \text{ΟΧΙ}$$

$$P(2) = 16 - 8 - 20 + 14 - 2 = 0 \quad \text{Ναι.}$$

$$P(-2) = 16 + 8 - 20 - 14 - 2 = -10 \quad \text{ΟΧΙ}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α)

I. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$.

(Μονάδες 7)

II. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x + 1)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \quad ; \quad P(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} \text{II)} \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \quad \textcircled{-1} \\ \downarrow \quad -1 \quad 1 \quad -2 \\ 1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) < 0$$

$$(x+1)(x^2 - x + 2) < 0$$

$\Delta <$

x	-1	
$x+1$	$-$	$+$
$x^2 - x + 2$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$

$$x < -1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{a} \quad P(-2) = (-2)^3 + 2 + 6 = -8 + 8 = 0$$

$\textcircled{b}$ Αφού το $P(-2) = 0$ το $x+2$ είναι παραγονταί.

$$\textcircled{γ} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 6 \\ \downarrow & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \quad \textcircled{-2}$$

$$P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 3)$$

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση

$P(x) : (x-2)$;

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(x) = (x^2 - 2x - x + 2)(x-3)$$

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)(x-3)$$

$$P(x) = x^3 + 11x - 6$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Πηλίκο: } (x-1)(x-3)$$

$$\text{υπόλοιπο: } 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

α) Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.

(Μονάδες 07)

α) $P(-2) = -8 + 8 - 2 + 3 = 1 \neq 0$ όχι ρίζα.

β)

1	2	1	3	(-2)
↓	-2	0	-2	
1	0	1	1	

$\pi(x) = x^2 + 1$.

γ) $P(x) = (x^2 + 1)(x + 2) + 1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

α)

i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

(Μονάδες 8)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $P(x) = (x+1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} : \begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad \textcircled{-1} \\ \downarrow \quad -1 \quad 0 \quad -2 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{ii)} \quad P(x) = (x+1)(x^2+2)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \begin{array}{l} P(x) < 0 \\ (x+1)(x^2+2) < 0 \\ \quad \quad \quad \textcircled{+} \end{array}$$

$$x+1 < 0$$

$$x < -1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x) : (x^2 + x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

α) $P(1) = 1 \neq 0$

$P(-1) = 3 \neq 0$

β)

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + x^2 - 3x + 1 & x^2 + x - 1 \\
 - [2x^3 + 2x^2 - 2x] & \hline
 \hline
 -x^2 - x + 1 & 2x - 1 \\
 - [x^2 - x + 1] & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$P(x) = (x^2 + x - 1)(2x - 1)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = \alpha x^2 + 7, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3^{ου} βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{a} \quad P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 2 + 9$$

$$P(x) = 4x^2 + 7 \quad \text{2ου βαθμού.}$$

$$\textcircled{b} \quad 4x^2 + 7 = \alpha x^2 + 7$$

$$\alpha = 4.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

α) $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ είναι.

β) $P(x) = x^2(x-1) + x-1 = (x-1)(x^2+1)$

γ) $P(x) = 0$

$x-1=0$ ή $x^2+1=0$

Αδύνατο.

$\boxed{x=1}$

ΘΕΜΑ 2

α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = x(2x^2 + x - 1)$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) = 0$$

$$x = 0$$

$$\vee \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$-1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) = x^2(2x-1) + 2x-1$$

$$P(x) = (2x-1)(x^2+1)$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) \geq 0$$

$$(2x-1)(x^2+1) \geq 0$$

$\oplus$

$$2x-1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

(Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$$

και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

α) Για $x=1$ έχω $1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$
 $0=0$ Ναι, είναι!

β)

1	0	-7	6	(1)
↓				
1	1	-6	0	

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-6)$$

β' τροπώ!

$x^3 - 7x + 6$	$x-1$
$-[x^3 - x^2]$	$x^2 + x - 6$
$x^2 - 7x + 6$	
$-[x^2 - x]$	
$-6x + 6$	
$-[-6x + 6]$	
	0

γ) $x^3 - 7x + 6 = 0$

$$(x-1)(x^2+x-6) = 0$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

$$x^2+x-6=0$$

$$x=-3$$

$$x=2$$

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 2) \cdot (x^6 + 1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = (x-2)(x^6+1)$$

$$P(x) = x^7 + x - 2x^6 - 2$$

Του Βαθμ.

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) = 0$$

$$x-2=0$$

$$\vee x^6+1=0$$

Αδυνατεί

$$\boxed{x=2}$$

ΘΕΜΑ 2

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

(Μονάδες 7)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = (2x-1)(x^2-2) + 1$$

$$P(x) = 2x^3 - 4x - x^2 + 2 + 1$$

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$$

$$\textcircled{\beta} \text{ i) } P(1) = 2 - 1 - 4 + 3 = 0 \quad \text{Ναι ναι.}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -4 & 3 \\ \downarrow & & & \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad \textcircled{1}$$

$$P(x) = (x-1)(2x^2+x-3)$$

$$\text{ii) } P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+x-3) = 0$$

$$x-1=0$$

$$\textcircled{x=1}$$

$$2x^2+x-3=0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{-\frac{3}{2}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

(Μονάδες 15)

α) $f(x) = (x-1)$

$$\begin{array}{r} 3 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \quad \textcircled{1} \\ \downarrow \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$$

β) $(x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3 < 3$

$$(x-1)(3x^2 + 2x + 1) < 0$$

① $\Delta < 0$

x	1
$3x^2 + 2x + 1$	+ 0 +
$x-1$	- +
$P(x)$	- +

$$x < 1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 9)

β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{a} \quad P(1) = 2 - 8 + 7 - 1 = 0$$

$$\textcircled{b} \quad \text{i)} \quad R_1(1) = P(1) + Q(1) = Q(1) \neq 0$$

$$\text{ii)} \quad R_2(1) = P(1) \cdot Q(1) = 0 \cdot Q(1) = 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x - 2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(2) = 2 \cdot 8 + 4 - 16 - 4 = 0$$

$$\textcircled{\beta} \quad \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -8 & -4 \\ \downarrow & 4 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{array} \quad \textcircled{2}$$

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 5x + 2)$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -2 \end{array}$$

$$P(x) = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2)$$

$$P(x) = (x - 2)(2x - 1)(x + 2)$$

$$\textcircled{\gamma} \quad (x - 2)(2x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\textcircled{x = \frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{x = -2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(2) = 8 - 14 + 6 = 0$$

$$\textcircled{\beta} \quad x^3 - 7x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -7 & 6 & \textcircled{2} \\ \downarrow & 2 & 4 & -6 & \\ 1 & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+2x-3) = 0$$

$$x-2=0 \quad \text{ή} \quad x^2+2x-3=0$$

$$\textcircled{x=2}$$

$$\textcircled{x=-3}$$

$$\textcircled{x=1}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(1) = 1$$

$$P(2) = 0$$

$$P(-1) = 3$$

$$\textcircled{\beta} \quad \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -2 & 4 \\ \downarrow & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \quad \textcircled{2}$$

$$P(x) = (x-2)(x^2-2) = (x-2)(x^2-\sqrt{2}^2)$$

$$P(x) = (x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

Οι ρίζες του $P(x)$ είναι $2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

(Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(1) = 2 \cdot (1-1)^{20} - 3(1-1)^{10} + 2 - 2 = 0$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{i) } P(0) = 2 - 3 - 2 = -3$$

ii). Αφού $P(0) = -3 \neq 0$ δεν αμφ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

α) $P(1) = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$ είναι.

β) $(x-1)(x^2-x+2) > 0$.
 $\Delta < 0$

x	<u>1</u>	
$x-1$	-	+
x^2-x+2	+	+
$P(x)$	-	+

$x \in (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x^2-1)(x+1)$$

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+1)$$

$$P(x) = (x-1)(x+1)^2$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) \geq 0.$$

$$(x-1)(x+1)^2 \geq 0$$

⊕

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1.$$

$$x \in [1, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 2

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

$$(\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon)$$

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4$$

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2.$$

$$\textcircled{\gamma} \quad P(3) = 4 \quad \text{οπρα το } x=3 \text{ δε ειναι ριζα.}$$

$$\text{Επειδη } P(3) \neq 0 \text{ ωστε να ειναι ριζε.}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

(Μονάδες 12)

$$\begin{array}{cccccc} \textcircled{\alpha} & 1 & 0 & 2 & -3 & \textcircled{-1} \\ & \downarrow & & & & \\ & & -1 & 1 & -3 & \\ & 1 & -1 & 3 & -6 & \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 3) - 6$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) + 6 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x + 3) = 0$$

$\Delta < 0$

$$\textcircled{x = -1}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

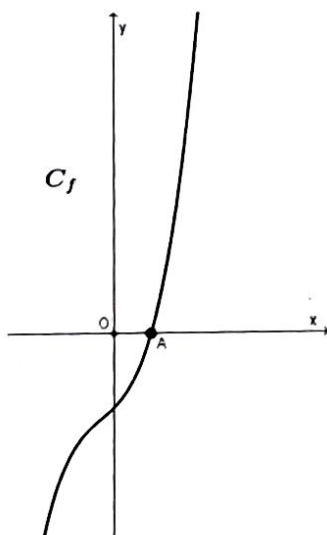
β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.

(Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 09)



α) $f(1) = 3 \neq 0$ όχι ρίζα.

$f(-1) = -2 + 1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$ όχι ρίζα.

β) i) Παρατηρώ ότι η $f(x)$ έχει πραγματική ρίζα γιατί τερμνά των x 's πραγματική γράφει.

ii). Επειδή $f(0) = -1$ και $f(1) = 3$.

Τα σημεία $B(0, -1)$ και $\Gamma(1, 3)$ βρίσκονται εκατέρωθεν των x 's άρα η $f(x)$ τερμνά των x 's στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

α)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 3$.

(Μονάδες 7)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x) : (x - 3)$

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - 3)(2x - 1)$.

(Μονάδες 11)

α) i/ $P(3) = 2 \cdot 27 - 3 \cdot 9 - 11 \cdot 3 + 6 = 27 + 6 - 33 = 0$

ii/

2	-3	-11	6	(3)
↓	6	9	-6	
2	3	-2	0	

$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$$

β) Το $P(x)$ έχει παραγοντα το $(x - 3)(2x - 1)$

αν και μόνο αν

$$P(3) = 0 \quad \checkmark$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \checkmark$$

* $2x^2 + 3x - 2 = 0$
 $\Delta = 9 + 16 = 25$
 $x = \frac{-3 \pm 5}{4} \rightarrow \frac{1}{2}, -2$

ΘΕΜΑ 4

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .

(Μονάδες 5)

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 7)

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

(Μονάδες 5)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

$$\text{Τότε} \quad P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x+2) + x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x^2+1) = 0$$

$$\boxed{x = -2}$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) = x^3 - x^2 + bx + c$$

$$P(1) = b + c$$

$$\text{Προφανώς} \quad c = -b \quad \text{ώστε} \quad P(1) = 0$$

αρα ο Α θα επιλέξει τον αναδιατω Β

$$\textcircled{\gamma} \quad P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1.$$

Για $P(-1)P(0) < 0$.

$$(-1 + a - b + 1) \cdot 1 < 0$$

$$a - b < 0$$

$$a < b$$

Πάντα ο A επιλέγει μικρότερο
νούμερο του B .

$$\textcircled{\delta} \quad P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2022$$

Αρκεί να $P(13) \neq 0$.

Δηλαδή, αρκεί να το $13 \in \mathbb{Z}$

δεν είναι ρίζα του $P(x)$.

Δηλαδή αρκεί να το 13 δεν

διαίρει τον σταθερό όρο 2022

ούττω $2022 : 13 = 155, 53$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

(Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$.

(Μονάδες 6)

Εστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$$\textcircled{a} \quad P(2) = 8\alpha + 4\beta - 2\beta + 3 = 0$$

$$8\alpha + 2\beta + 3 = 0$$

$$8\alpha = -(2\beta + 3)$$

$$\alpha = -\frac{2\beta + 3}{8}$$

$$\alpha = -\frac{1}{8} \cdot (2\beta + 3)$$

Επειδή $\beta \in \mathbb{Z}$
το 2β αρτία
αρα το $2\beta + 3$
περιττό!

$$-8\alpha = 2\beta + 3$$

περιττό

$\Rightarrow -8\alpha$ περιττό!
Απόρροια!

$$\textcircled{b} \quad P(1) = 0 \Rightarrow \alpha + 3 = 0 \quad \alpha = -3$$

$$\text{Αρα} \quad -3 = -\frac{2\beta + 3}{8}$$

$$24 = 2\beta + 3$$

$$21 = 2\beta$$

$$\beta = \frac{21}{2}$$

⑧. $P(x) \leq 0$.

$$-3x^3 + \frac{21}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 3 \leq 0.$$

-3	$\frac{21}{2}$	$-\frac{21}{2}$	3	①
↓				
-3	-3	$\frac{15}{2}$	-3	
-3	$\frac{15}{2}$	-3	0	

$$(x-1) \left(-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3 \right) \leq 0$$

$$(x-1) (-6x^2 + 15x - 6) \leq 0.$$

$$\Delta = 225 - 4 \cdot 6 \cdot 6.$$

$$\Delta = 81$$

$$x = \frac{-15 \pm 9}{-12}$$

$$\frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$2$$

x	$\frac{1}{2}$	1	2
x-1	-	0	+
$-6x^2 + 15x - 6$	-	+	0
P(x)	+	-	+

$$x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \cup (2, +\infty)$$

$$\textcircled{8} \quad P(\sin x) = 0.$$

$$\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = 2.$$

$$\sin x = \sin 0$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

A solution.

$$\boxed{x = 2k\pi}$$

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}$$

ΘΕΜΑ 4

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

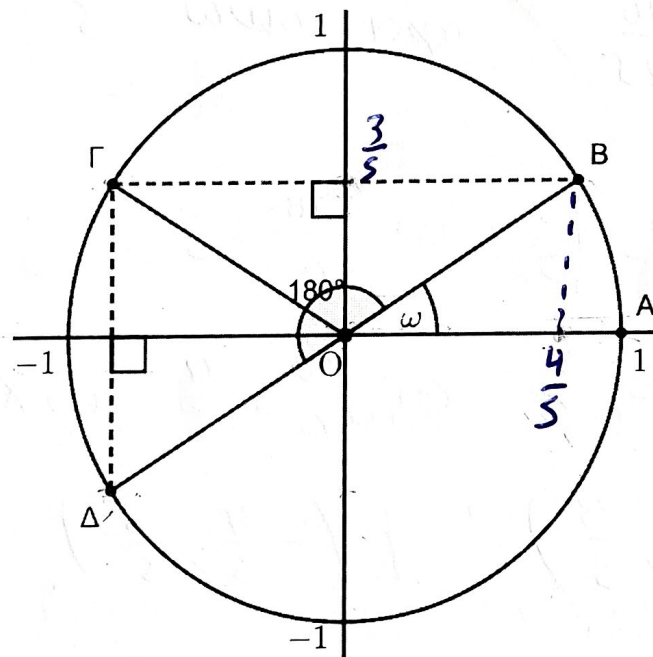
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,

(Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOG}$ και $\widehat{AOD}$.

(Μονάδες 5)



α) $5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$

$$\boxed{\eta\mu\omega = t}$$

$$5t^3 - 8t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(5t^2 - 13t + 6) = 0$$

$$5 \quad -8 \quad -7 \quad 6 \quad (-1)$$

$$\boxed{t = -1} \quad 5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$\downarrow \quad -5 \quad 13 \quad -6$$

$$\boxed{t = 2} \quad \boxed{t = \frac{3}{5}}$$

$$5 \quad -13 \quad 6 \quad 0$$

Αρα $\eta\rho\omega = -1$, $\eta\rho\omega = 2$ - $\boxed{\eta\rho\omega = \frac{3}{5}}$
 Απορ/ται Απορ/ται

γιναι η γωνια
 $\omega \in [0, \pi/2]$
 και $\eta\rho\omega > 0$.

② i) $\eta\rho^2\omega + \sigma\omega^2\omega = 1$. $(\Rightarrow) (\frac{3}{5})^2 + \sigma\omega^2\omega = 1$

$\frac{9}{25} + \sigma\omega^2\omega = 1 \quad (\Rightarrow) \sigma\omega^2\omega = 1 - \frac{9}{25}$

$\sigma\omega^2\omega = \frac{16}{25}$ αρα $\boxed{\sigma\omega\omega = \frac{4}{5}}$ $\wedge \sigma\omega\omega = -\frac{4}{5}$
 $\omega \in [0, \pi]$

ii) $\eta\rho\omega = \frac{3}{5} \quad (\Rightarrow) \frac{y_B}{\rho} = \frac{3}{5} \quad (\Rightarrow) \frac{y_B}{1} = \frac{3}{5} \quad (\Rightarrow) y_B = \frac{3}{5}$

$\sigma\omega\omega = \frac{4}{5} \quad (\Rightarrow) \frac{x_B}{\rho} = \frac{4}{5} \quad (\Rightarrow) x_B = \frac{4}{5}$

$B(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) \quad \Gamma(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

$\Delta(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

iii) $\eta\rho AOB = \frac{3}{5}$

$\sigma\omega AOB = \frac{4}{5}$

$\eta\rho AOG = \frac{3}{5}$

$\sigma\omega AOG = -\frac{4}{5}$

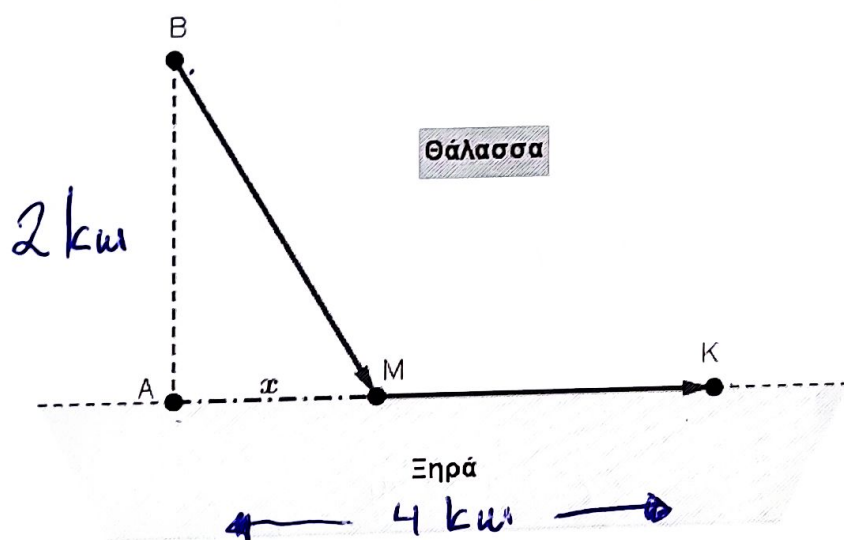
$\eta\rho AOD = -\frac{3}{5}$

$\sigma\omega AOD = -\frac{4}{5}$

ΘΕΜΑ 4

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το A . Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5 km/h .

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t , είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\text{ km}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή –δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

(Μονάδες 11)

α) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = 0$.

$$\begin{array}{cccc} 3 & 4 & -5 & -2 \\ \downarrow & & & \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{array} \quad \textcircled{1}$$

$$(x-1)(3x^2+7x+2)=0$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25$$

$x=1$

$$x = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

$-\frac{1}{3}$

-2

β) $P(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+7x+2) > 0$

x	-2	$-\frac{1}{3}$	1
x-1	-	-	+
$3x^2+7x+2$	+	-	+
P(x)	-	+	+

$$x \in (-2, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$$

8. Дано $\frac{5}{x^2+1} = t$.

Ако $3t^3 + 4t^2 - 5t - 2 > 0$.

$P(t) > 0$.

$-2 < t < -\frac{1}{3}$ и $t > 1$.

$-2 < \frac{5}{x^2+1} < -\frac{1}{3}$ $\frac{5}{x^2+1} > 1$

Ако

$5 > x^2 + 1$

$0 > x^2 - 4$

$x^2 < 4$

$|x| < 2$

$x \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το

πρόσημο του γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

(Μονάδες 9)

α) Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\max f(x) = 1.$$

β). $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$
 $f \downarrow$

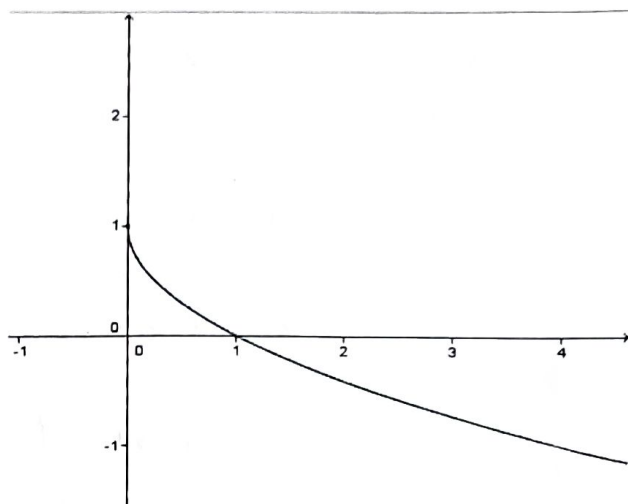
$$f(0) > f(\alpha) > f\left(\frac{1}{4}\right) > f(\beta)$$

$$f(0) > f(\alpha) > \frac{1}{2} > f(\beta)$$

$$\bullet f(\alpha) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\alpha) > 1 \Leftrightarrow 2f(\alpha) - 1 > 0$$

$$\bullet f(\beta) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\beta) < 1 \Leftrightarrow 2f(\beta) - 1 < 0.$$

$$\text{Άρα } P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1) < 0$$



⑧. $f(x) = 2x$

$$1 - \sqrt{x} = 2x$$

$$1 = 2x + \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = 1 - 2x$$

$\boxed{x \geq 0}$

dan $1 - 2x \geq 0$

$$2x \leq 1,$$

$$\boxed{x \leq \frac{1}{2}}$$

$$x = (1 - 2x)^2$$

$$x = 1 + 4x^2 - 4x$$

$$0 = 4x^2 - 5x + 1$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{8}$$

~~$\frac{1}{2}$~~

$\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = 4x - 4 \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

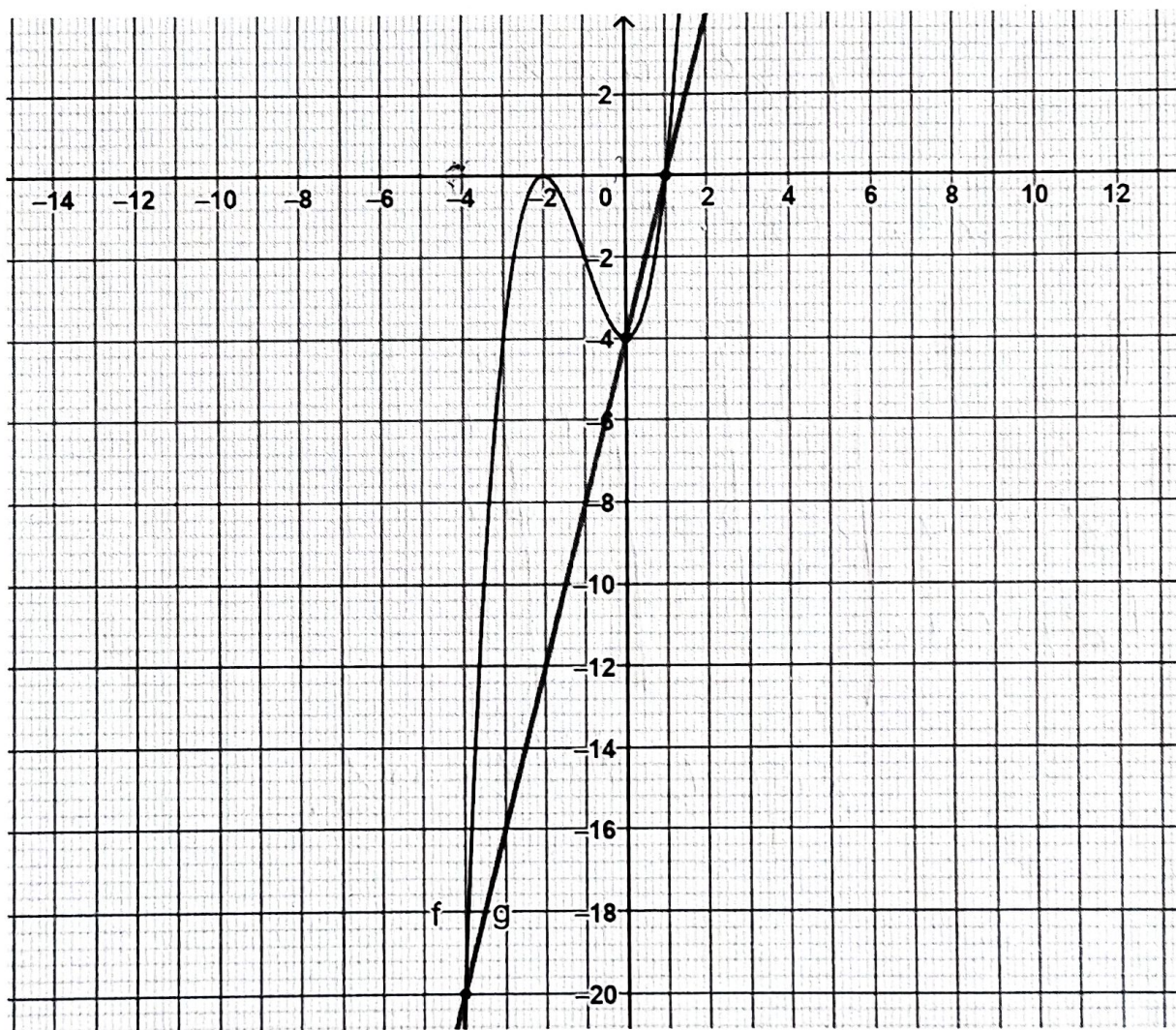
(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)



Ⓐ $H \nearrow \infty (-\infty, -2]$ and $[0, +\infty)$

$H \searrow \infty [-2, 0]$

Ⓑ $f(x) = g(x)$

$x = -4 \quad x = 0 \quad x = 1$

Ⓓ $g(x) < f(x)$

$4x - 4 < x^3 + 3x^2 - 4$

$x^3 + 3x^2 - 4x > 0$

$x(x^2 + 3x - 4) > 0$

x	-1	0	4
x	-	- 0 +	+
$x^2 + 3x - 4$	+ 0 -	- 0 +	+
$x^3 + 3x^2 - 4x$	-	+	- +

$x \in (-1, 0) \cup (4, +\infty)$

Алгебра

$f(x) = g(x)$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 4x - 4$

$x^3 + 3x^2 - 4x = 0$

$x(x^2 + 3x - 4) = 0$

$x = 0$

$x = -4$

$x = 1$

ΘΕΜΑ 4

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο διάστασή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x .

(Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

(Μονάδες 9)

ii. Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

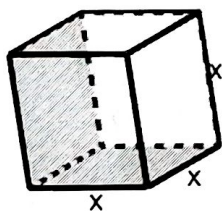
(Μονάδες 4)

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί άλλη μία διάσταση της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

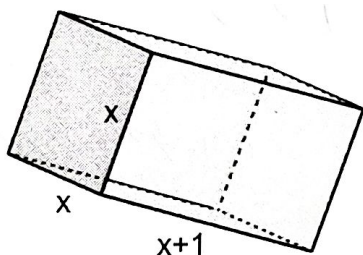
(Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

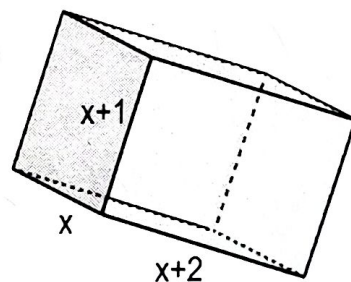
Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



Δεξαμενή Γ



$$\textcircled{a} \quad V_1(x) = x^3$$

$$V_2(x) = x \cdot x \cdot (x+1) = x^2(x+1) = x^3 + x^2$$

$$\text{Αρα} \quad \Delta(x) = V_2(x) - V_1(x) = x^3 + x^2 - x^3 = x^2.$$

$$\textcircled{B} i) V_2(x) = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 0 & -36 & \textcircled{3} \\ \downarrow & 3 & 12 & 36 & \\ 1 & 4 & 12 & 0 & \end{array}$$

$$(x-3)(x^2+4x+12) = 0$$

$$\Delta < 0$$

$$\textcircled{x=3}$$

$$\text{Делители } A : \begin{array}{l} M: 3 \\ P: 3 \\ U: 3 \end{array}$$

$$\underline{\text{Делители } B}$$

$$M: 3$$

$$P: 3$$

$$U: 4$$

$$ii) \Delta(3) = 9$$

$$\textcircled{8} V_3(x) = x(x+1)(x+2) = (x^2+x)(x+2) = x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x$$

$$V_3(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$\text{Пусть } V_3(x) \geq 60 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x \geq 60$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0, \Leftrightarrow (x-3)(x^2+6x+20) \geq 0$$

$$\Delta < 0$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 2 & -60 & \textcircled{3} \\ \downarrow & 3 & 18 & 60 & \\ 1 & 6 & 20 & 0 & \end{array}$$

$$x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\text{B}} \quad P(x) = (x^2 - 4) \pi(x) + 4x + 1$$

$$x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta = (x^2 - 4) \pi(x) + 4x + 1$$

$$\text{Για } x=2$$

$$32 - 32 - 4 + 2\alpha + \beta = 9$$

$$2\alpha + \beta = 13$$

$$\text{Για } x=-2$$

$$-32 + 32 - 4 - 2\alpha + \beta = -7$$

$$-2\alpha + \beta = -3$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 13 \\ -2\alpha + \beta = -3 \end{cases} \quad (+)$$

$$2\beta = 10$$

$$\beta = 5$$

$$\alpha = 4$$

$$\textcircled{a} \quad \begin{array}{l} x^5 - 4x^3 - x^2 + ax + b \\ - [x^5 - 4x^3] \\ \hline -x^2 + ax + b \\ - (-x^2 + 4) \\ \hline ax + b - 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 4 \\ x^3 - 1 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{8} \quad i) \quad P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1.$$

$$ii). \quad P(x) < 4x + 1.$$

$$(x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1 < 4x + 1.$$

$$(x^2 - 4)(x^3 - 1) < 0.$$

$$(x^2 - 4)(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$$

② ② ① $\Delta < 0$

x	-2	1	2
$x^2 - 4$	+	0	-
$x - 1$	-	-	0
$x^2 + x + 1$	+	+	+
$t(x)$	-	+	-

$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2).$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)

α) i) $P(0) = 2 \neq 0$ όχι ρίζα.

$$ii). P(\rho) = 0 \Leftrightarrow 2\rho^4 - 5\rho^3 + 4\rho^2 - 5\rho + 2 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right) = 2 \frac{1}{\rho^4} - 5 \frac{1}{\rho^3} + 4 \frac{1}{\rho^2} - 5 \frac{1}{\rho} + 2$$

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{2 - 5\rho + 4\rho^2 - 5\rho^3 + 2\rho^4}{\rho^4} = \frac{P(\rho)}{\rho^4} = 0$$

β) $P(2) = 0$ αφού το $x=2$.

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(Μονάδες 10)

α) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$ Αδυνατούμε στο $\mathbb{R}$.

β) $x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1)(x^2 + \beta x + 1)$

$$x^4 + 1 = x^4 + \beta x^3 + x^2 + \alpha x^3 + \alpha \beta x^2 + 1$$

$$\cancel{x^4 + 1} = \cancel{x^4} + (\beta + \alpha)x^3 + (1 + \alpha\beta)x^2 + \cancel{1}$$

$$0 = (\beta + \alpha)x^3 + (1 + \alpha\beta)x^2$$

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 0 \\ 1 + \alpha\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$$

$$1 - \beta^2 = 0$$

$$1 = \beta^2$$

$$\beta = 1 \quad \beta = -1$$

$$\alpha = -1 \quad \alpha = 1.$$

8. Είναι τωδός!

$$x^4 + 1 = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta < 0} \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\Delta < 0}.$$

↓
Δα < 0
πίτ.

↓
Δα < 0
πίτ.

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

$$g(x) = 3x - 1.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

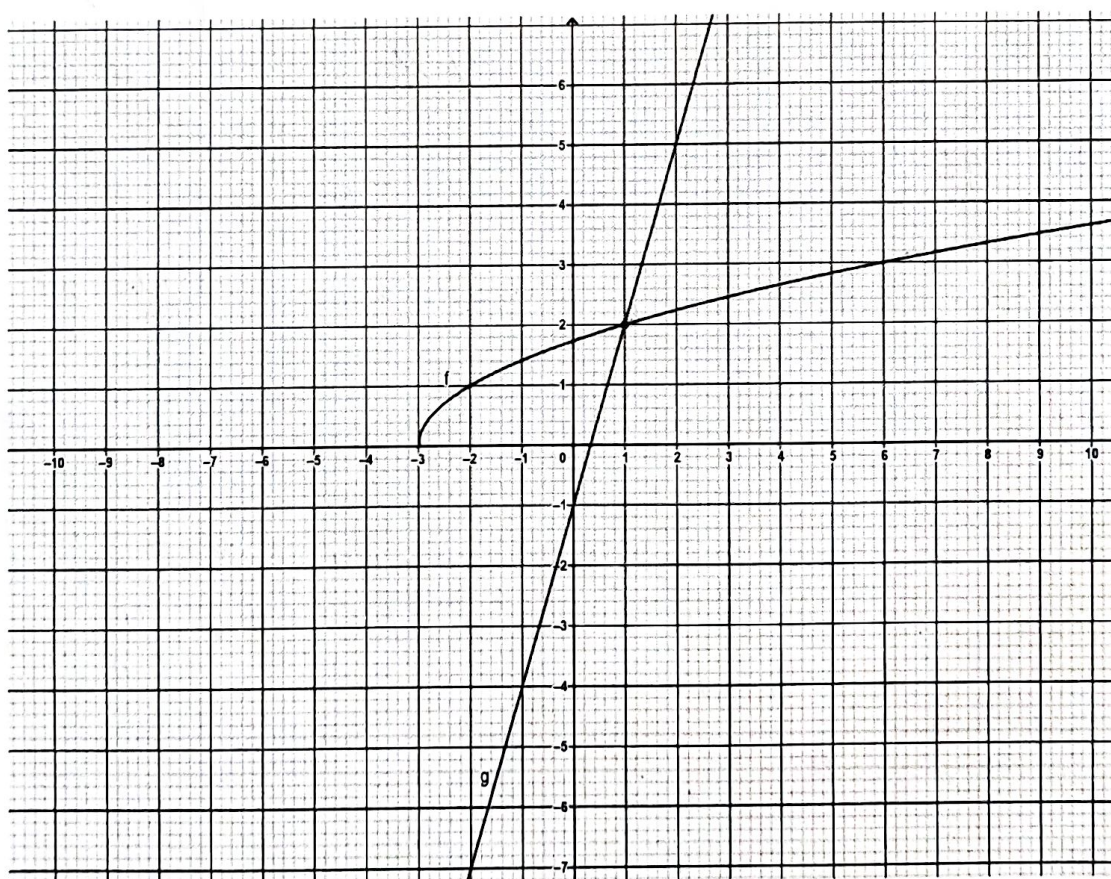
γ)

i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

(Μονάδες 8)



① $f(x) = \sqrt{x+3}$ npnu $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$D_f = [-3, +\infty)$.

$g(x) = 3x-1$

$D_g = \mathbb{R}$.

• $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1+3 < x_2+3 \Leftrightarrow \sqrt{x_1+3} < \sqrt{x_2+3}$
 $f(x_1) < f(x_2)$

• $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1-1 < 3x_2-1$ $\nearrow$
 $g(x_1) < g(x_2)$

$g \nearrow$

② $f(x) = g(x)$

$\sqrt{x+3} = 3x-1$

$x+3 \geq 0$ and $3x-1 \geq 0$

$x+3 = (3x-1)^2$

$x+3 = 9x^2 - 6x + 1$

$0 = 9x^2 - 7x - 2$

$\Delta = 49 + 72$

$\Delta = 121$

$x = \frac{7 \pm 11}{18}$ $\nearrow 1$
 $\searrow -\frac{4}{18} = -\frac{2}{9}$

③. i) $x \in (1, +\infty)$.

ii). $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x-1$

$x+3 \geq 0$ and $3x-1 \geq 0$

$x \geq -3$ and $x \geq \frac{1}{3}$

$x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$\Leftrightarrow 0 < 9x^2 - 7x - 2$

x	1
$9x^2 - 7x - 2$	- + +

$x > 1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $v(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = \delta(x) \pi(x) + v(x)$$

$$x^4 + x^3 + \alpha x - 4 = (x^2 - 3x + 2) \pi(x) + 24x - 24$$

① ②

Για $x=1$

$$\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

$$\boxed{P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4}$$

$$\textcircled{\beta} \text{ i) } P(1) = 0 \text{ άρα } v = 0$$

$$\text{ii) } P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -4 & \textcircled{1} \end{array} \quad (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\textcircled{x=1} \quad x^2(x+2) + 2(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2 + 2) = 0$$

$\Delta < 0$

$$A(1,0) \quad B(2,0)$$

$$\textcircled{x=-2}$$

$$\text{III) } P(x) < 0$$

$$(x-1)(x+2)/(x^2+2) < 0$$

x	1	-2	1
x-1	-	-	+
x+2	-	+	+
x ² +2	+	+	+
P(x)	+	-	+

$$x \in (-2, 1)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

(Μονάδες 9)

α) $P(x)$ διαιρείται από το $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Άρα το $P(x)$ διαιρείται από το $x - 1$ 2 φορές.

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \quad -1 \quad \alpha \quad \beta \quad (1) \\ \downarrow \quad 1 \quad -2 \quad -2 \quad \alpha-2 \\ 1 \quad -1 \quad -2 \quad \alpha-2 \quad \boxed{\alpha+\beta-2} \end{array} \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -2 \quad \alpha-2 \quad (1) \\ \downarrow \quad 1 \quad 0 \quad -2 \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad \boxed{\alpha-4} \end{array} \rightarrow 0 \quad \text{άρα} \quad \boxed{\alpha=4} \quad \boxed{\beta=-2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \textcircled{B} \text{ i) } x^4 - 2x^3 - x^2 + 14x - 2 & x^2 + 5 \\
 - [x^4 + 5x^2] & x^2 - 2x - 6 \\
 \hline
 -2x^3 - 6x^2 + 14x - 2 & \\
 - [-2x^3 - 10x] & \\
 \hline
 -6x^2 + 14x - 2 & \\
 - (-6x^2 - 30) & \\
 \hline
 14x + 28 &
 \end{array}$$

$$P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$$

ii). $P(x) = 14(x+2)$.

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14(x+2) = 14(x+2)$$

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) = 0$$

$$(x^2 + 5) = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 6 = 0$$

Adhuan

$$\Delta = 4 + 24 = 28$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{7}$$

$$x = 1 - \sqrt{7}.$$

ΘΕΜΑ 4

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

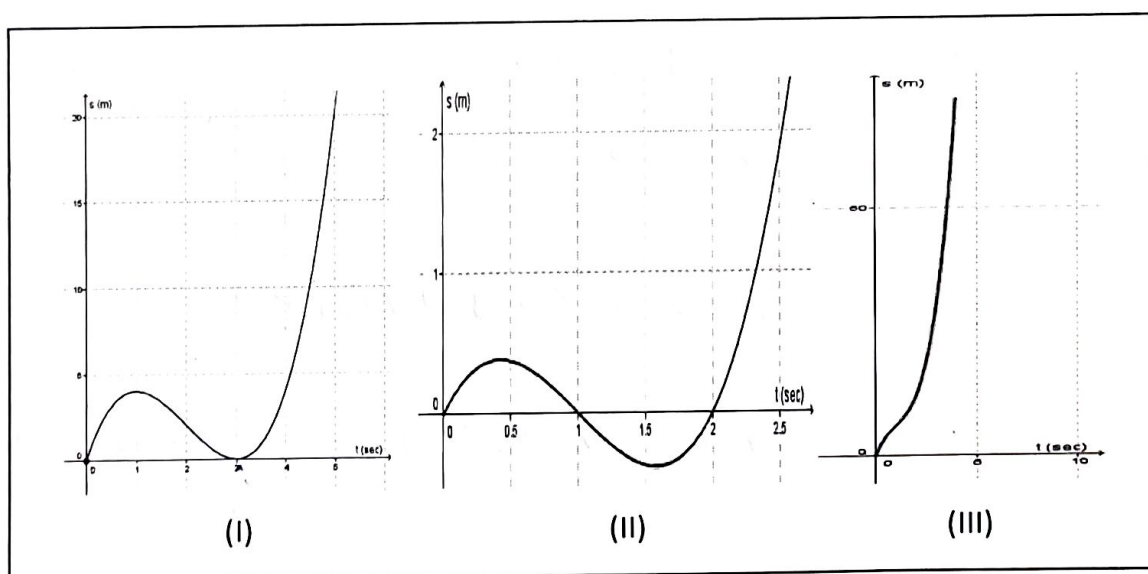
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



α) $s(0) = 0$

$s(2) = 16 - 24 + 20 = 12$

β) $30 = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

$15 = t^3 - 3t^2 + 5t$

$t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0$

$$t^2(t-3) + s(t-3) = 0$$

$$(t-3)(t^2+s) = 0$$

$$t-3=0$$

$$\text{и } t^2+s=0$$

$$\textcircled{t=3}$$

Аδωαση.

$$\textcircled{8} \text{ Αρκει υδω } s(t) \geq 0$$

$$2t^3 - 6t^2 + 10t \geq 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 5t \geq 0$$

$$t(t^2 - 3t + 5) \geq 0$$

$$\textcircled{+} \quad \Delta = 9 - 20$$

$$\Delta < 0$$

$$\textcircled{9} \quad s(3) = 2 \cdot 27 - 6 \cdot 9 + 10 \cdot 3$$

$$s(3) = 54 - 54 + 30 = 30 \neq 0$$

Αρα ζωωω ω 30 σxημ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a, a \in \mathbb{R}. \quad (1)$

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a=0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $a = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $a \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a$$

πρέπει $2-x \geq 0$ και $x+2 \geq 0$ και $a \geq 0$

$$x \leq 2$$

$$x \geq -2$$

$$x \in [-2, 2].$$

$$\textcircled{\beta} \quad \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 0$$

πρέπει $2-x = 0$ και $x+2 = 0$.

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=-2}$$

Αδυναμία.

$$\textcircled{1} \quad g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$$

$$g(-x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = g(x)$$

$$x \in [-2, 2]$$

αρα $x \in D_g$ και $-x \in D_g$. άρα.

$$\textcircled{8} \text{ i) } \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{2}.$$

$$2-x + x+2 + 2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2} = 8$$

$$4 + 2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2} = 8$$

$$2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2} = 4 \quad (\Rightarrow) \sqrt{2-x}\sqrt{x+2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (2-x)(x+2) = 4 \quad \Leftrightarrow 2x+4-x^2-2x = 4$$

$$\Leftrightarrow -x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

$$\text{ii). Αφού η εξίσωση } \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a$$

έχει ρίζα τον ρ τότε $\boxed{\sqrt{2-\rho} + \sqrt{\rho+2} = a}$

$$\text{Αν } x = -\rho \text{ τότε } \sqrt{2+\rho} + \sqrt{2-\rho} = a \text{ που ισχύει!}$$

ΘΕΜΑ 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

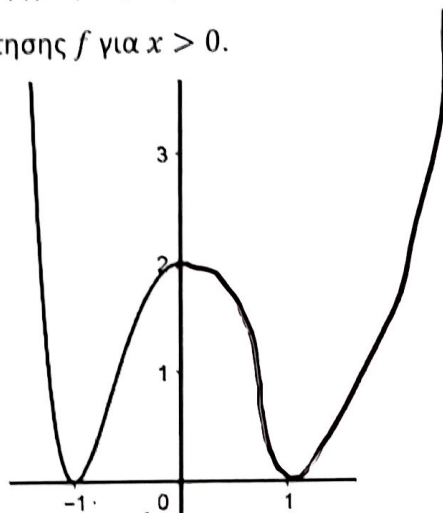
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

$$x \in D_f \text{ και } -x \in D_f$$

$$\textcircled{\alpha} f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2 = f(x)$$

$$\textcircled{\beta} \frac{x'x}{f(x)=0}$$

$$\Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$(x^2)^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$t^3 - 3t + 2 = 0$$

$$\textcircled{x^2 = t}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}$$

$$\downarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\underline{1} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$A(1,0) \quad B(-1,0)$$

$$\textcircled{1}$$

$$(t-1)(t^2+t-2) = 0$$

$$\textcircled{t=1}$$

$$x^2 = 1$$

$$\textcircled{x=1}$$

$$\textcircled{x=-1}$$

$$\textcircled{t=-2}$$

$$x^2 = -2$$

$$\text{Αδύνατο}$$

$$\textcircled{t=1}$$

$$x^2 = 1$$

⑦ $\Sigma x_n \mu$

⑧ $H \ f \downarrow$ στο $(-\infty, -1]$ και $[0, 1]$

$H \ f \nearrow$ στο $[-1, 0]$ και $[1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

- i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

(Μονάδες 6)

- ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

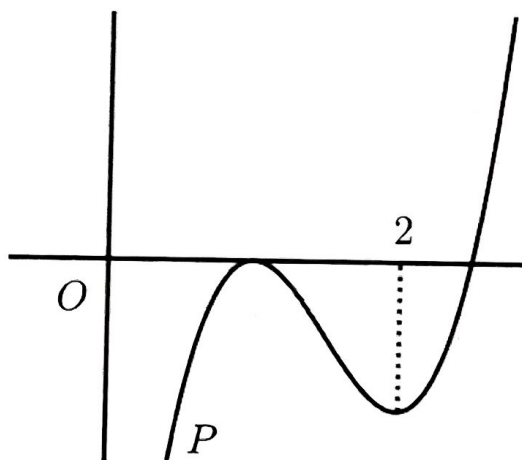
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



α) Αφού το πολυώνυμο έχει παραγοντα το $x-1$

$$P(1) = 0.$$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσής με το $x-2$

$$\text{είναι } -1 \quad \text{τότε } P(2) = -1.$$

Apa $P(1) = 2 + a + b - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{a + b = 3.}$

$P(2) = 16 + 4a + 2b - 5 = -1 \quad \Leftrightarrow 4a + 2b = -12$
 $\boxed{2a + b = -6}$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -6 \end{cases}$$

11). $\begin{cases} -a - b = -3 \\ 2a + b = -6 \end{cases} \quad \textcircled{+} \quad \begin{aligned} a &= -9 \\ b &= 12 \end{aligned}$

⑧ $P(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 < 0$

x	1	5/2
x-1	-	+
$2x^2 - 7x + 5$	-	-
P(x)	+	+

$x \in (1, \frac{5}{2})$

$\begin{array}{cccc} 2 & -9 & 12 & -5 \quad \textcircled{1} \\ \downarrow & & & \\ & 2 & -7 & 5 \\ & 2 & -7 & 5 \quad 0 \end{array}$

$(x-1)(2x^2 - 7x + 5) < 0.$

① $\Delta = 49 - 40$

$\Delta = 9$

$x = \frac{7 \pm 3}{4} \rightarrow \frac{5}{2}, 1$

⑧. H $P(x) \nearrow$ $\sigma \omega (-\infty, 1]$

H $P(x) \downarrow$ $[1, 2]$

H $f(x) \nearrow$ $[2, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4

Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}\text{C}$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει

$$T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}\text{C}$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad T(2) = 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 31 \cdot 2 - 30$$

$$T(2) = 0$$

β). Άλλα πράσι να παραγοντοποιηθούν
την $T(x)$.

1	-10	31	-30	$\textcircled{2}$
↓	2	-16	30	
1	-8	15	0	$T(x) = (x-2)(x^2-8x+15)$

$$T(x) = (x-2)(x-3)(x-5)$$

$$\alpha=2 \quad \beta=3 \quad \gamma=5$$

⑧ $T(x) < 0$

$$(x-2)(x-3)(x-5) < 0$$

x		2	3	5
$x-2$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$x-5$	-	-	-	0
$T(x)$	-	+	-	+

$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, 5)$$

or $x > 0$

$$x \in (0, 2) \cup (3, 5)$$