ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026

Β΄ ΦΑΣΗ

ε)

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

Α3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ .

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μικρότερο από τα τοπικά της ελάχιστα είναι και το ολικό της ελάχιστο. Λ

(β) Το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Σ

(γ) Αν f', g' συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)g'(x)dx$$ Σ

(δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της

Λ

(ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0\}$, ισχύει $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$. ε

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } f(x)=\frac{x+1}{x-1} \text{ και } g:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } g(x)=\ln x$$

Β1. Να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$

Μονάδες 5

Αν $\varphi(x)=(g\circ f)(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), x>1$ τότε

Β2. Να δείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Μονάδες 6

Β3. **(i)** Να αποδείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και να βρείτε την φ^{-1}

Μονάδες 5

(ii) Αν $\varphi^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}, x>0$ να βρείτε την κατακόρυφη και την οριζόντια ασύμπτωτη της φ^{-1}

Μονάδες 4

Β4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\alpha xe^x-\beta e^x, x\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στην ευθεία $y=-x-2$ στο σημείο της $A(0,f(0))$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$

Μονάδες 6

Γ2. **(i)** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $x^3+3x+6<6e^x-3xe^x$

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο .

Μονάδες 6

Έστω x_1 η θέση του τοπικού μεγίστου και x_2 η θέση του τοπικού ελαχίστου

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\left(\int_{x_1}^{0}xf''(x)dx\right)\cdot\left(\int_{0}^{x_2}xf''(x)dx\right)>0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=xe^x+\ln x$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $A(x_1,f(x_1))$

Μονάδες 6

Αν για την ρίζα x_0 της συνάρτησης f και την τετμημένη x_1 του σημείου καμπής ισχύουν $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx \neq 0$ και $x_0 < x_1$

Δ3 **(i)** Να αποδείξετε ότι $e^{x_0} + 2\ln x_0 > 0$

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x_1)-F(x_0)}{(2x_0)^x}$, όπου F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < x_0$ ισχύει : $f(x) < (x-x_0)\cdot f'(x_1)$

Μονάδες 5

B1 $(g \circ f)(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$\underline{\underline{x > 1}}$ $\quad \frac{x+1}{x-1} > 0$

x		-1		1	
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$D_{g\circ f} = (1, +\infty)$

B2 $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{x+1} \; \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$

$\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{+}} < 0$

$\varphi \downarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} (x+1)\dfrac{1}{x-1} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ $\qquad \Sigma T_\varphi = (0, +\infty)$.

B3 i/ Αφού φ ↓ είναι 1-1 άρα αντιστρέψιμη.

$$y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Leftrightarrow e^y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$e^y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow e^y x - e^y = x+1$$

$$e^y x - x = e^y + 1 \Rightarrow x(e^y - 1) = e^y + 1$$

$$x = \frac{e^y+1}{e^y-1} \qquad \varphi^{-1}(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$$D_\varphi = (0, +\infty)$$

ii/. $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x+1)\dfrac{1}{e^x-1} = 2\cdot +\infty = +\infty$.

$\boxed{\varepsilon: x = 0}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi^{-1}(x) = \underline{1}$

$\boxed{\varepsilon_1 : y = 1 \quad +\infty}$

B4 $E = \int_1^e |g(x)|\,dx = \int_1^e \overset{+}{|\ln x|}\,dx =$

$\to g(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

$\forall x > 1$ το $\ln x > 0$

$= \int_1^e \ln x\,dx =$

$= \int_1^e (x)'\ln x\,dx =$

$= (x\ln x)_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx = e - (x)_1^e = 1$

Γ1 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha x e^x - \beta e^x \quad , x \in \mathbb{R}$

Η $y = -x - 2$ ειναι εφαπτομενη στο 0

$$\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f(0) = -0 - 2 \quad \Rightarrow f(0) = -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + \alpha e^x + \alpha x e^x - \beta e^x$$

$$f'(0) = \boxed{\alpha - \beta = -1}$$

$$f(0) = -\beta = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\beta = 2}} \qquad \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + xe^x - 2e^x}$$

Γ2 i) $f'(x) = x^2 + e^x + xe^x - 2e^x$

$$\boxed{f'(x) = x^2 + xe^x - e^x}$$

$$f''(x) = 2x + e^x + xe^x - e^x$$

$$f''(x) = 2x + xe^x = x(2 + e^x)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

x		0	
f''	$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$

11). $x^3+3x+6 < 6e^x - 3xe^x$

$$\frac{1}{3}x^3 + x + 2 < 2e^x - xe^x$$

$$\frac{1}{3}x^3 + xe^x - 2e^x < -x-2$$

$$f(x) < -x-2$$

$\forall x<0$ η f κοιλη αρα $f(x)<-x-2$

$$x \in (-\infty, 0).$$

Γ3

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f'	$+\infty \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$
f			

Πρεπει νδο η $f'(x)$ εχει δυο ριζ.

ΣΤf'

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 + xe^x - e^x = +\infty$$

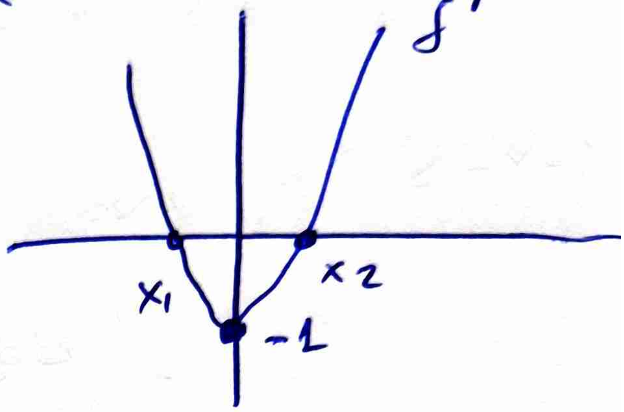
$$\to \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

$f'(0) = -1$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+xe^x-e^x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^2}{e^x}+x-1\right) = +\infty$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$



$x<0$

- f' συνεχής
- f' ↓
- $\Sigma T_{f'} = (-1,+\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_{f'}$

άρα $\exists!\, x_1$

τ.ω $f'(x_1)=0$

$x \geq 0$

- f' συνεχής
- f' ↑
- $\Sigma T_{f'} = [-1,+\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_{f'}$

άρα $\exists!\, x_2$

τ.ω $f'(x_2)=0$

x		x_1		0		x_2	
f''	−		−	0	+		+
f'	+	0	−		−	0	+
f	↗		↘		↘		↗

[4 Nδo $\left(\int_{x_1}^{0} x f''(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{0}^{x_2} x f''(x)\,dx\right) > 0$

$x_1 < x < 0$

- $x < 0$
- $f''(x) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \\ f''(x)<0 \end{array}\right\} x f''(x) > 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{0} x f''(x)\,dx > 0$$

$x > 0$

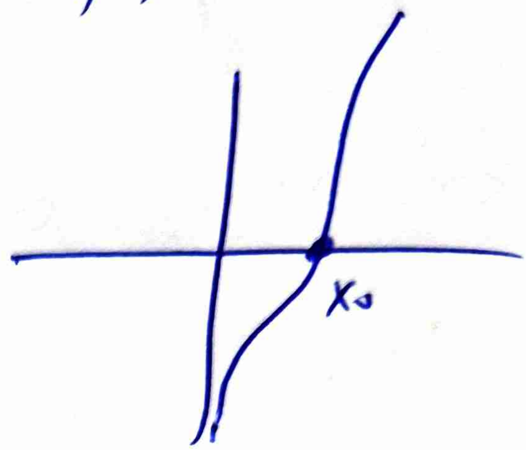
- $x > 0$
- $f''(x) > 0$

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ f''(x)>0 \end{array}\right\} x f''(x) > 0 \Rightarrow \int_{0}^{x_2} x f''(x)\,dx > 0$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{0} x f''(x)\,dx \cdot \int_{0}^{x_2} x f''(x)\,dx > 0}$$

Δ1 $f(x) = xe^x + \ln x \quad , x>0$

$f'(x) = e^x + xe^x + \frac{1}{x} > 0 \qquad f \nearrow$



$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad \Sigma T_f = \mathbb{R}.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = e.$

$\underline{0 < x < 1}$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, e)$

Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists!\, x_0 \in (0,1)$ τ.ω $f(x_0) = 0$.

Δ2 $f''(x) = e^x + e^x + xe^x - \frac{1}{x^2} \quad = 2e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}$

$$\boxed{f''(x) = (2+x)\, e^x - \frac{1}{x^2}}$$

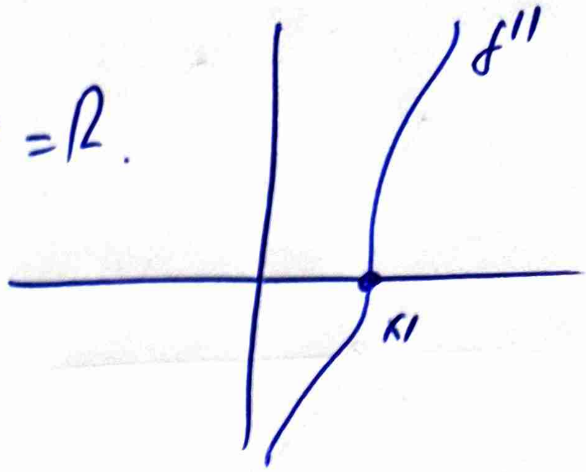
$f'''(x) = 1e^x + (2+x)\, e^x + \frac{2x}{x^4} > 0$

$\Rightarrow f'' \nearrow$

$\Sigma T f''$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f''(x) = +\infty$

$\Big\}\ \Sigma T f'' = \mathbb{R}$.



- f'' συνεχής
- f'' ↗
- $\Sigma T f'' = \mathbb{R}$

$\Big\}$ Το $0 \in \Sigma T f''$

άρα $\exists!\, x_1$ τ.ω $f''(x_1) = 0$.

x		x_1	
f''	↗ $-$	0	$+$ ↗
f	∩		∪

Δ3 i) $e^{x_0} + 2\ln x_0 > 0 \Rightarrow e^{x_0} - 2x_0 e^{x_0} > 0$

Τι ξέρω για το x_0;

$f(x_0) = 0$

$x_0 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$

$\ln x_0 = -x_0 e^{x_0}$

$e^{x_0}(1 - 2x_0) > 0$

$(+)$

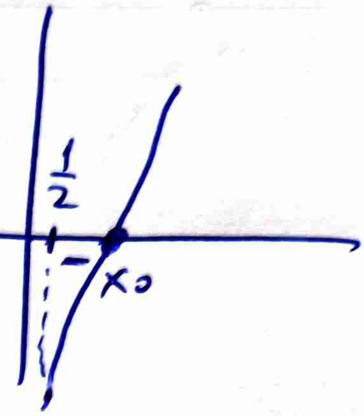
Αρκεί να $1 - 2x_0 > 0$

$x_0 < \frac{1}{2}$

Γνωρίζω ότι $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx \neq 0$

$x_0 < x_1$.

Έστω $x_0 > \frac{1}{2}$



$$(=) \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$$

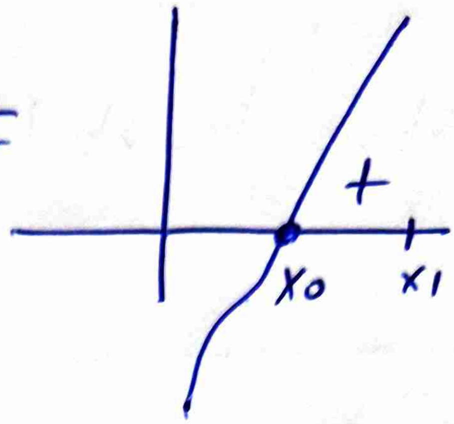
$$-\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$$

$$0 = 2\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$$

$$\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = 0$$ Άτοπο.

Άρα $x_0 < \frac{1}{2}$.

11). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x_1) - F(x_0)}{(2x_0)^x} =$



$x_0 < x_1$

$F \nearrow$

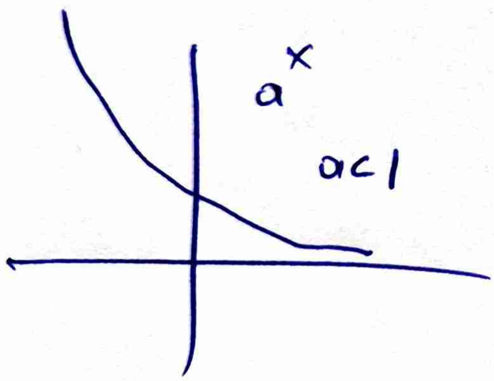
$F(x_0) < F(x_1)$

$\boxed{F(x_1) - F(x_0) > 0}$

$\forall x \in (x_0, x_1)$ " $f(x) > 0$

$F \nearrow$

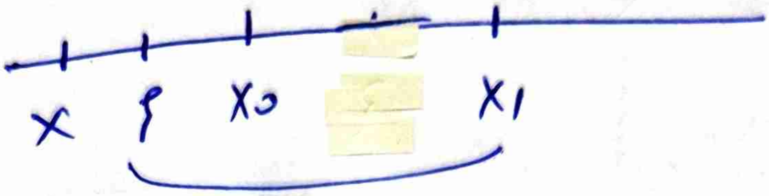
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(F(x_1) - F(x_0) \right) \dfrac{1}{(2x_0)^x} = \theta \cdot 0$
$= 0$



$x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_0 < 1$

Δ4

ΝΔΟ $f(x) < (x - x_0)\, f'(x_1)$



$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$\xi < x_1$

$f' \downarrow$

$f'(\xi) > f'(x_1)$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} > f'(x_1)$$

$$\cancel{f(x_0)} - f(x) > (x_0 - x)\, f'(x_1)$$

$$f(x) < (x - x_0)\, f'(x)$$