

T_0 B'

Θερα

των

Πανεπιστημίων

Βασικό 5ος Σενάριο

Δίνεται συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

με τύπο $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \ln x, x > 0$

1. Να βρεθεί η $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$$

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

$$x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x > 1$$

$$e^{\ln x} > e^1$$

$$x > e$$

$$D_{f \circ g} = (e, +\infty).$$

2. BpJ Tm (got)(x)

$$(got)(x) = g(h(x)) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g$$

$$x > 1 \quad \text{και} \quad \frac{x}{x-1} > 0$$

x	0	1
x	-	+
x-1	-	+
p(x)	+	+

$$x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$D_{got} = (1, +\infty).$$

3. $\subseteq_{\sigma TW}$ $h(x) = (got)(x)$. Ndo u $h(x)$ αντιστρέφεται και η BpJ Tm $h^{-1}(x)$

$$h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad x > 1$$

$$h(x_1) = h(x_2) \quad (\Leftrightarrow) \quad \ln\left(\frac{x_1}{x_1-1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{x_2-1}\right)$$

$$(\Leftrightarrow) \frac{x_1}{x_1-1} = \frac{x_2}{x_2-1}$$

$$(\Leftrightarrow) x_1(x_2-1) = x_2(x_1-1)$$

$$x_1x_2 - x_1 = x_2x_1 - x_2 \quad (\Leftrightarrow) x_1 = x_2$$

Αρα η $h(x)$ είναι 1-1 συναρτησισμοφύνη

$$h(x)=y \Leftrightarrow y = \ln \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{x-1}$$

$$e^y(x-1)=x \Leftrightarrow e^y x - e^y = x \rightarrow e^y x - x = e^y$$

$$x(e^y - 1) = e^y \quad \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y - 1}$$

$$\boxed{h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}}$$

$$D_{h^{-1}} = (0, +\infty)$$

$$\sum T_h = (0, +\infty)$$

Μονοτονία $h(x)$

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-1}{x(x-1)} < 0 \quad h \downarrow$$

x	1	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{x}{x-1} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = \ln 1 = 0$$

4. Ασυμπτωτική

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty$$

Ε1: $x=1$ κατακόρυφη
ασυμπτωτική

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

Ε2: $y=0$ οριζόντια
ασυμπτωτική
στο $+\infty$

Προφανώς δεν ερυνω στο $-\infty$.

Αν εχουμε οριζοντια στο $+\infty$ δεν εχουμε ηλγαηα

Tips

Πιθανά
πεδία
ορισμού

$$D_f = \mathbb{R}$$

- κατακόρυφη όχι
- Οριζοντια φάχνω στα ∞
- Αν δεν εχουμε φάχνω ηλγαηα.

$$D_f = (0, +\infty)$$

- κατακόρυφη
φάχνω στο 0+
- Οριζοντια ή
ηλγαηα στο $+\infty$.

$$\underline{D_f = \mathbb{R}^*}$$

- κατακύρυνση στο $0_{\pm}$
- Οριζόντια ή πλάγια στο $\pm \infty$

Πως Βρίσκω οριζ. πλάγια;

Αν δω έχω οριζόντια π.χ στο $+\infty$.

Τότε Βρίσκω το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty - \infty = \alpha \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq \infty)$$

Επειτα Βρίσκω το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x] = \infty - \infty = \infty - \infty = b \quad (b \neq \infty)$$

Τότε η $\varepsilon \equiv y = \alpha x + b$ πλάγια στο $+\infty$.

5. κρυπτούμενη

$$\underline{\underline{X > 1}}$$

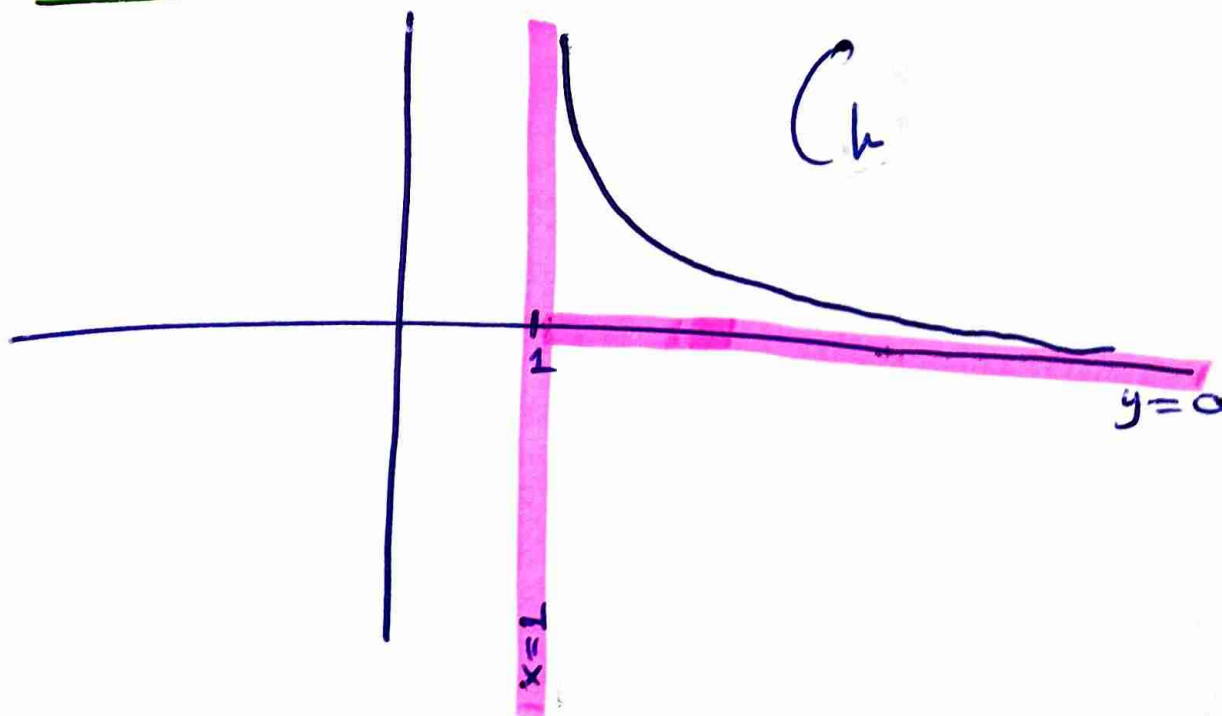
$$h'(x) = -\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x^2-x}$$

$$h''(x) = -\frac{-(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$$

$$\rightarrow h''(x) = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

x	1	too
h''	+	
h	↪	

6. Γραφική παράσταση



Εναλλακτικά πιθανά Σενάρια για το β' θεμ

1. Να βρεθεί εφαπτομένη της f
στο $x_0 = 2$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y - 2 = -1(x - 2)$$

$$y = -x + 4$$

$$f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2. Να βρούμε την εφαπτομένη του f η οποία διέρχεται από το $A(3,1)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow A(3,1)$$

$$1 - f(x) = f'(x)(3 - x)$$

$$1 - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2}(3-x)$$

$$(x-1)^2 - x(x-1) = -(3-x)$$

$$(x-1)(x-1-x) = -3+x$$

$$-(x-1) = -3+x$$

$$-x+1 = -3+x$$

$$-2x = -4$$

$$\underline{\underline{x=2}}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$\boxed{y = -x + 4}$$

3. Να βρεθεί σύμβα του $f(x)$ στο οποίο η εφαπτομένη με είναι παραλλήλη

i) Στην ευθεία $y = -x + 2026$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αναιτω $f'(x_0) = -1$

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

$$(\Rightarrow) 1 = (x-1)^2$$

$$1 = x^2 - 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 2x$$

$$0 = x(x-2)$$

$$x \neq 0$$

$$\boxed{x=2}$$

γιατί

$$A(2, f(2))$$

$$Df = (1, +\infty).$$

11) Στην AB ομοι $A(3, -2)$ $B(4, -3)$

Προτι $f'(x_0) = \lambda_{AB} = \frac{y_0 - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - (-2)}{4 - 3}$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f'(x) = -1$$

$$\cancel{x=0}$$

$$x=2$$

$$A(2, 1/2)$$

4. Η ευθεία εφ' $y = -x + \lambda$ εφαπτεύεται
την $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Βρίω το λ

$$\begin{cases} f'(x) = -1 \\ f(x) = -x + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = -1 \\ x^2 + 2x + 2 = -x + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\lambda = -1 - 2x} \\ x^2 + (-1 - 2x) + 2 = -x - 1 - 2x \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2x^2 + 2 = -3x - 1$$

$$-x^2 - x + 2 + 3x + 1 = 0$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -1$$

$$\lambda = -7$$

$$\lambda = 1$$

Tip

Αν που σουν

$$\text{νδο } y = 2x + 1$$

εφαπτεύεται την $f(x)$

οπκω το $\begin{cases} f'(x) = 2 \\ f(x) = 2x + 1 \end{cases}$ το εκχ
2ω54

5. Μεγάλη προσοχή στα ενδοτάα.

A

x	1	
f'	-	+
f	↘	↗

$f(x) \geq f(1)$

B

x	1	
f''	-	+
f	↘	↗

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$\forall x \leq 1 \text{ u } f \text{ κοίλη}$$

$$f(x) \leq \alpha x + \beta$$

$$\forall x \geq 1 \text{ u } f \text{ κυρτή}$$

$$f(x) \geq \alpha x + \beta.$$

6. Ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^1 x^3 - 2x^2 dx &= \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 2x^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} (x^4)'_0 - \frac{2}{3} (x^3)'_0 = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln(x^2+1) \right)'_0 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\bullet \text{ } \hookrightarrow_{\text{OTW}} f(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{kon Intervall}$$

$$\int_0^1 x^2 f(x^3+2) dx \quad \begin{array}{l} x^3+2 = t \\ \hline 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array}$$

$$= \frac{1}{3} \int_2^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_2^3 (t^3 + t + 1) dt = \text{KTZ.}$$

7. $E \equiv (f, x'x, x=a, x=B)$

$$E = \int_a^B |f(x)| dx$$

$E \equiv (f, x'x, x=a)$

$$E = \int_a^B |f(x)| dx$$

$$\rightarrow f(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \underline{\underline{x=B}}$$

п.х

$$f(x) = x^2 + x + 4$$

$$E \equiv (f, x'x, x=0, x=1)$$

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 |x^2 + x + 4| dx = \int_0^1 x^2 + x + 4 dx = \infty$$

п.х

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

$$E \equiv (f, x'x, x=2, x=3)$$

$$E = \int_2^3 |f(x)| dx = \infty$$

$$2 < x < 3$$

$$f(2) < f(x) < f(3)$$

$$1 < f(x)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

x	-1	1
f'	+	-
f	↗	↘

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & , x > 1 \end{cases}$$

Συνεχώς στο 1

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = 1 \quad \text{αρα} \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ συνεχώς!}$$

Παραγωγισίμη στο 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x - 1} = -1$$

Η f όχι παραγ/μη στο 1.

- Ορίζεται η αριστερή στο 1; ΟΧΙ
- Ικανοποιείται το ΘΜΕΤ στο $[-2, 2]$; ΝΑΙ
- Ικανοποιείται το ΘΕΤ στο $[-2, 2]$; ΝΑΙ
- $f(-2) = 4$ $f(2) = \frac{1}{2}$
- Ικανοποιείται το Βολταίνο στο $[-2, 2]$; ΟΧΙ
- $f(2) \cdot f(-2) > 0$
- Ικανοποιείται το Ρολλέ στο $[-2, 2]$; ΟΧΙ
- Ικανοποιείται το ΘΜΤ στο $[1, 2]$; ΝΑΙ

κριτήρια Σημείων

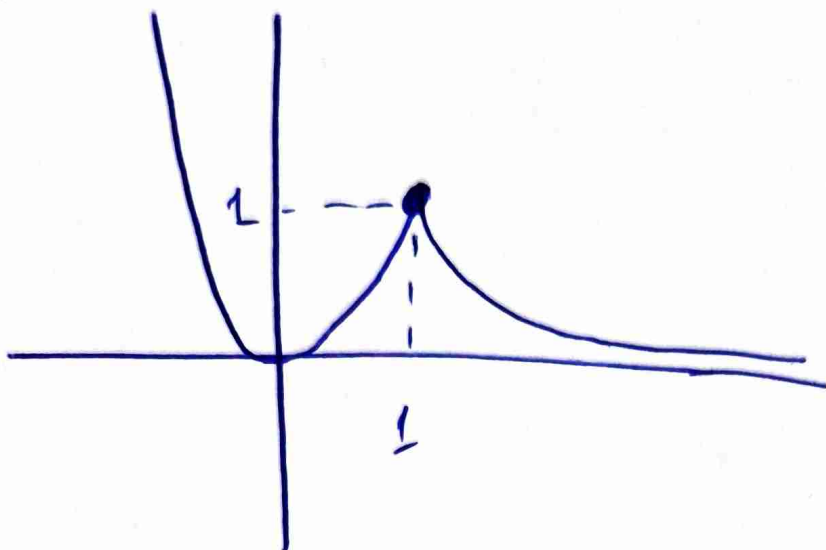
Το $\boxed{x_0 = 1}$ είναι κριτήριο σημείων για τη
δεν είναι παρ/μη στο $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} \underline{x < 1} \\ f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{x = 0} \text{ κ. Σ}$$

$$\begin{aligned} \underline{x > 1} \\ f(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

Σχέδιο Βασικών συναρτήσεων



Πλάνο/ρίων $f(x)=\lambda$

$\lambda > 1$ 1 ρίζα

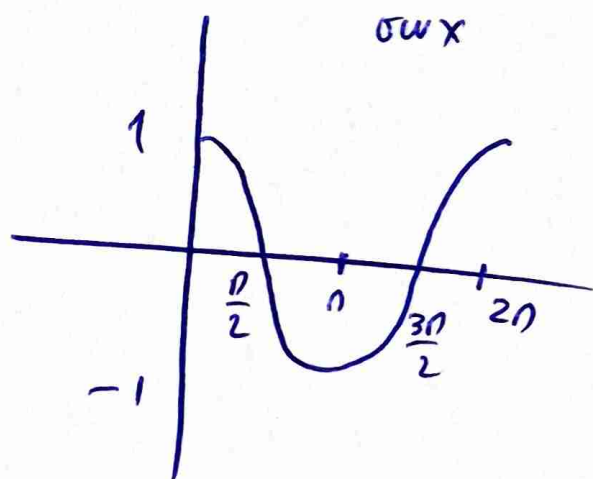
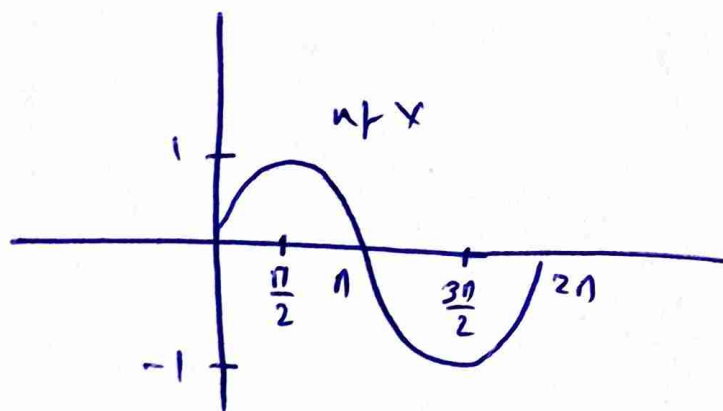
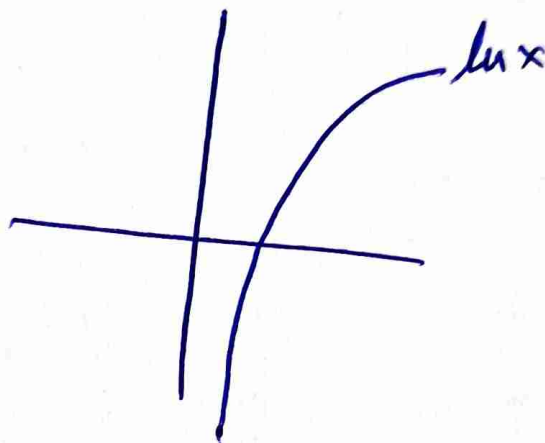
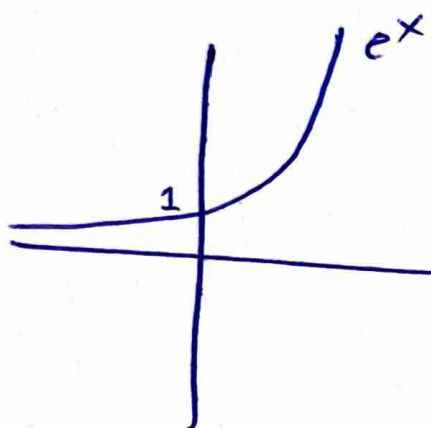
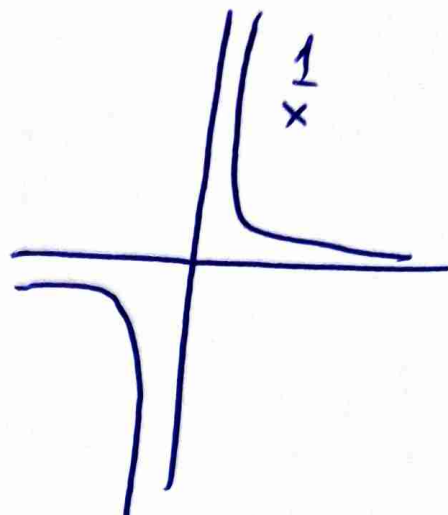
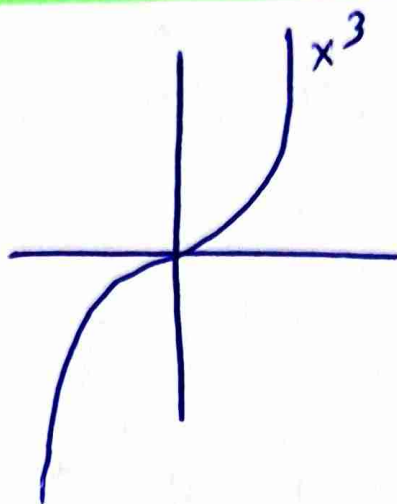
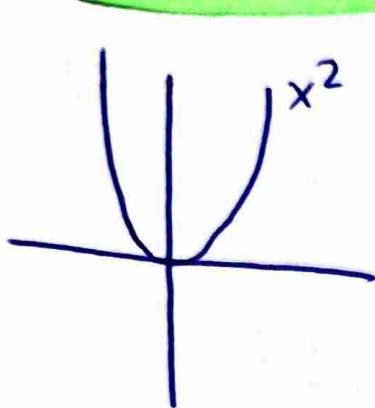
$\lambda = 1$ 2 ρίζες

$0 < \lambda < 1$ 3 ρίζες

$\lambda = 0$ 1 ρίζα.

$\lambda < 0$ 0 ρίζες.

Βασικα συναρτησεις



9. Η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$ παρουσιάζει
στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο.

→ Νόο $\alpha = -6$.

Άρα η f έχει ακρότατο στο 1

Το 1 είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$.

Η f παρ/μη στο 1.

Fermat $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$$

$$f'(1) = 3 + 2\alpha + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 12 = 0$$

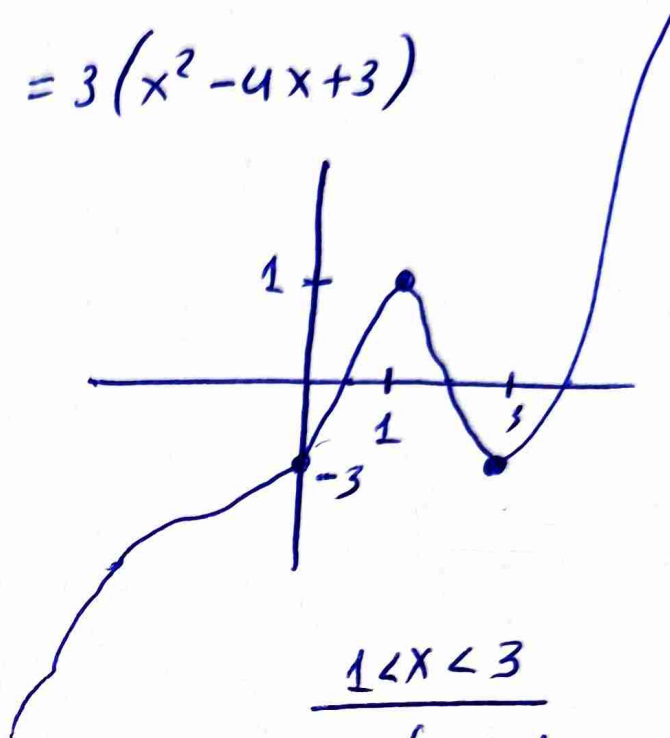
$$\underline{\underline{\alpha = -6}}$$

→ Νόσ η εἰσωση $f(x)=0$ εχῇ
 τρεῖ θετικὴ ριζὴ

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

x	$-\infty$	1	3
f'	+	-	+
f	$-\infty$	-3	-3



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(1) = 1$$

$$f(0) = -3$$

$$f(3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\underline{x \leq 1}$$

• f συνεχῶς

• f ↗

$$\bullet \exists T_f = (-\infty, 1]$$

$$\text{το } 0 \in \exists T_f$$

$$\text{αρα } \exists! \xi_1 \text{ τοῦτο}$$

$$f(\xi_1) = 0$$

$$\text{Εστω } \xi_1 \leq 0$$

$$f(\xi_1) \leq f(0)$$

$$0 \leq -3$$

$$\text{Ατομ } \xi_1 > 0$$

$$\underline{1 < x < 3}$$

• f συνεχῶς

• f ↓

$$\bullet \exists T_f = [-3, 1)$$

$$\exists \xi_2 > 0 \text{ τοῦτο}$$

$$f(\xi_2) = 0$$

$$\underline{x \geq 3}$$

• f συνεχῶς

• f ↗

$$\bullet \exists T_f = [3, +\infty)$$

$$\text{το } 0 \in \exists T_f$$

$$\text{αρα } \exists! \xi_3 \text{ τοῦτο}$$

$$f(\xi_3) = 0$$

10. Opw

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$|x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\Rightarrow \boxed{-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

And K.O $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$$\textcircled{r} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(e^x - 1)}{x} - 1 \right) \\ = +\infty(1 - 1) ;$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$$

Οερα κωλιν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) - \ln e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

$$= \ln 1 = 0.$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^{\cancel{1}}}{x} = 0$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) \stackrel{+\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

$\textcircled{*}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\underline{\underline{\textcircled{*} \quad +\infty(1-0) = +\infty}}$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

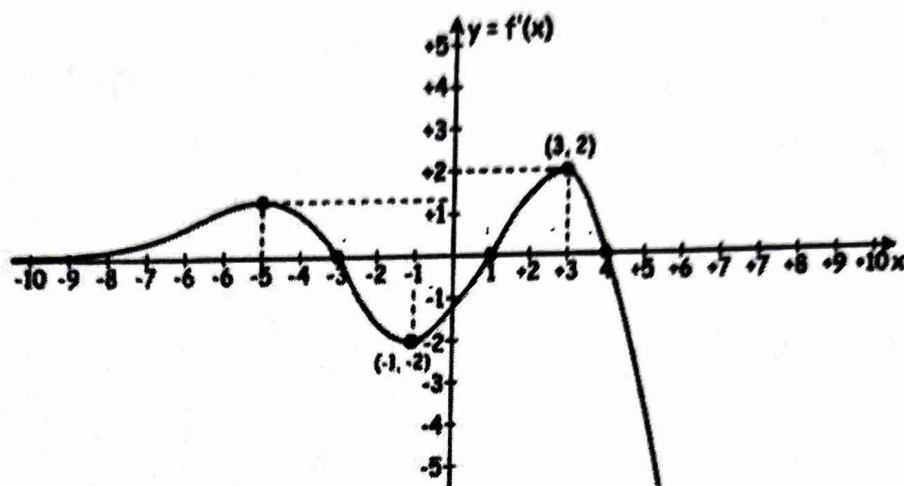
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

11.

Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(-3) = 2$, $f(1) = -1$, $f(4) = 3$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της.

(Μονάδες 5)

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε τις θέσεις των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης C_f .

(Μονάδες 5)

B3. α. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

β. Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f'}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

(Μονάδες 5)

B₁

x	-3	1	4
f'	+	0	0
f	↗	↘	↘

H ≠ γv. αλῶσα

$(-\infty, -3]$ καὶ $[1, 4]$

H ≠ γv. ὑποχώσῃ

$[-3, 1]$ καὶ $[4, +\infty)$.

A(-3, 2) T.M

Γ(1, -1) T.E.

B(4, 3) T.M

B₂

x	-5	-1	3
f'	↗	↘	↘
f	↻	↻	↻

H ≠ κύρση

$(-\infty, -5]$ καὶ $[-1, 3]$

H ≠ κοίτη $[-5, -1]$ καὶ $[3, +\infty)$

Στὴν Δοσὴ -5, -1, 3 ἔχω

Σημὰ κέρση.

B₃ (α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{1} = 0$

(β) Ἀφ'ὃς $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ δὲν εἶναι

πῶς αὐτοῦται. αὐτὴ ἀποφασίζονται

γὰρ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

B4 $E = \int_1^4 |f'(x)| dx = \int_1^4 f'(x) dx$

$$= (f(x))_1^4 = f(4) - f(1) = 3 - (-1) = 4.$$

extra ερωτήσεις.

B5 κρίσιμα σημεία.

Π.Ι.Δ $f'(x) \in -3, 1, 4$

B6 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f'(x) - 2} = -\infty$

κοντά στο 3 « $f'(x) \leq 2 \Rightarrow f'(x) - 2 \leq 0$

B7 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f'(x)}$ το όριο δεν υπάρχει.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{f'(x)} = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

12. Ευρεση Τύπου

α) $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$ Ψάχνω τύπο $f(x)$

Θέτω $x+1=t$
 $x=t-1$ άρα $f(t) = te^{-(t-1)}$

$$f(t) = te^{1-t}$$

$$\boxed{f(x) = xe^{1-x}}$$

β) $f'(x) = e^x + xe^x$, $f(0) = 0$

$$f'(x) = (xe^x)'$$

$$f(x) = xe^x + C$$

$\underline{x=0}$
 $f(0) = C = 0$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = xe^x}$$

γ) $(x-1)f(x) = e^{x-1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, f συνεχής

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}, x \neq 1}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x-1} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

13.

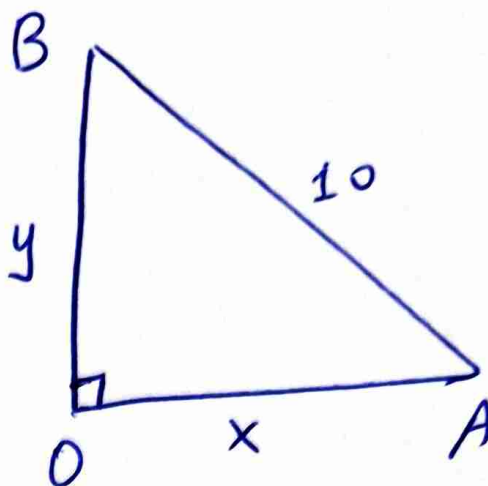
α) Νόμο $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 = 10^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{100 - x^2}$$



β) Μονοτονία - αλγεβρικά

$$f'(x) = \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$$

$f \downarrow$ για $x > 0$

γ) Αν $x_1 = 2,3$, $x_2 = 3,5$ και $x_3 = 2,8$
να συγκρίνουμε $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

$$2,3 < 2,8 < 3,5$$

$$x_1 < x_3 < x_2$$

$$\begin{matrix} f \downarrow \\ f(x_1) > f(x_3) > f(x_2) \end{matrix}$$

14. ^(a) Av $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 10$

και $f(x) = 3x + 1$

Ποια είναι η $g(x)$;

$$\Rightarrow \begin{cases} f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 10 \\ f(g(x)) = 3g(x) + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Μου τα δίνω!} \\ \text{Την απάντησα.} \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 10 = 3g(x) + 1$$

$$3x^2 - 6x + 9 = 3g(x)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

β) Av $(f \circ g)(x) = 3x - 2$ και $g(x) = \frac{x}{x-1}$

Ποια είναι η $f(x)$;

$$\text{Θέτω } g(x) = t \Rightarrow t = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f(x-1) = x$$

$$tx - t = x \Rightarrow tx - x = t \Rightarrow x(t-1) = t$$

$$x = \frac{t}{t-1}$$

$$f(g(x)) = 3x - 2 \Rightarrow f(t) = 3 \frac{t}{t-1} - 2$$

$$f(x) = \frac{3x}{x-1} - 2$$

15. Προσέχει σε αληθή εφαρμογή

1. Bolzano

2. Rolle

3. ΘΜΤ

π.χ Έστω $f(x) = (x-2) \ln x$

α) Νόο η $f(x)$ ικανοποιεί των Rolle στο $(2,0)$

Η $f(x)$ συνεχής $[2,0]$

Η $f(x)$ παρ/κη $(2,0)$

$$f(2) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(2) = f(0) \end{array} \right.$$

} Rolle OK!
 $\exists \xi \in (2,0)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$

β) Νόο η επίσηση $\varphi x = 2 - x$ έχη ρίζα $(2,0)$

$$f'(x) = \ln x + (x-2) \frac{1}{x}$$

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \ln \xi + (\xi - 2) \frac{1}{\xi} = 0 \Rightarrow \frac{\ln \xi}{\xi} + \xi - 2 = 0$$

$$\ln \xi + \xi - 2 = 0 \Rightarrow \ln \xi = 2 - \xi$$