Πασχαλινή

Επαναληψη

Ασκηση 1

Δινεται $f(x) = (x-1)^2 + 2$, $x \leq 1$ και

$g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

ⓐ Νδο f αντιστρεψεται και να βρει $f^{-1}(x)$

ⓑ Βρει την $(g \circ f)(x)$ και $(f \circ g)(x)$.

ⓒ E: C_f, $x'x$, $y'y$, $x=1$.

Λυση

ⓐ $f'(x) = 2(x-1) \leq 0$ $\quad f \downarrow$

Β' τροπος

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2$

$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow |\overset{\ominus}{x_1 - 1}| = |\overset{\ominus}{x_2 - 1}|$

$\Rightarrow -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

f: 1-1.

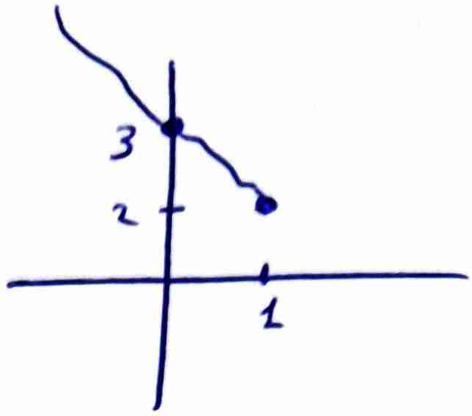
SOS

$x^2 = y^2$

$\Leftrightarrow$

$|x| = |y|$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)^2 + 2 = +\infty$$



$$f(1) = 2$$

$$\operatorname{Im} f = [2, +\infty)$$

$$D_{f^{-1}} = [2, +\infty).$$

$$y = (x-1)^2 + 2$$

$$y - 2 = (x-1)^2$$

$$\sqrt{y-2}^{\,2} = (x-1)^2$$

$$\left|\overset{+}{\sqrt{y-2}}\right| = \left|\overset{-}{x-1}\right|$$

$$\sqrt{y-2} = 1 - x$$

$$x = 1 - \sqrt{y-2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(x) &= 1 - \sqrt{x-2} \\ D_{f^{-1}} &= [2, +\infty) \end{aligned}}$$

(β) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{(x-1)^2+2}$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$x \leq 1$ $\quad (x-1)^2+2 \neq 0$

που είναι!

$D_{g\circ f} = (-\infty, 1]$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{x}-1\right)^2+2$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \neq 0$ $\quad \dfrac{1}{x} \leq 1$

$\dfrac{1}{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{1-x}{x} \leq 0$

x		0		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-x}{x}$	$-$		$+$		$-$

$x \in (-\infty,0)\cup[1,+\infty$

$D_{f\circ g} = (-\infty, 0)\cup[1,+\infty)$

(γ) $E = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 |(x-1)^2+2|\,dx$

$E = \int_0^1 (x-1)^2+2\,dx = \int_0^1 x^2-2x+1+2\,dx$

$E = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 3\,dx$

$E = \frac{1}{3}(x^3)\Big|_0^1 - (x^2)\Big|_0^1 + 3(x)\Big|_0^1$

$E = \frac{1}{3} - 1 + 3 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

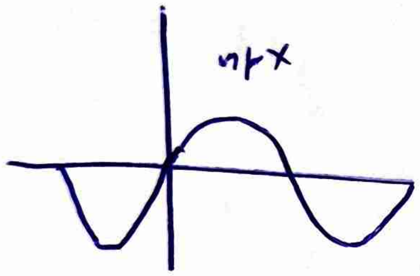
Ασκηση 2

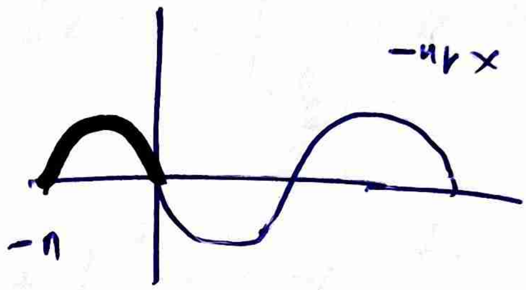
Δινεται $f(x)= \begin{cases} -\eta\mu x \ , & -\pi < x \leq 0 \\ e^{-x}-1 \ , & x>0 \end{cases}$

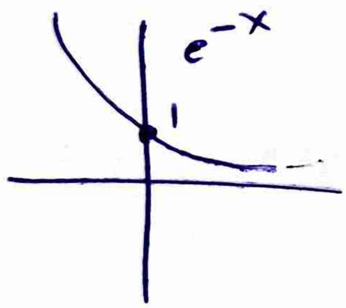
Να βρεις το πληθος ριζων της εξισωσης $f(x)=\lambda$ οπου $\lambda \in R$ αφου πρωτα τη σχεδιασεις.

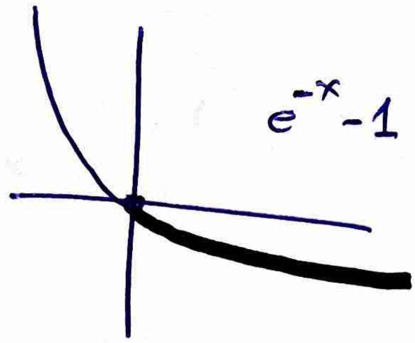
Να βρεις το εμβαδον του χωρου μεταξυ

C_f, $x'x$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=1$.

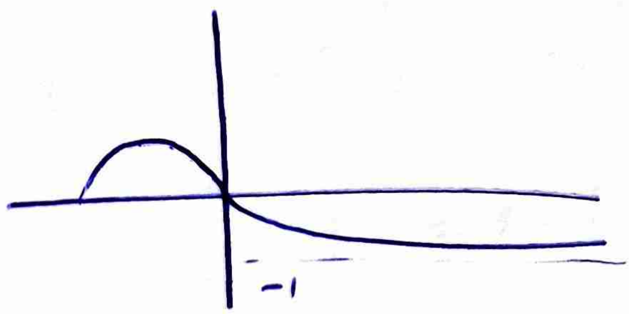




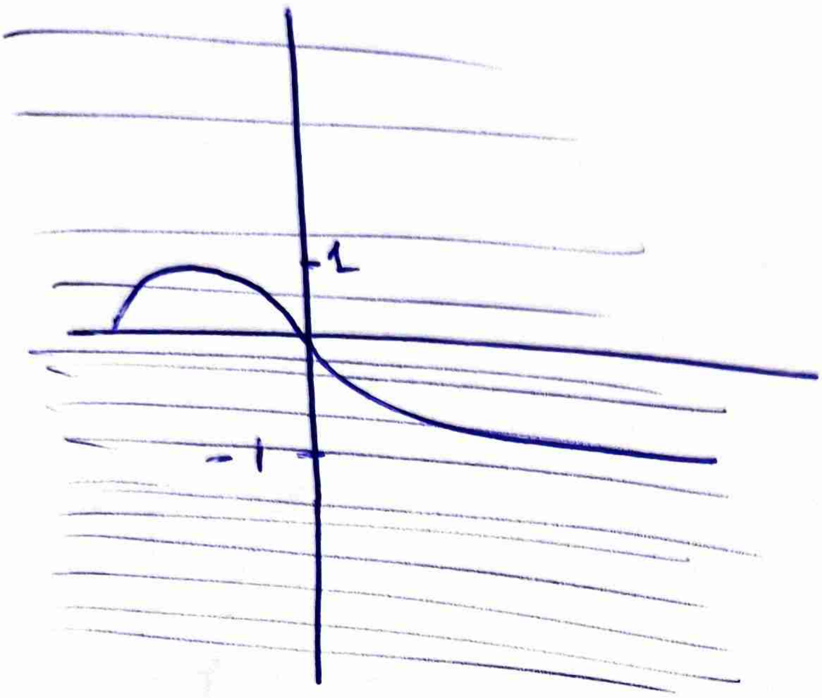




f(x)



Πλήθος ριζών $f(x)=\lambda$



Αν $\lambda \le -1$ 0 ρίζα

Αν $-1<\lambda<0$ 1 ρίζα

Αν $0 \le \lambda < 1$ 2 ρίζες

Αν $\lambda = 1$ 1 ρίζα

Αν $\lambda > 1$ 0 ρίζες.

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} |f(x)|\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |\overset{+}{f(x)}|\, dx + \int_{0}^{1} |\overset{-}{f(x)}|\, dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} -f(x)\, dx =$$

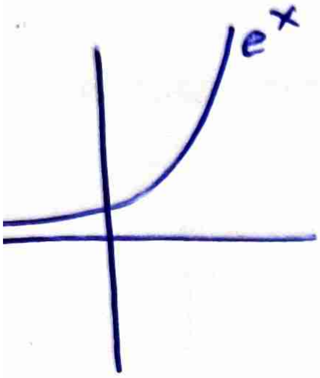
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\eta\mu x\, dx - \int_{0}^{1} e^{-x} - 1\, dx =$$

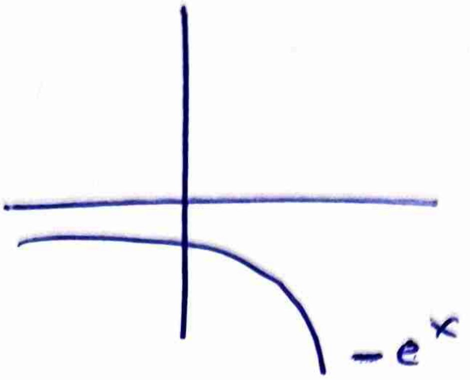
$$= (\sigma\upsilon\nu x)_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{0}^{1} e^{-x}\, dx + \int_{0}^{1} 1\, dx$$

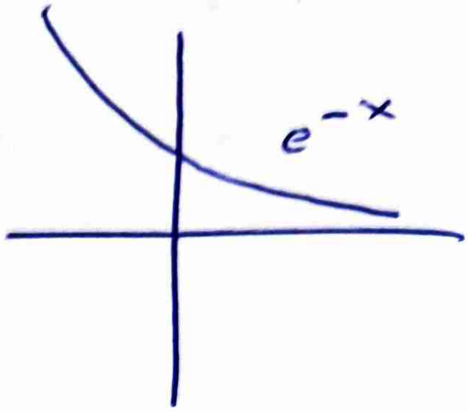
$$= 1 - (-e^{-x})_{0}^{1} + (x)_{0}^{1} = 1 + (e^{-x})_{0}^{1} + 1$$

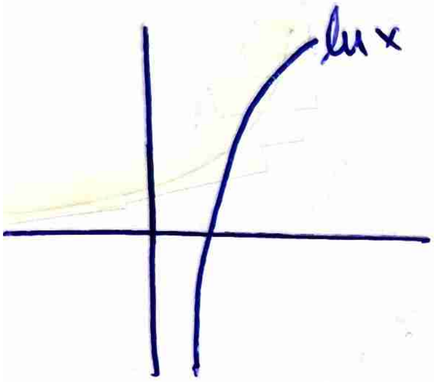
$$= 2 + \frac{1}{e} - 1 = 1 + \frac{1}{e}.$$

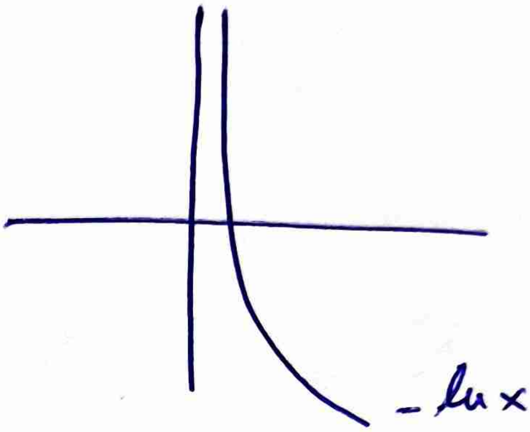
Βασικές συναρτήσεις

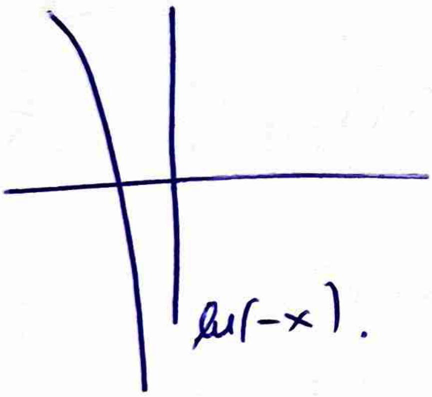


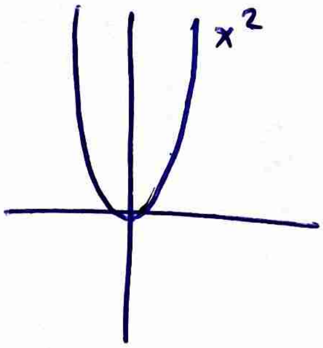


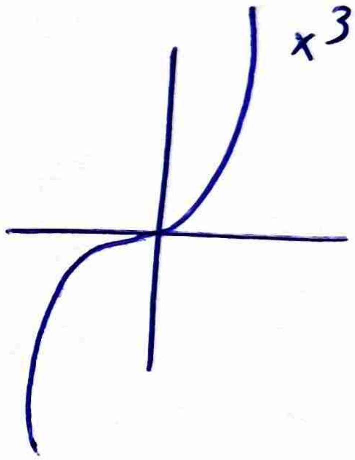


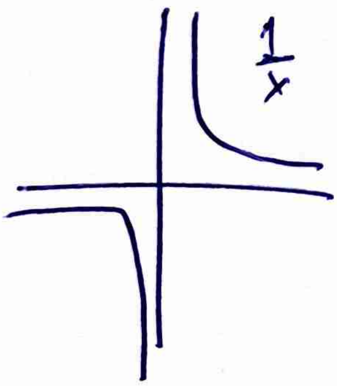




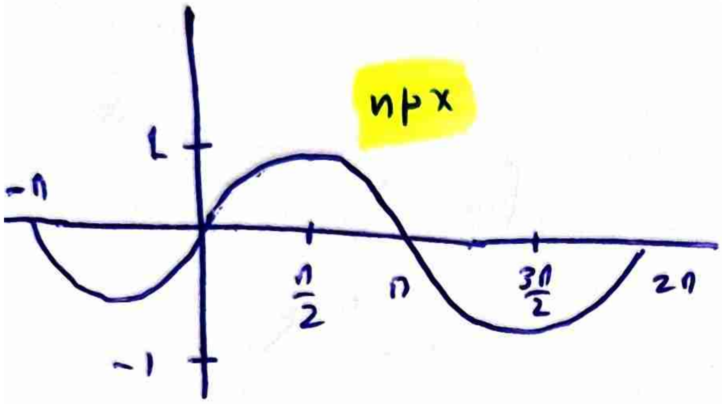


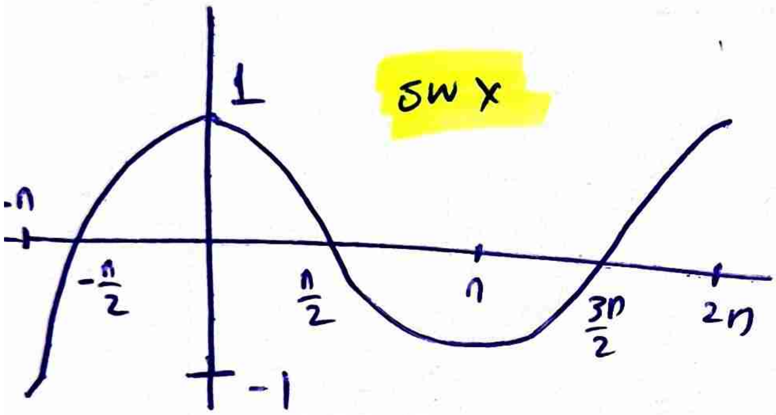






Τριγωνομετρια





x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
ημx	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
σωx	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

Δυο παραπληρωματικι γωνια εχουν μονο ιδιο ημιτονο, τα υπολοιπα αντιθετα.

Βασικη εξισωση

$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ $[0, 2\pi]$

$x = \frac{\pi}{4}$ $\quad x = \frac{5\pi}{4}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Ασκηση 3

Να υπολογιστουν τα παρακατω ορια.

(α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - x\right]$

(β) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}$

(δ) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x}$

(ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - \ln x)$

(ζ) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 \ln x)$

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overset{\ominus}{|x|}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{1}{x}} = -1$

(γ) $\lim\limits_{x\to0} x^2\,\eta\mu\frac{1}{x}$

$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$

$\boxed{-x^2 \le x^2\,\eta\mu\frac{1}{x} \le x^2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} -x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0\end{array}\right\}$ Από Κ.Π $\lim\limits_{x\to0} x^2\,\eta\mu\frac{1}{x} = 0.$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \,ημ\frac{1}{x}$

$$-1 \le ημ\frac{1}{x} \le 1$$

$$\left|ημ\frac{1}{x}\right| \le 1$$

$$|x^3|\left|ημ\frac{1}{x}\right| \le |x^3|$$

$$\left|x^3 ημ\frac{1}{x}\right| \le |x^3|$$

$$\boxed{-|x^3| \le x^3 ημ\frac{1}{x} \le |x^3|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} -|x^3| = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} |x^3| = 0 \end{array}\right\} \text{Από Κ.Π } \lim_{x\to 0} x^3 ημ\frac{1}{x} = 0.$$

(ε) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - \ln x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^3\left(1 - \frac{\ln x}{x^3}\right) = +\infty$

$$\to \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$$

(ζ). $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}} =$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x^4}{2x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2} = 0.$$

Ορια

$$\underbrace{\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}}_{DLH}$$

Ολα τα υπολοιπα θελουν χωρισμο.

$$\frac{0}{\infty} \qquad \frac{\infty}{0} \qquad \frac{a}{\infty}$$

Ειδικη αναφορα

$0 \cdot \infty$ (απο κατω και τουμπα)

$+\infty - \infty$ (κοινο παραγοντα).

Βασικα ορια

$$\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ημx}{x} = 0$$ Θελει αποδειξη

$$\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$$ Θελει αποδειξη

$$\lim_{x \to 0} \frac{συνx - 1}{x} = 0$$

Ασκηση 4

Δινεται η $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 3$, $x > 0$

Εστω $G(x)$ αρχικη της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$.

(α) Νδο η $G(x)$ εχει μοναδικο ακροτατο

(β) Να βρεθει την εφαπτομενη της $f(x)$ η οποια διερχεται απο το $O(0,0)$.

(γ) E: $(C_f, x'x, x=1, x=2$.

(α) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 3$

$\underline{\underline{G'(x) = f(x)}}$

Μονοτονία $G(x)$

$$G'(x) = f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 3$$

$$G''(x) = f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

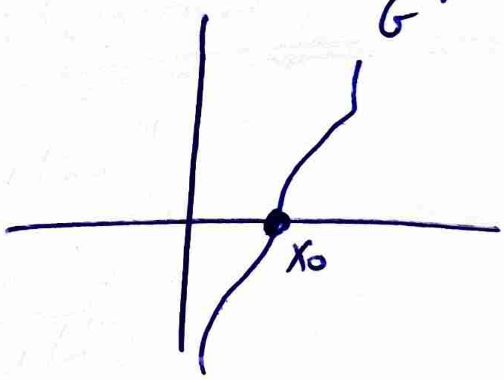
$$\boxed{\text{Αφού } G''(x) > 0 \text{ η } G' \nearrow}$$

Σύνολο τιμών $G'(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} G'(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x - \frac{1}{x} + 3 = -\infty - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} G'(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x - \frac{1}{x} + 3 = +\infty$$

$$\boxed{\Sigma T_{G'} = \mathbb{R}.}$$



- G' συνεχής
- $G' \nearrow$
- $\Sigma T_{G'} = \mathbb{R}$
- Το $0 \in \Sigma T_{G'}$

$\exists!\, x_0$ τ.ω $G'(x_0) = 0$

x		x_0	
G''	$+$		$+$
G'	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
G	$\searrow$		$\nearrow$

(B) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \longrightarrow (0,0)$

$0 - f(x) = f'(x)(0 - x)$

$-f(x) = -x f'(x)$

$f(x) = x f'(x)$

όμως γνωρίζω ότι $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 3$

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$\ln x - \frac{1}{x} + 3 = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

$\ln x - \frac{1}{x} + 3 = 1 + \frac{1}{x}$

$\underbrace{\ln x - \frac{2}{x} + 2}_{\varphi(x)} = 0$ Προφανής ρίζα $x=1$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$

$\varphi \nearrow$ το $x=1$ Μοναδική ρίζα.

ε: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 2 = 2(x-1)$

$\boxed{y = 2x}$.

γ) $E = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 \left| \ln x - \frac{1}{x} + 3 \right| dx \overset{(*)}{=}$

$\boxed{\text{Αφού } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow}$

$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 2$

$\overset{(*)}{=} \int_1^2 \ln x - \frac{1}{x} + 3\,dx = \int_1^2 \ln x\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 3\,dx$

$= \int_1^2 1 \cdot \ln x\,dx - (\ln x)_1^2 + 3(x)_1^2 =$

$= \int_1^2 (x)' \ln x\,dx - (\ln 2 - \ln 1) + 3(2-1)$

$= (x \ln x)_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x}\,dx - \ln 2 + 3$

$= 2\ln 2 - \int_1^2 1\,dx - \ln 2 + 3$

$= 2\ln 2 - (x)_1^2 - \ln 2 + 3$

$= 2\ln 2 - 1 - \ln 2 + 3$

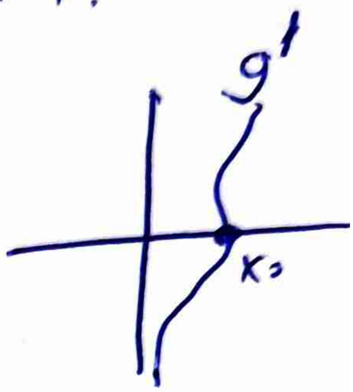
$= \ln 2 + 2.$

Ασκηση 5

Δινεται $g(x)=(x-2)\ln x$

(α) Νδο η C_g εχει μοναδικο ακροτατο.

(β) Νδο υπαρχει μοναδικη εφαπτομενη της C_g η οποια διερχεται απο το $O(0,0)$.



(α) $g'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}=\ln x+1-\dfrac{2}{x}$

$g''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}>0 \Rightarrow g' \nearrow$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+1-\dfrac{2}{x}\right)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} g'(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x+1-\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$

$\Big\}\ \Sigma T g'=\mathbb{R}$.

x		x_0	
g''	$+$		$+$
g'	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
g	$\searrow$		$\nearrow$

• g' συνεχης

• $g' \nearrow$

• $\Sigma T g'=\mathbb{R}$

το $0\in \Sigma T g'$

Αρα $\exists!\ x_0$ τ.ω.

$g'(x_0)=0$

(B) $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \longrightarrow (0,0)$

$$0 - g(x) = g'(x)(0 - x)$$

$$-g(x) = -x\,g'(x)$$

$$g(x) = x\,g'(x)$$

$$(x-2)\ln x = x\cdot\left(\ln x + 1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$\cancel{x\ln x} - 2\ln x = \cancel{x\ln x} + x - 2$$

$$\underbrace{2\ln x + x - 2}_{\varphi(x)} = 0$$

$\varphi'(x) = 2\cdot\frac{1}{x} + 1 > 0 \quad \varphi \nearrow$

<u>Σύνολο Τιμών $\varphi(x)$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty \end{array}\right\} \Sigma T_\varphi = \mathbb{R}.$$

- $\varphi(x)$ συνεχής
- $\varphi \nearrow$
- $\Sigma T_\varphi = \mathbb{R}$

Το $0 \in \Sigma T_\varphi$

άρα $\exists!\, x_0$ τ.ω. $\varphi(x_0) = 0$

Συνεπώς υπάρχει μοναδική εφαπτ.

Ασκηση 6

Δινεται $f(x) = \begin{cases} x^2-2, & x<0 \\ (x-2)e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

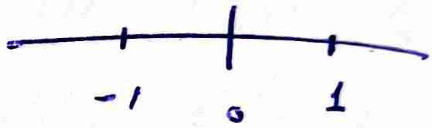
(α) Ικανοποιει τα ΘΜΤ στο $[-1,1]$;

(β) κρισιμα σημεια.

(γ) Συνολο Τιμων.

(δ) Ε: C_f, $x'x$, $x=-1$, $x=1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-2) = -2$$



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-2)e^x = -2$$

Αρα $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$ και $f(0) = -2$ Συνεχης στο 0.

$\boxed{\text{Η } f \text{ συνεχης στο } [-1,1] \text{ ως π.σ.σ}}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2+2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x-2)e^x+2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+(x-2)e^x}{1} = -1$$

Η $f(x)$ δεν είναι παρ/μη στο 0.

Άρα δεν ικανοποιείται το ΘΜΤ στο $[-1,1]$

(β) Το 0 είναι κρίσιμο σημείο γιατί η $f(x)$ δεν παραγωγίζεται εκεί.

$\underline{x<0}$

$f_1(x)=x^2-2$

$f_1'(x)=2x<0$

$\underline{x>0}$

$f_2(x)=(x-2)e^x$

$f_2'(x)=e^x+(x-2)e^x$

$f_2'(x)=e^x(1+x-2)$

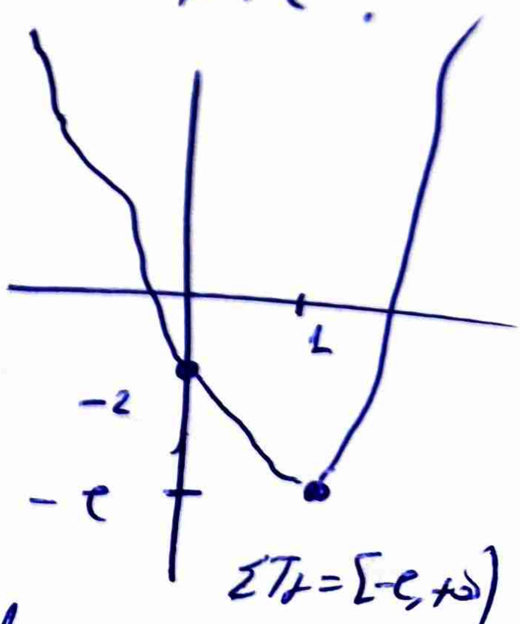
$f_2'(x)=e^x(x-1)$

$x=1$

Κ.Σ.

(γ).

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f_1'	$-$				
f_2'			$-$	0	$+$
f'	$-$		$-$		$+$
f	$+\infty$ ↘		↘		↗



$\Sigma T_f=[-e,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2=+\infty$

$f(0)=-2$ $\quad f(1)=-e$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

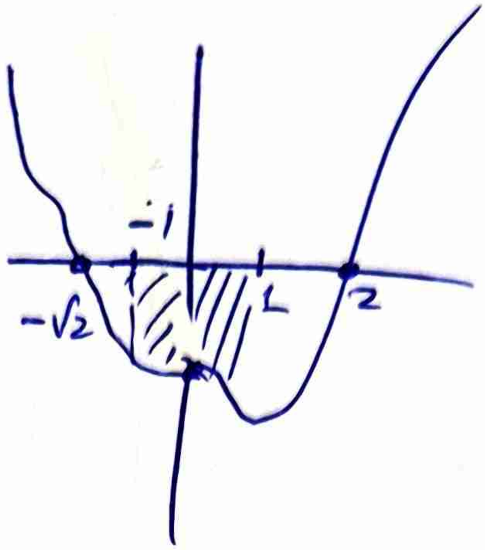
(5) $E = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{0} |f(x)|\, dx + \int_{0}^{1} |f(x)|\, dx$

- $\underline{\text{Για } x<0}$

$f(x)=0$

$x^2-2=0$

$\underline{x=-\sqrt{2}}$



$\underline{\text{Για } x>0}$

$f(x)<0$

$(x-2)e^x=0$

$\underline{x=2}$

$E = -\int_{-1}^{0} x^2-2\, dx - \int_{0}^{1} (x-2)e^x\, dx$

$E = -\int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{-1}^{0} 2\, dx - I$

$E = -\frac{1}{3}\left(x^3\right)_{-1}^{0} + 2\left(x\right)_{-1}^{0} - I.$

$E = -\frac{1}{3} + 2 - I$

$E = \frac{5}{3} - I = \frac{5}{3} + 3 - 2e.$

$I = \int_{0}^{1} (x-2)e^x\, dx = \int_{0}^{1} (x-2)(e^x)'\, dx$

$I = \left((x-2)e^x\right)_{0}^{1} - \int_{0}^{1} e^x\, dx = -e+2-\left(e^x\right)_{0}^{1}$

$I = 2-e-(e-1) = 3-2e$

Ασκηση 7

Δινεται f συνεχης στο $\mathbb{R}$ ωστε

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 3$$

Να βρεθει η εφαπτομενη στο 1.

Θεωρω $\frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = g(x) \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \to 1} g(x) = 3}$

$$\boxed{f(x) = g(x)(x-1) + \sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x)(x-1) + \sqrt{x+3}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \cdot (1-1) + \sqrt{1+3}$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ αφου f συνεχης $f(1) = 2$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)(x-1) + \sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \to 1} g(x) + \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$f'(1) = \frac{13}{4}$

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 2 = \frac{13}{4}(x-1)$

$4y - 8 = 13x - 13$

$\boxed{13x - 4y - 5 = 0}$

Ασκηση 8

Η ευθεια $\varepsilon: y=\alpha x+1$ εφαπτεται την $f(x)=\beta x^2-\alpha x+2$ στο $x_0=-1$.

Να βρεθουν τα α, β.

$$\begin{cases} f'(-1)=\alpha \\ f(-1)=\alpha\cdot(-1)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta-\alpha=\alpha \\ \beta+\alpha+2=-\alpha+1 \end{cases}$$

$$\boxed{f'(x)=2\beta x-\alpha}$$

$$\begin{cases} -2\beta=2\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha=-\beta}} \\ \beta+2\alpha+1=0 \end{cases}$$

$$\beta-2\beta+1=0$$

$$\beta=1$$

$$\alpha=-1$$

Σχολιο

Η $y=\alpha x+\beta$ εφαπτεται την $f(x)$ στο $A(x_0, f(x_0))$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} f'(x_0)=\alpha \\ f(x_0)=\alpha x_0+\beta. \end{cases}$

Ασκηση 9

Οι συναρτησεις $f(x) = κx^2 - 2λx + κ$ και $g(x) = x^3 - x + λ$ εχουν στο $x_0 = 1$ κοινη εφαπτομενη. Βρειτε κ, λ.

$$\begin{cases} f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2κ - 2λ = 2 \Rightarrow \boxed{κ - λ = 1} \\ f(1) = g(1) \Rightarrow κ - 2λ + κ = 1 + λ - 1 \end{cases}$$

$$\boxed{2κ - 3λ = -1}$$

$f'(x) = 2κx - 2λ$

$g'(x) = 3x^2 - 1$

$$\begin{cases} κ - λ = 1 \Rightarrow -2κ + 2λ = -2 \\ 2κ - 3λ = -1 \end{cases} \oplus$$

$-λ = -3$

$λ = 3$

$κ = 4$

Σχολιο

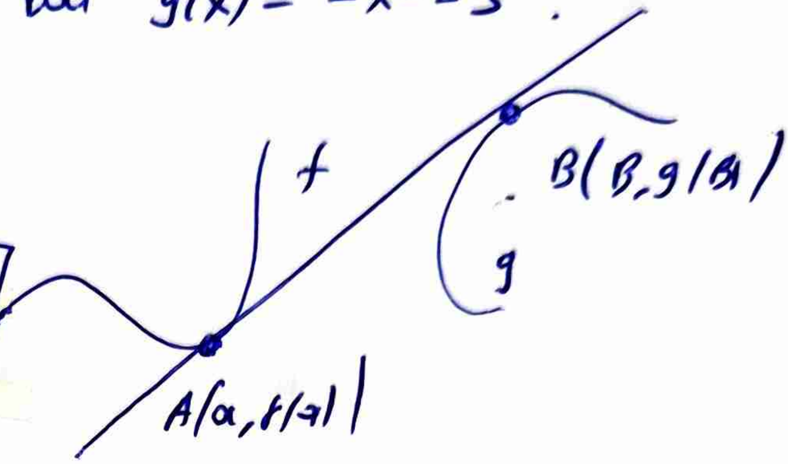
Οι C_f και C_g εχουν κοινη εφαπτομενη στο κοινο τους σημειο $A(x_0, y_0)$.

$$\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0). \end{cases}$$

Άσκηση 10

Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες

των $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = -x^2 - 5$.



$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

$$\boxed{y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)}$$

$y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta)$

$$\boxed{y = g'(\beta)(x-\beta) + g(\beta)}$$

$$\begin{cases} y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha) \\ y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$$

Πρόκειται για την ίδια ευθεία

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases}$$

$f(x) = x^2 - 2x$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 - 5$

$f'(x) = 2x - 2$ $\qquad$ $g'(x) = -2x$

$$\begin{cases} 2a-2=-2\beta \Rightarrow a-1=-\beta \Rightarrow \boxed{a+\beta=1} \\ a^2-2a-a\cdot(2a-2)=-\beta^2-5-\beta(-2\beta) \end{cases}$$

$$a^2-\cancel{2a}-2a^2+\cancel{2a}=-\beta^2-5+2\beta^2$$

$$-a^2=\beta^2-5$$

$$5=a^2+\beta^2$$

$$\beta=1-a$$

$$5=a^2+(1-a)^2$$

$$5=a^2+1-2a+a^2$$

$$2a^2-2a-4=0$$

$$a^2-a-2=0$$

$$a=2 \qquad \beta=-1$$

$$a=-1 \qquad \beta=2$$

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \qquad y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$$

Ασκηση 11

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + a - 1, & x > 1 \\ e^{x-1} + \beta x - \beta, & x \leq 1 \end{cases}$$ παρ/μη.

Να βρεθουν τα a, β και στη συνεχεια να βρεθει η εφαπτομενη της C_f στο $x_0 = 1$ καθως και η γωνια που σχηματιζει με τον $x'x$.

Αφου η f παρ/μη ειναι και συνεχ.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{x-1} + \beta x - \beta = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln x + a - 1 = a - 1$$

$a - 1 = 1$

$\boxed{a = 2}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}+Bx-B-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}+B}{1} = \underline{\underline{1+B}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x+1-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \underline{\underline{1}}$$

$$1+B=1 \quad \underline{\underline{\Rightarrow B=0}}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \ln x+1, & x>1 \\ e^{x-1}, & x\le 1 \end{cases}}$$

$$y-f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$y-1 = 1\cdot(x-1)$$

$$\boxed{y=x}$$

Αφου η κλιση ειναι 1.

εφ45 = 1   45

Ασκηση 12

Δινεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγισιμη και $f(x) \neq 0$

η οποια τεμνει τον $y'y$ στο 1.

ⓐ Αν $\int_{f(\kappa)}^{f(\lambda)} f(x)\, dx = 0$ νδο $\exists \xi \in (\kappa, \lambda)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$.

ⓑ Αν $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{2x}{x^2+1} = 1$ να βρειτε

τυπο της $f(x)$

ⓒ Νδο η εξισωση $e^{3-x}(x^2+1) = 1$

εχει ακριβως μια λυση.

(α) Αφου $f(x) \neq 0$ και συνεχής.

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Αφου τεμνει τον $y'y$ στο 1

$\Rightarrow f(0) = 1$ αρα $\underline{\underline{f(x) > 0}}$

Αφου η $f(x)$ ειναι συνεχης εχει παραγουσα.

Εστω $G(x)$ παραγουσα της $f(x)$.

$$\int_{f(\kappa)}^{f(\lambda)} f(x)\,dx = 0$$

$$\Big(G(x)\Big)_{f(\kappa)}^{f(\lambda)} = 0$$

$$G(f(\lambda)) - G(f(\kappa)) = 0$$

$$G(f(\lambda)) = G(f(\kappa))$$

ομως $G'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow G \nearrow \Rightarrow G$ 1-1

$$G(f(\lambda)) = G(f(\kappa))$$

$$G \text{ είναι } 1-1$$

$$f(\lambda) = f(\kappa),$$

Rolle

$$\exists\, \xi \in (\kappa, \lambda) \text{ τ.ω } f'(\xi) = 0.$$

(B) $$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{2x}{x^2+1} = 1$$

$$\left(\ln f(x) + \ln(x^2+1)\right)' = (x)'$$

$$\ln f(x) + \ln(x^2+1) = x + c.$$

$$\underline{x=0}$$

$$\ln f(0) + 0 = c.$$

$$\underline{\underline{c=0}}$$

$$\ln f(x) + \ln(x^2+1) = x$$

$$\ln f(x)(x^2+1) = x$$

$$f(x)(x^2+1) = e^x$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$

(γ) $e^{3-x}(x^2+1)=1$

$e^{3-x}=\frac{1}{x^2+1}$

$\frac{e^3}{e^x}=\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow e^3=\frac{e^x}{x^2+1}$

$f(x)=e^3$

$\boxed{f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}}$

$f'(x)=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$

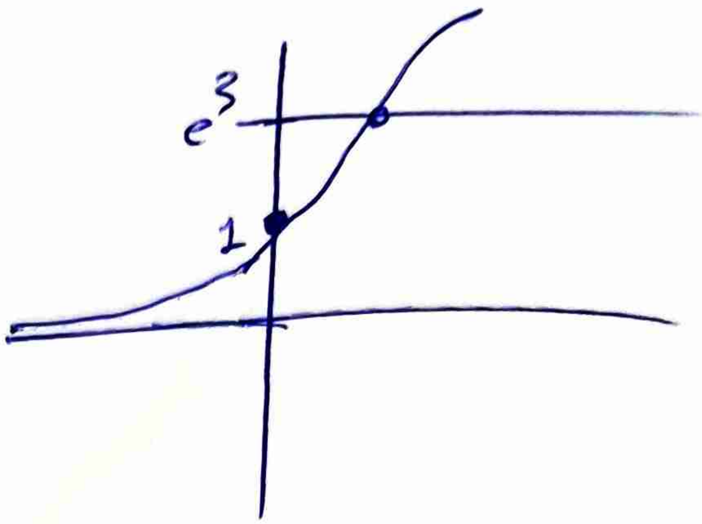
$f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\geq 0 \qquad f \nearrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty} e^x\frac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}$

$=+\infty.$

$\Sigma T_f = (0, +\infty)$



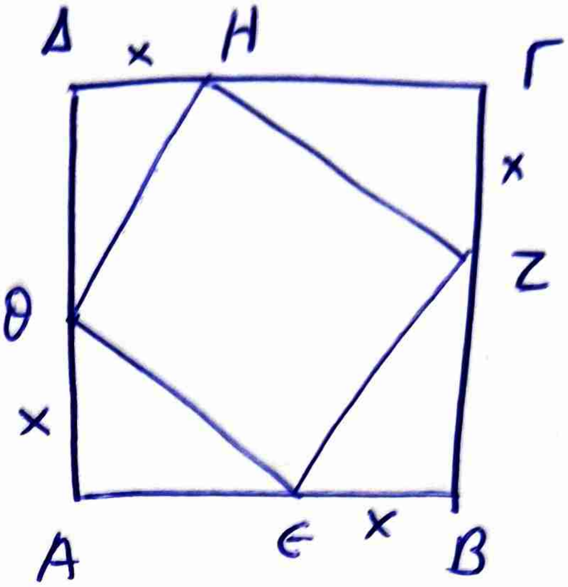
- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = (0, +\infty)$

το $e^3 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists !\, x_0$ τω $f(x_0) = e^3$.

Ασκηση 13

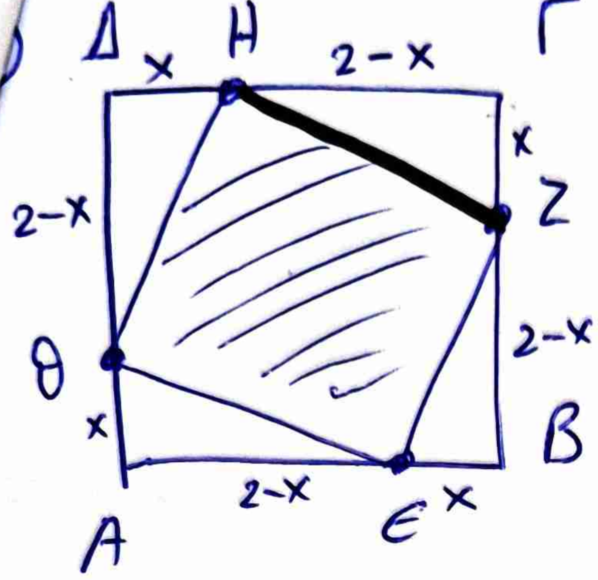
Η πλευρα του τετραγωνου ΑΒΓΔ ειναι 2cm



ⓐ Νδο το εμβαδον του τετραγωνου ΗΘΕΖ ειναι $f(x)=2x^2-4x+4$ $x\in[0,2]$.

ⓑ Να βρει το x ωστε το εμβαδον του τετραγωνου ΘΗΖΕ να γινεται μεγιστο.

ⓒ Νδο δεν υπαρχει $x_0 \in [0,2]$ τ.ω. το εμβαδον να ισουται με $4e^{x_0}+1$ cm^2.



$$HZ^2 = x^2 + (2-x)^2$$

$$HZ^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2$$

$$E_{ΘΕΖΗ} = 2x^2 - 4x + 4$$

$$\boxed{f(x) = 2x^2 - 4x + 4 \quad x \in [0,2]}$$

(B) $f'(x) = 4x - 4$

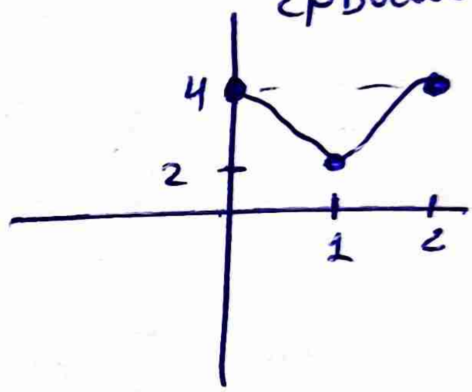
$\rightarrow 4x - 4 = 0$

$4x = 4$

$x = 1$

x	0	1	2
f'	−	+	
f	↘	↗	

Συναρτηση εμβαδου



$f(0) = 4$

$f(1) = 2$

$f(2) = 4$.

Για $x = 0$ ή $x = 2$ εχω μεγιστο εμβαδον

Για $x = 1$ εχω ελαχιστο εμβαδον.

$ΣΤ_f = [2,4]$.

①

$$0 \leq x_0 \leq 2$$

$$e^0 \leq e^{x_0} \leq e^2$$

$$1 \leq e^{x_0} \leq e^2$$

$$4 \leq 4e^{x_0} \leq 4e^2$$

$$5 \leq 4e^{x_0}+1 \leq 4e^2$$

Αφου $4e^{x_0}+1 \geq 5$

το $4e^{x_0}+1 \notin \Sigma T_f$.

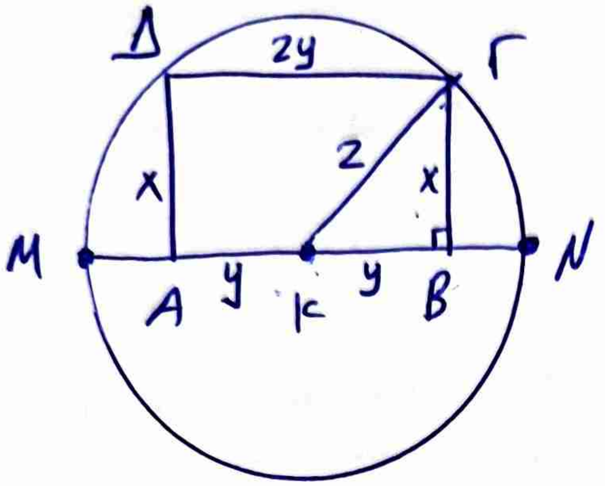
αρα το εμβαδον

δεν μπορει να παρει

την τιμη αυτη.

Ασκηση 14

$MN = 4$



ⓐ Νδο το $E_{ΑΒΓΔ}$ ορθογωνιου $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$

$x \in (0,2)$

ⓑ Βρει x, y ωστε το εμβαδον να γινει μεγιστο

ⓒ Βρει το x ωστε $E(x) = 2\sqrt{3}$

ⓓ Νδο η $f(x) = \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^{x}$, $x \in (0,2)$

εχει ενα τουλαχιστον κρισιμο

σημειο στο $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

α) $E_{ΑΔΓΝ} = x \cdot 2y = 2x\sqrt{4-x^2}$

$$x^2+y^2=2^2$$

$$x^2+y^2=4$$

$$y^2=4-x^2$$

$$\boxed{y=\sqrt{4-x^2}}$$

$$E(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

$$E(x) = 2\sqrt{x^2}\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{x^2(4-x^2)}$$

$$\boxed{E(x) = 2\sqrt{4x^2-x^4} \quad x\in(0,2).}$$

β) $E'(x) = \cancel{2}\dfrac{4x-4x^3}{\cancel{2}\sqrt{4x^2-x^4}} = 4\dfrac{x(1-x^2)}{\sqrt{4x^2-x^4}}$

$E'(x)=0 \Rightarrow x(1-x^2)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

x	0	1	2
E'	+	0	−
E	↗		↘

Για $x=1$ εχω μεγιστο εμβαδον $y=\sqrt{3}$.

(γ) $E(x) = 2\sqrt{3}$

$$\cancel{2}\sqrt{4x^2 - x^4} = \cancel{2}\sqrt{3}$$

$$4x^2 - x^4 = 3$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$\boxed{\text{Θέτω } x^2 = t}$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$t = 3$ $\qquad$ $t = 1$

$x^2 = 3$ $\qquad$ $x^2 = 1$

$x = \sqrt{3}$ $\qquad$ $x = 1$

$E(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ $\qquad$ $E(1) = 2\sqrt{3}$.

(δ) Σου λέει νδο η f' έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

$$f(\sqrt{3}) = (\underbrace{\varepsilon(\sqrt{3})}_{\downarrow\, 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3})\, e^{\sqrt{3}} = 0$$

$$f(1) = (\underbrace{\varepsilon(1)}_{\downarrow\, 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3})\, e^{1} = 0$$

Άρα $f(\sqrt{3}) = f(1)$

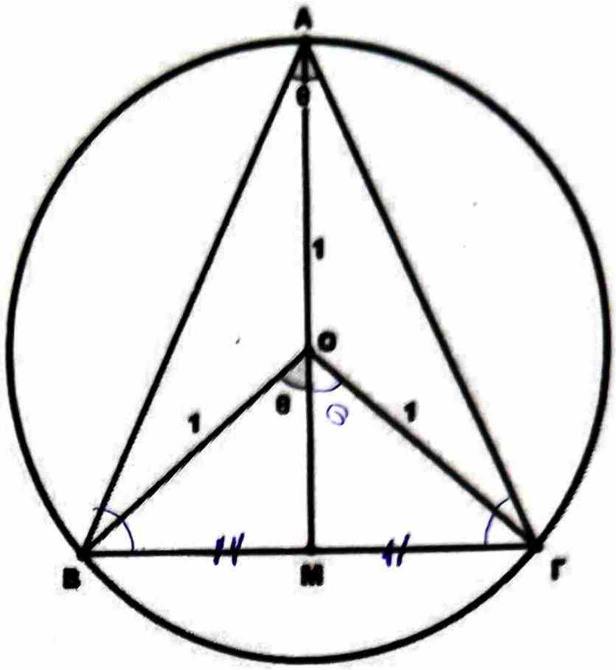
Rolle

$\exists\, \xi \in (1, \sqrt{3})$ τ.ω

$$f'(\xi) = 0$$

Ασκηση 15

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M = \theta$, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:
$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta,\ \theta \in (0, \pi)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2, με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2, του ερωτήματος Γ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x\ell nx - \ell n(\lambda x), \quad x \in (0, +\infty),\ \lambda \in (0, +\infty) \text{ και}$$
$$g(x) = x^x,\quad x \in (0, +\infty).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f , καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ1 $E_{AB\Gamma} = \dfrac{B \cdot u}{2} = \dfrac{B\Gamma \cdot AM}{2}$

- $\eta\mu\hat{\theta} = \dfrac{BM}{1} \Rightarrow \eta\mu\hat{\theta} = BM$

άρα $B\Gamma = 2BM = 2\eta\mu\theta$ $\boxed{B\Gamma = 2\eta\mu\theta}$

- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{OM}{1} \Leftrightarrow OM = \sigma\upsilon\nu\theta$

όμως $AM = OM + 1 = \sigma\upsilon\nu\theta + 1$

$$\boxed{AM = \sigma\upsilon\nu\theta + 1}$$

$$E_{AB\Gamma} = \frac{2\eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{E = \eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)}}$$

Γ2 $E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta + 1) - \eta\mu\theta\,\eta\mu\theta$

$E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu^2\theta$

$E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta$

$$\boxed{E'(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1}$$

$E'(\theta)=0$

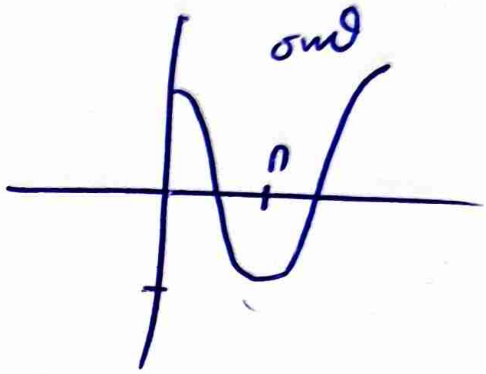
$2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$ $\qquad \theta \in (0,\pi).$

$\sigma\upsilon\nu\theta = t$

$2t^2+t-1=0$

$\Delta = 1+8 = 9$

$t = \dfrac{-1\pm 3}{4} = \dfrac{1}{2} \quad -1$



$t=\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $t=-1$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu\theta = -1$

$\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\theta = \pi$

$\dfrac{\pi}{3}$

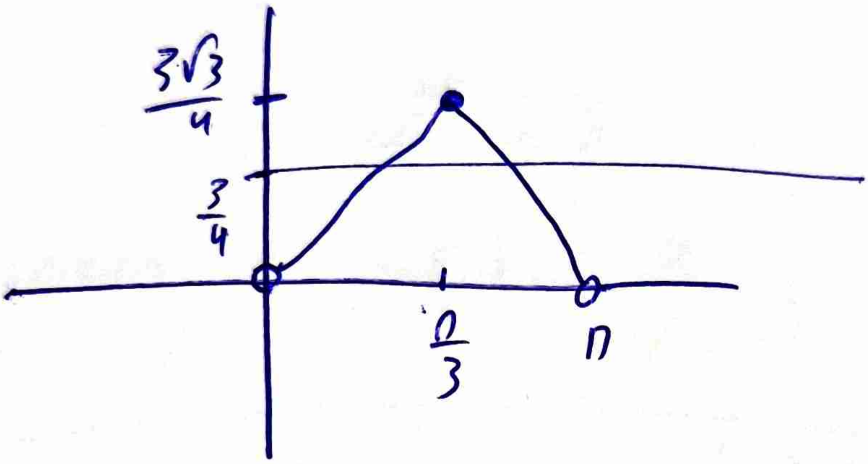
θ	0		$\pi/3$		π
E'		$+$	0	$-$	
E	0	$\nearrow$		$\searrow$	

Για $x=\dfrac{\pi}{3}$ μέγιστο εμβαδόν.

Γ3 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} E(\theta) = 0$

$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\lim\limits_{\theta\to \pi^-} E(\theta) = 0$.



$x < \frac{\pi}{3}$

E συνεχής

$E \nearrow$

$ΣΤ_E = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

Το $\frac{3}{4} \in ΣΤ_E$

άρα $\exists!\ \theta_1$

τ.ω $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$

$x \geq \frac{\pi}{3}$

E συνεχής

$E \searrow$

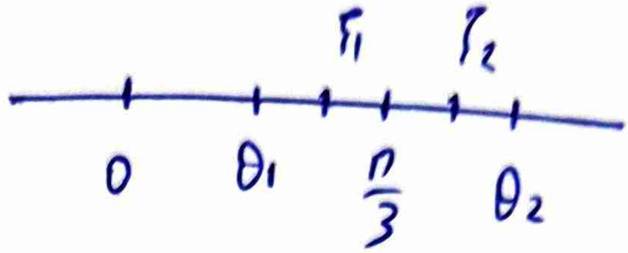
$ΣΤ_E = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

Το $\frac{3}{4} \in ΣΤ_E$

άρα $\exists!\ \theta_2$

τ.ω $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

Γ4



$$E'(\xi_1) = \frac{E(\frac{\pi}{3}) - \epsilon(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} = \frac{\epsilon(\frac{\pi}{3}) - \frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1}$$

$$\epsilon'(\xi_2) = \frac{\epsilon(\theta_2) - \epsilon(\frac{\pi}{3})}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{3}{4} - \epsilon(\frac{\pi}{3})}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{\epsilon'(\xi_2)\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} - \epsilon\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\epsilon'(\xi_1)\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = \epsilon\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\epsilon'(\xi_1)\left(\theta_1 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} - \epsilon\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\epsilon'(\xi_2)\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \epsilon'(\xi_1)\left(\theta_1 - \frac{\pi}{3}\right)$$