1. Σελ 384

- $f(x) = \sqrt{1-x}$ για $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

$D_f = (-\infty, 1]$

- $g(x) = \ln x$

$D_g = (0, +\infty)$.

(α).

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \ln x$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, 1]$.

(β). $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - \ln x}$.

Πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$,

$x > 0$ $\qquad \ln x \leq 1$.

$e^{\ln x} \leq e^1$

$x \leq e$.

$D_h = (0, e]$.

(4) $\varphi(x) = h(x) - x^2$

$\varphi(x) = \sqrt{1-\ln x} - x^2$

$D_\varphi = D_h =]0, e]$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$

$$1 - \ln x_1 > 1 - \ln x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{1-\ln x_1} > \sqrt{1-\ln x_2} \\ \end{array}\right\} (+)$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2$

$$\varphi(x_1) > \varphi(x_2).$$

$\varphi \searrow$

(5). $\dfrac{\sqrt{1-\ln x}}{x^2} = 1,$ $\quad \Leftrightarrow \sqrt{1-\ln x} = x^2$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{1-\ln x} - x^2}_{} = 0$

$\varphi(x) = 0$

$\varphi(x) = \varphi(1)$

φ ع $1-1$

$\boxed{x = 1}$.

2. $f(x) = e^{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{\alpha}{x+1}$, $x > -1$ $\qquad g(0) = 1$.

$g(0) = \dfrac{\alpha}{0+1} = 1 \iff \dfrac{a}{1} = 1 \iff \underline{\underline{a = 1}}$

$$\boxed{\begin{gathered} g(x) = \frac{1}{x+1} \\ D_g = \mathbb{R} - \{-1\}. \end{gathered}}$$

α. $f(x) = g(x) \iff e^{x} = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow \underbrace{e^{x} - \dfrac{1}{x+1}}_{h(x)} = 0$

$h(x) = 0$

$h(x) = h(0)$

h 1-1

$\boxed{x = 0}$

Μονοτονία $h(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$

$\dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1}$

$-\dfrac{1}{x_1+1} < -\dfrac{1}{x_2+1}$

(+)

$h(x_1) < h(x_2)$ $\quad h \nearrow$

$A(0, 1)$

(β) Έστω $f(x) < g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow h(x) <$

$h(x) < h(0)$

$h \nearrow$

$-1 < x < 0$

Άρα $f(x) > g(x)$

αν $x > 0$

(γ) Αν $\alpha < \beta$ νδο $e^{\alpha-1} - e^{\beta-1} < \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$.

α, β (+)

$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - 1 < \beta - 1 \Rightarrow h(\alpha-1) < h(\beta-1)$

$$e^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1+1} < e^{\beta-1} - \frac{1}{\beta-1+1}$$

$$e^{\alpha-1} - e^{\beta-1} < \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

$$e^{\alpha-1} - e^{\beta-1} < \frac{\beta}{\alpha\beta} - \frac{\alpha}{\alpha\beta}$$

$$\boxed{e^{\alpha-1} - e^{\beta-1} < \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}}$$

(δ). εξίσωση $(x^2+1)\,e^{x^2} = 1$

$$e^{x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$e^{x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$h(x^2) = 0$$

$$h(x^2) = h(0)$$

h 1-1

$$x^2 = 0$$

$x = 0$.

3. (α). $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

$x>0$ και $x\ln x \neq 0$

$x \neq 0$ και $\ln x \neq 0$

$e^{\ln x} \neq e^{0}$

$x \neq 1$

$D_f = (0,1)\cup(1,+\infty)$.

(β). • $x_1 < x_2$

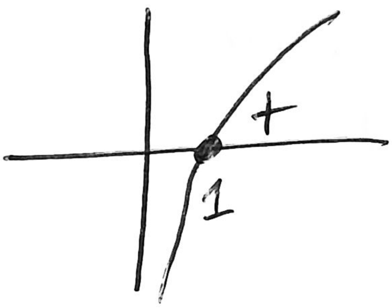
• $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

$\odot$ $x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$

$$\frac{1}{x_1 \ln x_1} > \frac{1}{x_2 \ln x_2}$$

$f(x_1) > f(x_2)$

$f\downarrow$.



(γ). Αν $\alpha<\beta$ νδο $\alpha^{\alpha} < \beta^{\beta}$

$\alpha<\beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha\ln\alpha} > \dfrac{1}{\beta\ln\beta}$

$$\frac{1}{\ln \alpha^{\alpha}} > \frac{1}{\ln \beta^{\beta}} \Leftrightarrow \ln \alpha^{\alpha} < \ln \beta^{\beta}$$

$\alpha^{\alpha} < \beta^{\beta}$.

δ) εξίσωση $\dfrac{(x^4+2)^{x^4+2}}{(x^2+4)^{x^2+4}} = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

$$(x^4+2)^{x^4+2} = \ln(x^2+4)^{x^2+4}$$

$$\ln(x^4+2)^{x^4+2} = \ln(x^2+4)^{x^2+4}$$

$$(x^4+2)\ln(x^4+2) = (x^2+4)\ln(x^2+4)$$

$$\frac{1}{(x^4+2)\ln(x^4+2)} = \frac{1}{(x^2+4)\ln(x^2+4)}$$

$$f(x^4+2) = f(x^2+4)$$

f 1-1 $\quad x^4-x^2-2=0$.

$$x^4+2 = x^2+4$$

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

Θέτω $x^2 = t$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$t = 2$ ή $t = -1$

$x^2 = 2$ $\quad$ $x^2 = -1$

Αδύνατη

$$x = \pm\sqrt{2}$$

6. $f(x) = 1 - \ln x \qquad D_f = (0, +\infty)$.

$g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \qquad D_g = \mathbb{R}$,

(α). Έστω $g(x_1) = g(x_2) \iff \dfrac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}} = \dfrac{e^{x_2}}{1+e^{x_2}}$

$$e^{x_1}(1+e^{x_2}) = e^{x_2}(1+e^{x_1})$$

$$e^{x_1} + \cancel{e^{x_1}e^{x_2}} = e^{x_2} + \cancel{e^{x_1}e^{x_2}}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2} \qquad g \text{ 1-1}.$$

$$x_1 = x_2$$

Θέτω $g(x) = y$

$y = \dfrac{e^x}{1+e^x}, \quad y > 0$

$y(1+e^x) = e^x$

$y + ye^x = e^x$

$ye^x - e^x = -y$

$e^x(y-1) = -y \qquad y \neq 1$

$e^x = \dfrac{-y}{y-1}$

$e^x = \dfrac{y}{1-y}$

$x = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$

$$g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

πρέπει $\dfrac{y}{1-y} > 0$.

y		0		1	
y	$-$	0	$+$		$+$
$1-y$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{y}{1-y}$	$-$		$+$		$-$

$y \in (0,1)$

$$D_{g^{-1}} = (0,1).$$

(B) $$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = \ln\left(\frac{1-\ln x}{1-(1-\ln x)}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right)$$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_{g^{-1}}$

$x > 0$

$$0 < 1 - \ln x < 1$$

$$-1 < -\ln x < 0$$

$$1 > \ln x > 0$$

$$e > x > 1$$

$$D_{g^{-1} \circ f} = (1, e).$$

γ. $g^{-1}(f(x)) = 0$

$$\ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right) = 0$$

$$\frac{1-\ln x}{\ln x} = 1$$

$$1 - \ln x = \ln x$$

$$1 = 2\ln x$$

$$\frac{1}{2} = \ln x$$

$$e^{1/2} = x$$

$$x = \sqrt{e}$$

7. $f(x) = 2 - \ln\left(\sqrt{x-2}+1\right)$.

(a) • πρπ $x-2 \geq 0$ και $\sqrt{x-2}+1 > 0$ που ισχύει.

$x \geq 2$

$D_f = [2, +\infty)$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \ldots f(x_1) > f(x_2)$

$f \downarrow$

$y = 2 - \ln\left(\sqrt{x-2}+1\right)$.

$\ln\left(\sqrt{x-2}+1\right) = 2 - y$

$\sqrt{x-2}+1 = e^{2-y}$

$\sqrt{x-2} = e^{2-y} - 1$

$x - 2 = \left(e^{2-y}-1\right)^2$

$x = \left(e^{2-y}-1\right)^2 + 2$

$e^{2-y} - 1 > 0$

$e^{2-y} > 1$

$2 - y > 0$

$2 > y$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \left(e^{2-x}-1\right)^2 + 2}$$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, 2)$.

Τέλος

$x \geq 2$

$$\left(e^{2-y}-1\right)^2 + \cancel{2} \geq \cancel{2}$$

$\left(e^{2-y}-1\right)^2 \geq 0$ που ισχύει.

(β). $f^{-1}(x) = 2$

$$f(f^{-1}(x)) = f(2)$$

$$x = 2$$

(γ). $f(x) = x$

$$2 - \ln(\sqrt{x-2}+1) = x$$

$$0 = x-2 + \ln(\sqrt{x-2}+1)$$

$\boxed{\text{Έστω } x-2=t}$

$$\underbrace{t + \ln(\sqrt{t}+1)}_{\varphi(t)} = 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

$\varphi \nearrow$

$$\varphi(t) = \varphi(0)$$

φ 1-1

$$t = 0 \Rightarrow x-2 = 0$$

$$x = 2$$

8. $e^{f(x)} + f(x) - x = 1$.

$$\boxed{e^{f(x)} + f(x) = x+1.}$$

(α) ·Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$ ⊕

Έστω $f(x_1)=f(x_2)$

$$\underbrace{e^{f(x_1)} + f(x_1)}_{x_1+1} = \underbrace{e^{f(x_2)} + f(x_2)}_{x_2+1}$$

$$x_1+1 = x_2+1$$

$$x_1 = x_2$$

f: 1-1.

(β). Θέτω $f(x)=y$ και $x = f^{-1}(y)$

$$e^y + y = f^{-1}(y)+1$$

$$f^{-1}(x) = e^x + x - 1$$ ✓

(γ). $f(x) = x$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x)$$

$$x = f^{-1}(x)$$

$$\cancel{x} = e^{x} + \cancel{x} - 1$$

$$1 = e^{x}$$

$$x = 0$$

(δ). $f(x^2+2) - f(1+\sigma\upsilon\nu x) = 0.$

$$f(x^2+2) = f(1+\sigma\upsilon\nu x)$$

f 1-1

$$x^2+2 = 1+\sigma\upsilon\nu x$$

$$x^2+1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

$$\underbrace{x^2}_{+} + \underbrace{1-\sigma\upsilon\nu x}_{+} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 & x=0 \\ \text{και} & x=0 \\ 1-\sigma\upsilon\nu x = 0 & \end{cases}$$

9. $f(x) = \ln(e^x + x - 1)$

ⓐ. Πρέπει $\underbrace{e^x + x - 1}_{\varphi(x)\nearrow} > 0$, $\Rightarrow \varphi(x) > 0$

$\varphi(x) > \varphi(0)$

$\varphi \nearrow$

$x > 0$.

$D_f = (0, +\infty)$.

ⓑ. • $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ $\quad \int (+)$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$

$\underbrace{\ln(e^{x_1} + x_1 - 1)}_{f(x_1)} < \underbrace{\ln(e^{x_2} + x_2 - 1)}_{f(x_2)}$

$f \nearrow$.

ⓒ. Αφού $f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1 $\Rightarrow f$ αντιστρ.

ⓓ. $f^{-1}(x) = x$.

$f(f^{-1}(x)) = f(x)$

$x = f(x) \Rightarrow x = \ln(e^x + x - 1)$.

$$\cancel{e^x} = \cancel{e^x} + x - 1$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

(ε) νδο $\quad x + e^x > \ln \dfrac{e^{x+1}}{1+e^x} \quad \forall x > 0$

$$x + e^x > \ln(e^{x+1}) - \ln(1+e^x)$$

$$\cancel{x} + e^x > \cancel{x} + 1 - \ln(1+e^x)$$

$$\ln(e^x+1) + e^x + 1 > 2$$

$$\ln(e^x+1) + e^x - 1 > 0$$

$+ \qquad +$

- $e^x + 1 > 1 \Rightarrow \ln(e^x+1) > \ln 1 \Rightarrow \ln(e^x+1) > 0$
- $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

11. $e^{f(x)} + f(x) = x+1$

(01) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$

(+)

$f(x_1) = f(x_2)$

$$\underbrace{e^{f(x_1)} + f(x_1)}_{x_1+1} = \underbrace{e^{f(x_2)} + f(x_2)}_{x_2+1}$$

$x_1 = x_2$ $\qquad$ f 31-1

(13). $e^{f(2x+1)} - e^{f(3x-2)} = 3-x$

$e^{f(2x+1)} + f(2x+1) = 2x+1+1$

$e^{f(2x+1)} = 2x+2 - f(2x+1)$

$e^{f(3x-2)} + f(3x-2) = 3x-2+1$

$e^{f(3x-2)} = 3x-1 - f(3x-2)$

$$2x+2-f(2x+1)-(3x-1-f(3x-2))=3-x$$

$$\cancel{2x}+\cancel{2}-f(2x+1)-3\cancel{x}+\cancel{1}+f(3x-2)=\cancel{3}-\cancel{x}$$

$$f(3x-2)=f(2x+1)$$

f 8|-|

$$3x-2=2x+1$$

$$x=3.$$

(r). $e^{f(x)}+f(x)=x+1$

$$\boxed{f(x)=y \qquad x=f^{-1}(y)}$$

$$e^{y}+y=f^{-1}(y)+1$$

$$f^{-1}(x)=e^{x}+x-1$$

(8). $f(x) + f^{-1}(x) < 1 - e^{x}$

$$\underbrace{f(x) + f^{-1}(x) - 1 + e^{x}}_{h(x)} < 0$$

$$h(x) < 0.$$

$$h(x) < h(0)$$

$$h \nearrow$$

$$x < 0$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2).$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1$

$\Big\}$ $(+)$ $\nearrow$

$$\boxed{f^{-1}(0) = 0 \iff f(0) = 0}$$

$$h(0) = f(0) + f^{-1}(0) - 1 + e^{0}$$

$$h(0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Εστω $f(x_1) < f(x_2)$

$f^{-1} \nearrow$

$$f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))$$

$$x_1 < x_2$$

$f \nearrow$

Επαναληψη για Σαββατο

Θεωρια

1 5 7 8 9 10 11

Κριτηριο παρεμβολης (σελ 17).

20, 23 24 25 26 27

Ασκησεις - Σιγουρακια.

1. Ισοτητα.
2. Συνθεση
3. Αντιστροφη
4. Ολα τα ειδη οριων τα βασικα.
5. Συνεχεια στο x_0 μαζι κλαδωτη,

30. Σελ 391

$f(x) = e^{x-2} + x^3 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$.

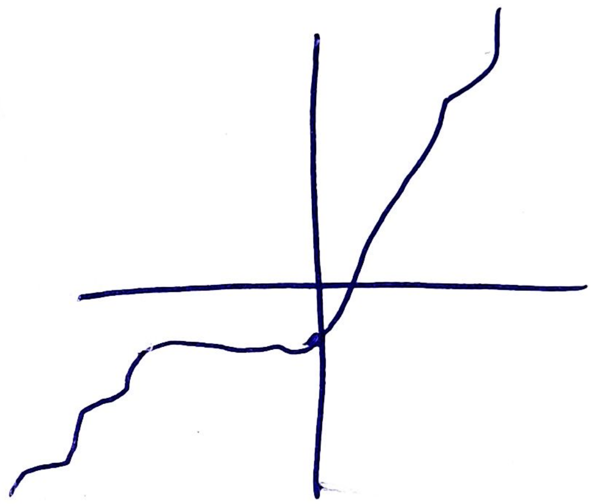
(α). Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow e^{x_1-2} < e^{x_2-2}$

Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1$ ⊕

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow \Rightarrow f$ γν. μονότονη $\Rightarrow f$ 1-1 $\Rightarrow f$ αντιστρ.

$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f$.



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{x-2} + x^3 - 1\right) =$$

$$= e^{-\infty} + (-\infty) - 1 = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x-2} + x^3 - 1 = +\infty$$

$\Sigma T_f = \mathbb{R} = D_{f^{-1}}$.

(B) $f^{-1}(e^{x-2}+x^3+e^{-1}-9) < 1$,

$f \uparrow$

$$f\left(f^{-1}(e^{x-2}+x^3+e^{-1}-9)\right) < f(1)$$

$$e^{x-2}+x^3+\cancel{e^{-1}}-9 < \cancel{e^{-1}}$$

$$e^{x-2}+x^3-9<0$$

$$e^{x-2}+x^3-1<-1+9$$

$$f(x)<8$$

$$f(x)<f(2)$$

$f \uparrow$

$$\underline{\underline{x<2}}$$

(γ) νδο η εξισωση $f(e^{2-x}(x^3-8)+3)=8$.

εχει μοναδικη λυση.

$$f(e^{2-x}(x^3-8)+3) = f(2)$$

f 1-1

$$e^{2-x}(x^3-8)+3 = 2$$

$$e^{2-x}(x^3-8) = -1.$$

$$x^3-8 = -\frac{1}{e^{2-x}}$$

$$x^3-8 = -e^{x-2}$$

$$e^{x-2}+x^3-8 = 0$$

$$e^{x-2}+x^3-1 = -1+8$$

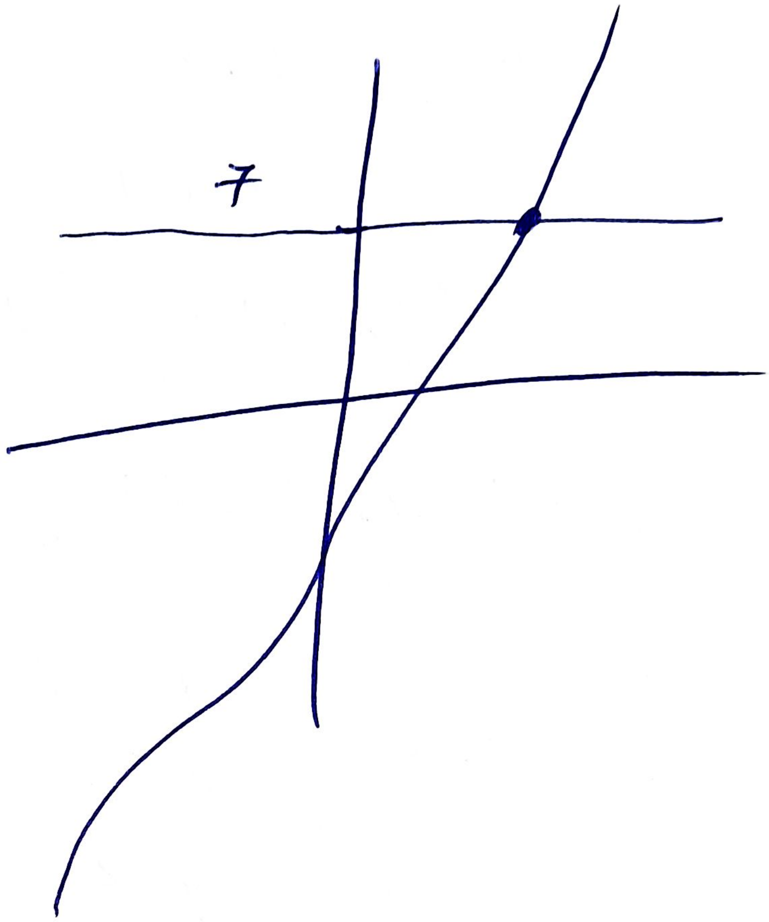
$$e^{x-2}+x^3-1 = 7$$

$$f(x) = 7,$$

Στην αυτά αρκεί νδο

η εξίσωση $f(x)=7$ έχει μοναδική

λύση.



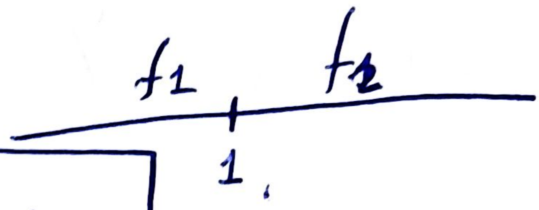
- f συνεχής.
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$

Το $7 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists ! \, \xi \in D_f$

τ.ω $f(\xi)=0$,

31. $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} - x - 2, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 3, & x > 1 \end{cases}$



(α)

Για να είναι συνεχής στο 1 πρέπει $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$f(1) = -2$

$f(1) = e^{-1+1} - 1 - 2 = e^0 - 3 = 1 - 3 = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{-x+1} - x - 2 = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x + x - 3) = -2$

Άρα το $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2.}$

Αφού $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$

άρα η f συνεχής στο 1.

Η $f(x)$ συνεχής στο $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$

ως π. σ. σ.

Είναι συνεχής και στο 1.

Άρα συνεχής παντού.

(B).

$x \leq 1$

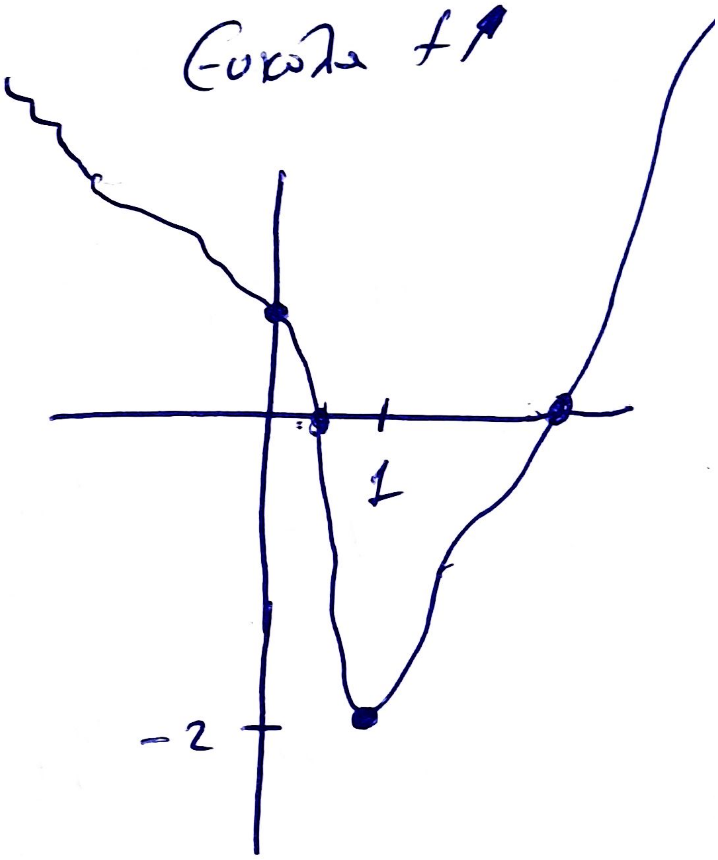
$f(x) = e^{-x+1} - x - 2$

Εύκολα $f \downarrow$

$x > 1$

$f(x) = \ln x + x - 3$

Εύκολα $f \uparrow$



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x+1} - x - 2\right) =$

  $= e^{+\infty} + \infty - 2 = +\infty$

- $f(1) = -2$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x + x - 3 = +\infty$

$$\Sigma T_f = [-2, +\infty).$$

(B)

$x \in (-\infty, 1]$

- f συνεχ.
- $f \downarrow$
- $\Sigma T_f = [-2, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\ \xi_1 < 1$

τ.ω $f(\xi_1) = 0$.

$x \in (1, +\infty)$

- f συνεχ.
- $f \uparrow$
- $\Sigma T_f = [-2, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\ \xi_2 > 1$

τ.ω $f(\xi_2) = 0$.

(Γ) Νδο η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)+2}{x-1} + \dfrac{f(\beta)+2}{x-2} = 0$

έχει τουλ. μια ρίζα στο $(1,2)$

$$\underbrace{(f(\alpha)+2)(x-2) + (x-1)(f(\beta)+2) = 0}_{g(x)}$$

Απο ΣT_f
$f(x) \geq -2$
$\forall x \in D_f$

$g(1) = -(f(\alpha)+2) < 0$

$g(2) = f(\beta) + 2 > 0$

$f(\alpha) \geq -2 \Rightarrow f(\alpha)+2 \geq 0$

$f(\beta) \geq -2 \Rightarrow f(\beta)+2 \geq 0$

$g(1)g(2) < 0$ Bolzano $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $g(\xi) = 0$.

(δ) εξίσωση $f(2^x)+f(3^x)=f(e^x)+f(\pi^x)$.

Προφανής ρίζα : $x=0$

Αν $x<0$.

- $2^x < e^x \Rightarrow f(2^x) < f(e^x)$
- $3^x < \pi^x \Rightarrow f(3^x) < f(\pi^x)$

$\boxed{f(2^x)+f(3^x) < f(e^x)+f(\pi^x)}$ (+)

Στο $(0,+\infty)$ η $f \nearrow$

και $\underbrace{2^x, e^x, 3^x, \pi^x}_{(+)}$ παρόλο που $x<0$

Αν $x>0$ όμοια

$f(2^x)+f(3^x) > f(e^x)+f(\pi^x)$

άρα $x=0$

μοναδική ρίζα

(ε) Αν $\kappa \leq 1 \leq \lambda$ και

$$e^{-\kappa+1} + \lambda - 1 = \kappa - \ln\lambda.$$

$$\ln\lambda + \lambda = -e^{-\kappa+1} + \kappa + 1.$$

$$\underbrace{\ln\lambda + \lambda - 3} + 3 = -e^{-\kappa} + \kappa + 1 - 2 + 2$$

$$f(\lambda) + 3 = -e^{-\kappa+1} + \kappa + 2 - 1$$

$$f(\lambda) + 3 = -\left(e^{-\kappa+1} - \kappa - 2\right) - 1$$

$$f(\lambda) + 3 = -f(\kappa) - 1.$$

$$f(\lambda) + f(\kappa) = -4.$$

$$f(\lambda) + 2 + f(\kappa) + 2 = -4 + 4$$

$$\underbrace{f(\lambda)+2}_{\oplus} + \underbrace{f(\kappa)+2}_{\oplus} = 0. \Rightarrow \begin{cases} f(\lambda) = -2 \\ f(\kappa) = -2 \end{cases}$$

$$\kappa = \lambda = 1$$

32. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$(x-1)f(x) = ax^2 + Bx - 2$ $\quad\quad$ $f(1) = 3$

α) Για $x=1$

$a + B - 2 = 0$

$\boxed{a + B = 2}$

$B = 2 - a$

Για $x \neq 1$

$f(x) = \dfrac{ax^2 + Bx - 2}{x-1}$

Αφού f συνεχής

$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{ax^2+Bx-2}{x-1} = 3}$$

$B = 1$

$a = 1$

$$\lim_{x\to1} \frac{ax^2 + (2-a)x - 2}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x\to1} \frac{ax^2 + 2x - ax - 2}{x-1} = 3 \iff \lim_{x\to1} \frac{ax\cancel{(x-1)} + 2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3$$

$a + 2 = 3$

(B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & , x \neq 1. \\ 3 & , x=1 \end{cases}$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \neq 1 \\ 3 & , x=1 \end{cases}}$$

(γ). $e^{f(x)} + f(x) - 1 = 0$ $f(x) = t$

$\underbrace{e^t + t - 1}_{h(t)} = 0. \Rightarrow h(t) = 0$

$h(t) = h(0)$

$h \nearrow$ h 1-1

$t = 0$

$f(x) = 0$

$x + 2 = 0$

$x = -2$

(5) i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{f(x)=t}$

$t\to+\infty,$

$$=\lim_{t\to+\infty} t^2\,\eta\mu\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} t^{2}\,\frac{\eta\mu\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\cdot\cancel{\frac{1}{t}} = +\infty$$

ii). $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu f(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{f(x)=t}$

$t\to+\infty$

$$\Phi$$

$$=\lim_{t\to+\infty} \eta\mu t\;\eta\mu\frac{1}{t} \xrightarrow{M\times\Phi} 0$$

$$-1\le \eta\mu t\le 1$$

$$|\eta\mu t|\le 1$$

$$\left|\eta\mu\frac{1}{t}\right|\cdot|\eta\mu t|\le 1\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{t}\right|$$

$$\left|\eta\mu\frac{1}{t}\,\eta\mu t\right|\le\left|\eta\mu\frac{1}{t}\right|.$$

$$\boxed{-\left|\eta\mu\frac{1}{t}\right| \le \eta\mu t\ \eta\mu\frac{1}{t} \le \left|\eta\mu\frac{1}{t}\right|}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} -\left|\eta\mu\frac{1}{t}\right| = 0 \\ &\lim_{t\to+\infty} \left|\eta\mu\frac{1}{t}\right| = 0 \end{aligned}\right\}$$

Από Κ. Π.

$$\lim_{t\to+\infty} \eta\mu t\,\eta\mu\frac{1}{t} = 0.$$

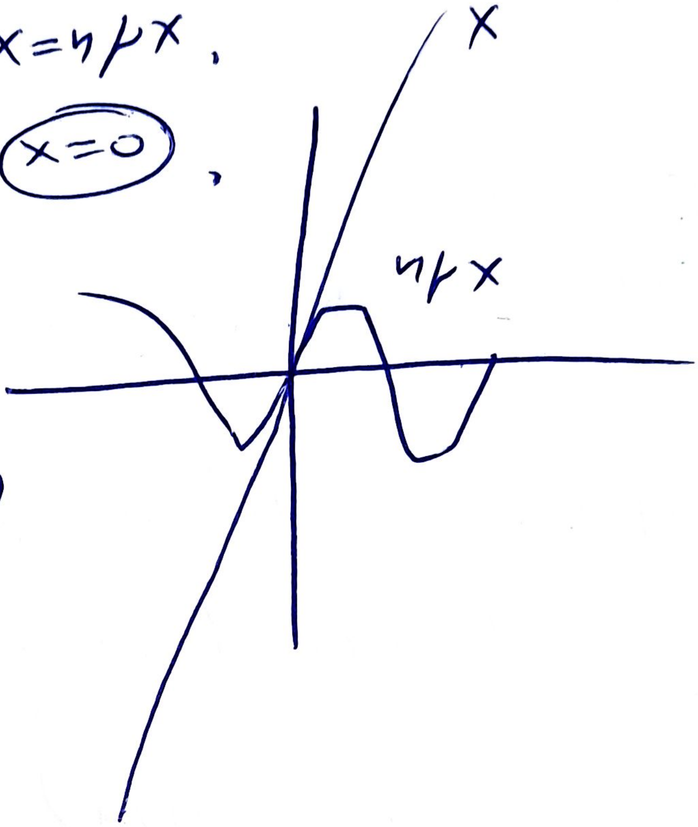
29. (α) $g(x) = x - ημx$

$\longrightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x - ημx = 0$

$x = ημx$,

$x = 0$,

x	0
$g(x)$	$-\ 0\ +$



$g(π) = π - ημπ = π$

$g(-π) = -π - ημ(-π) = -π$

(B). $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

i). πρέπει $x+1>0$ και $x>0$

$x > -1$

$D_f = (0, +\infty)$.

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

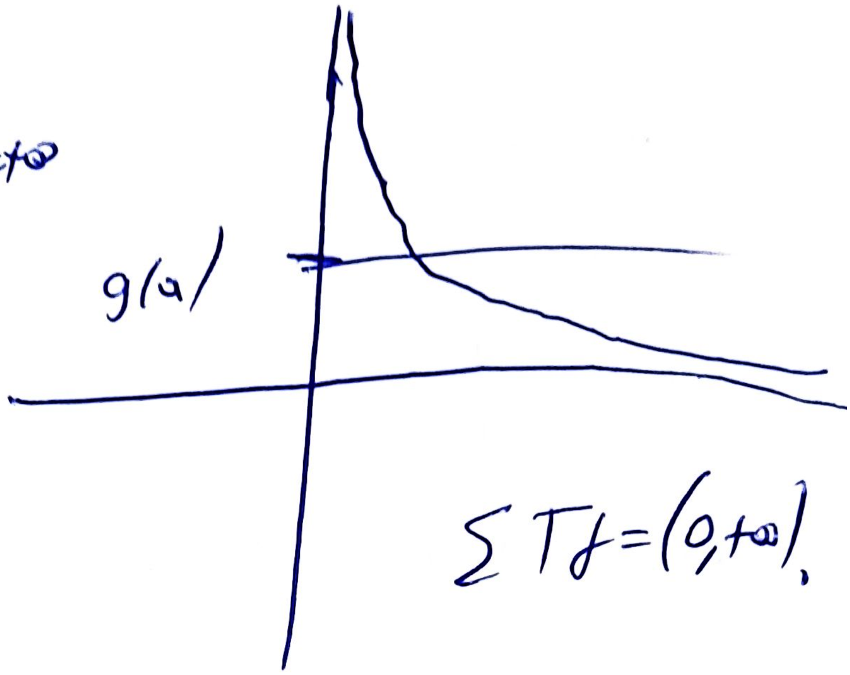
• $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1} > 1 + \frac{1}{x_2}$

$f \downarrow$

$D_f = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



$\Sigma T_f = (0, +\infty)$.

ii). νδο η $f(x) = a - \eta\mu a$

έχει ακριβώς μια λύση $a > 0$.

$f(x) = g(a)$. $a > 0$

+

- f συνεχής
- f ↓
- $\Sigma T_f = (0, +\infty)$

Το $g(a) > 0$ άρα $g(a) \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\ \xi \in (0, +\infty)$ τ.ω

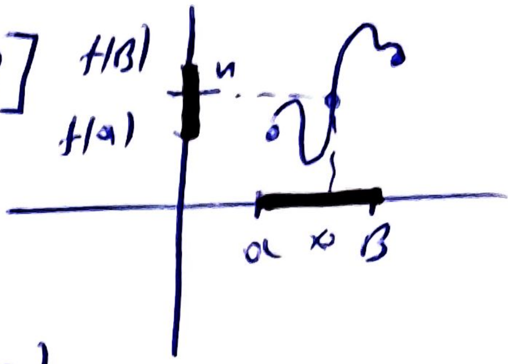
$f(\xi) = 0$

Θεωρια

Ορισμοι	Αντιπαραδειγμα	Αποδειξη
1.1	2.3	3.4.
1.3	2.5	
1.5		
1.6		
1.7		
1.10		
1.12		
1.11		
1.13		
1.14		
1.15		
1.18		
1.21		
1.22		
1.23		
1.24		
1.25		
1.26		

ΘΕΤ

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$



και $f(\alpha) \neq f(\beta)$

$\forall \eta \in \mathbb{R}$ που $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$

$\exists x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f(x_0) = \eta$

Απόδειξη

Θέλω ν.δ.ο $\exists x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f(x_0) = \eta$

$$f(x) = \eta$$

$$\underbrace{f(x) - \eta}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως π.σ.σ

$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ $\qquad f(\alpha) < \eta$, $f(\alpha) - \eta < 0$

$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ $\qquad f(\beta) > \eta$, $f(\beta) - \eta > 0$

$g(\alpha) g(\beta) < 0$ Bolzano

$\exists x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $g(x_0) = 0$

Ενα ερωτημα που θα ζητηθει ειναι να βρεθει ο τυπος της $f(x)$.

Τρια σεναρια.

1. $x f(x) = \eta\mu x \quad , \quad x \in R$ και συνεχ.

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \quad , x \neq 0.$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. $\left(\quad\right)^2 = \left(\quad\right)^2$

3. $f(\ln x) = x - 1 \longrightarrow f(t) = e^t - 1$

Θετω $\ln x = t \Rightarrow x = e^t$

$\underline{f(x) = e^x - 1}$

Ασκηση 6

Δινεται $f: R \longrightarrow R$ για την οποια ισχυει οτι

$$f(x+1) = (x+1)e^{-x} \quad \forall x \in R.$$

Να βρεθει ο τυπος της $f(x)$.

$$f(x+1) = (x+1)e^{-x} \iff f(t) = t\,e^{-(t-1)}$$

$$f(t) = t\,e^{1-t}$$

$$\boxed{\text{Θετω } x+1 = t \iff x = t-1}$$

$$\text{ή} \quad \boxed{f(x) = x\,e^{1-x}}$$

Ασκηση 9

Εστω $f: [-1,4] \longrightarrow R$ συνεχης για την οποια

- $x^2 + f^2(x) = 3x+4 \quad , \forall x \in [-1,4]$
- $f(0) = -2$

Να βρεθει ο τυπος της $f(x)$

x	$-1 \quad 4$
$-x^2+3x+4$	$- \ 0 \ + \ 0 \ -$

Εχω οτι $f^2(x) = -x^2+3x+4$

$\Leftrightarrow \quad f^2(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}^{\,2}$

$\Leftrightarrow \quad |f(x)| = \left|\overset{+}{\sqrt{-x^2+3x+4}}\right|$

$\Leftrightarrow \quad |f(x)| = \sqrt{-x^2+3x+4}$

πρεπει να βρω το προσημο της $f(x)$

$f(x) = 0$

$f^2(x) = 0$

$-x^2+3x+4 = 0$

$\boxed{x=-1}$, $\boxed{x=4}$

x	$-1 \quad 0 \quad 4$
$f(x)$	$/// \ 0 \ - \ 0 \ ///$

Αφου $f(0) = -2$

τοτε $f(x) < 0$

$\forall x \in [-1,4]$

Αρα $-f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$

$f(x) = -\sqrt{-x^2+3x+4}$

Ασκηση 10

Δινεται $f: R \to R$ συνεχης με $f(0)=1$

και $e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) = 2x^2+1 \quad \forall x \in R$.

Να βρειτε τον τυπο $f(x)$

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) + x^4 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$[e^x f(x) - x^2]^2 = [x^2+1]^2 \Leftrightarrow |e^x f(x) - x^2| = |x^2+1|$$

$$|e^x f(x) - x^2| = x^2+1 \Rightarrow |g(x)| = x^2+1$$

$$\boxed{\text{Θετω } e^x f(x) - x^2 = g(x)}$$

Πρεπει να βρω το προσημο της $g(x)$

$g(x)=0$

$g^2(x)=0$

$(x^2+1)^2 = 0$

Αδυνατη.

Αρα $g(x) \neq 0$ και συνεχης

$g(x)>0$ ή $g(x)<0 \quad \forall x \in R$

$g(0) = e^0 f(0) - 0 = 1$

$g(x)>0$

$g(x) = x^2+1$

$e^x f(x) - x^2 = x^2+1$

$e^x f(x) = 2x^2+1$

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{e^x}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-x}(2x^2+1)}$$

$f: R \to R$ συνεχής.

$$f^2(x) - 4 = x^2 - 4x$$

Πιθανούς τύπους συνεχούς συνάρτησης.

Λύση

$$f^2(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f^2(x) = (x-2)^2$$

$$|f(x)| = |x-2|.$$

Ρίζα $f(x)$

$$f(x) = 0$$

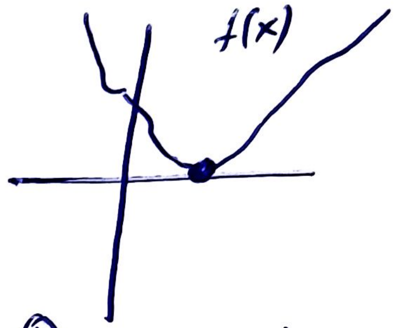
$$f^2(x) = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

x		2	
$f(x)$	;	0	;

1.



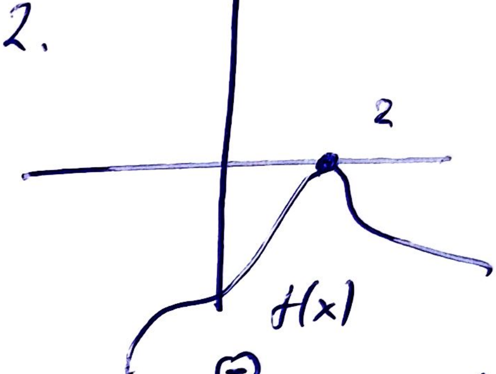
⊕

$$|f(x)| = |x-2|$$

$$f(x) = |x-2|$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 2-x, & x<2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}}$$

2.



⊖

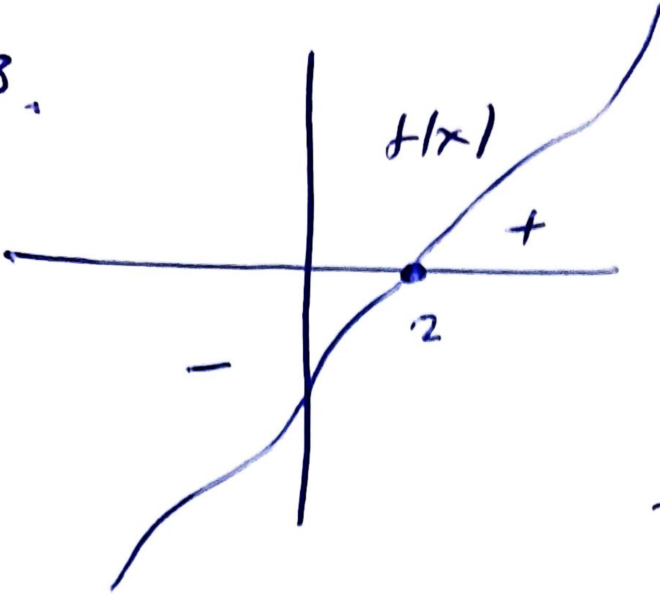
$$|f(x)| = |x-2|$$

$$-f(x) = |x-2|$$

$$f(x) = -|x-2|$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}}$$

3.



$$|f(x)| = |x-2|$$

$x < 2$

$$|\overset{\ominus}{f(x)}| = |\overset{\ominus}{x-2}|$$

$$-f(x) = -(x-2)$$

$$\boxed{f(x) = x-2}$$

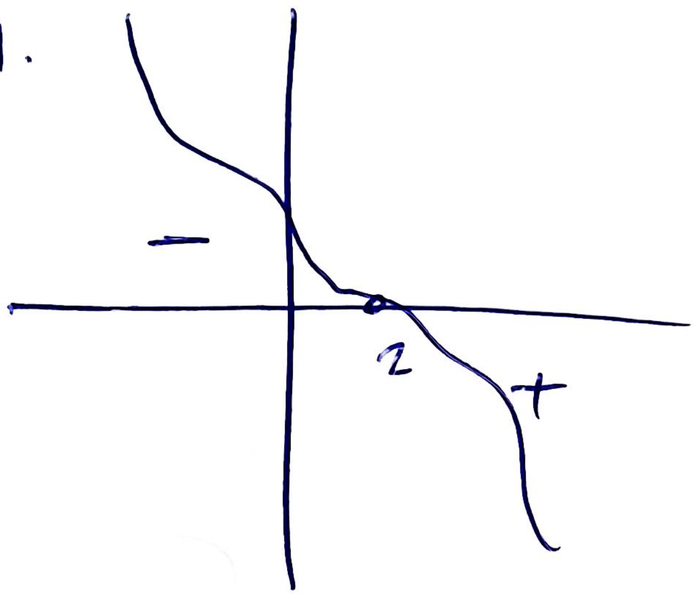
$x > 2$

$$|\overset{\oplus}{f(x)}| = |\overset{\oplus}{x-2}|$$

$$\boxed{f(x) = x-2}$$

$$f(x) = x-2$$

4.



$$|f(x)| = |x-2|$$

$$f(x) = 2-x$$

Θεωρία

1.1	1.6	1.11	1.14	1.21	1.24
1.3	1.7	1.12	1.15	1.22	1.25
1.5	1.10	1.13	1.18	1.23	1.26.

\+

2.3

2.5

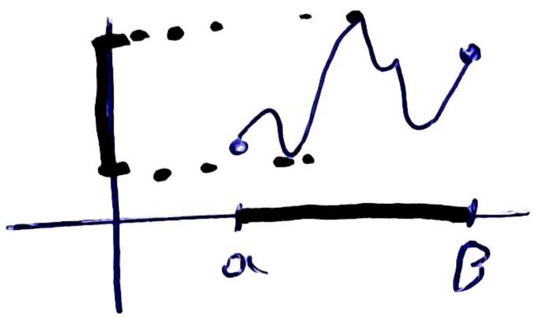
\+

3.1 (Μια ματιά)

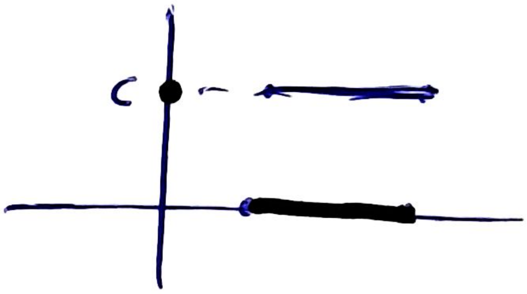
3.4. **SOS**

Σ - Λ SOS

1. Η εικόνα $f(Δ)$ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα Σ



Σταθερή



2. Αν $f(x)$ συνεχής στο $Δ$ και $f(x) \neq 0$ $\forall x \in Δ$ εσωτερικό τότε Σ

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ $\forall x \in Δ$ εσωτερικό.

3. Αν f συνεχής στο x_0 και η $g(x)$ συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η $g \circ f$ Σ. συνεχής στο x_0,

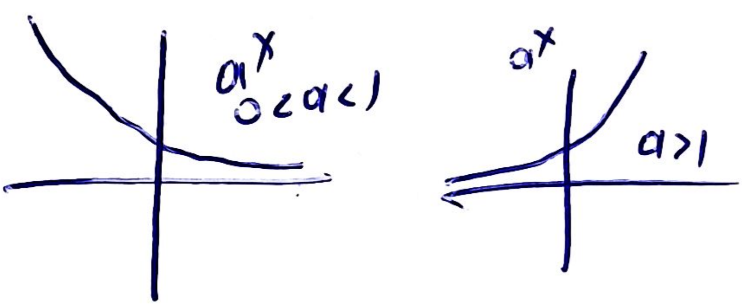
4. Αν f συνεχής και γν. φθίνουσα στο $[\alpha, \beta)$ τότε το $\Sigma.T_f = \left(\lim_{x\to\beta^-} f(x),\ f(\alpha)\right]$ Σ

5. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta) > 0$ τότε $\nexists\, x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f(x_0)=0$. Λ

6. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\exists\, x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$.

7. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$. Τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g τη συνάρτηση $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ όπου $x \in A$ και $f(x) \in B$. αρκεί $f(A)\cap B \neq \emptyset$ Σ

8. Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = -\infty$ Λ



9. (α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$ Σ

(β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$. Λ

10. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$ τοτε $f(x) < 0$ κοντα στο x_0

Σ

11 Αν $f(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ τοτε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$

Σ.

12. α/ Η C_f και C_{-f} συμ/κες ως προς τον $x'x$ Σ

β) Η C_f και $C_{f(-x)}$ ειναι συμ/κες ως προς τον $y'y$ Σ

γ) Η $C_{|f|}$ εχει τα θετικα τμηματα της $f(x)$ και τα συμ/κα των αρνητικων ως προς τον $x'x$ Σ.

13 $f(f^{-1}(x)) = x \quad x \in f(A)$

$f^{-1}(f(x)) = x \quad , x \in A$ $\quad \Sigma$

14. Αν η f 1-1 τοτε f γν. μονοτονη $\quad \Lambda$

15. Αν η f ειναι 1-1 τοτε η C_f τεμνει τον $x'x$ $\quad \Lambda$

μοναδικη φορα.

$\llcorner\!\to$ (Το πολυ : Σ)

16. Αν η f 1-1 τοτε $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

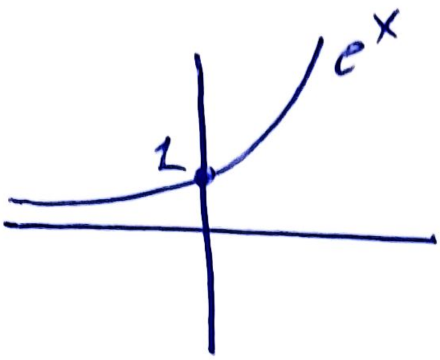
Σ

$x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ΠΑΝΤΑ

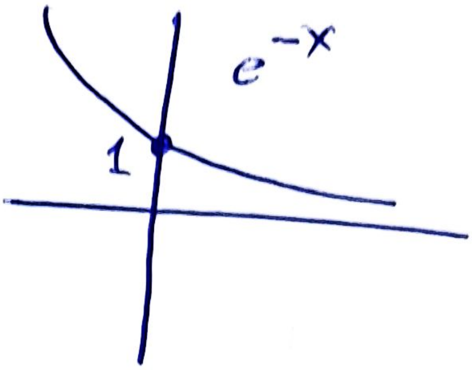
$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \quad \Rightarrow f$ 1-1

- $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\quad \Sigma$ στην 1-1

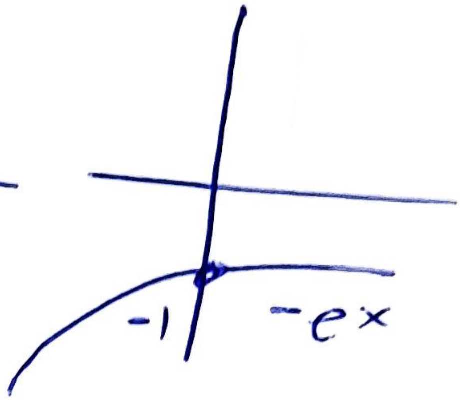
Υπενθύμιση



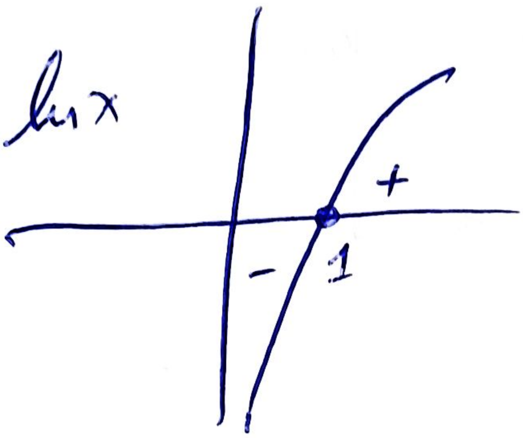
e^x
1



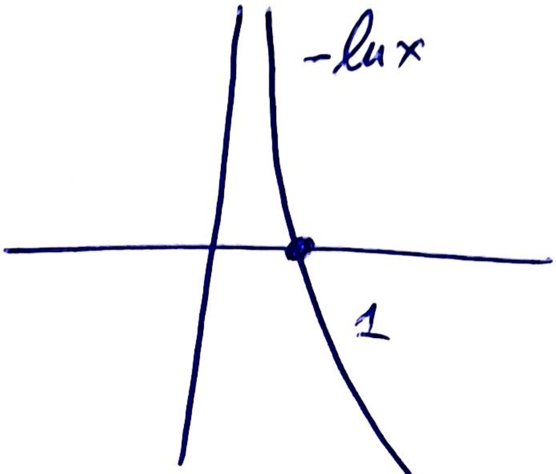
e^{-x}
1



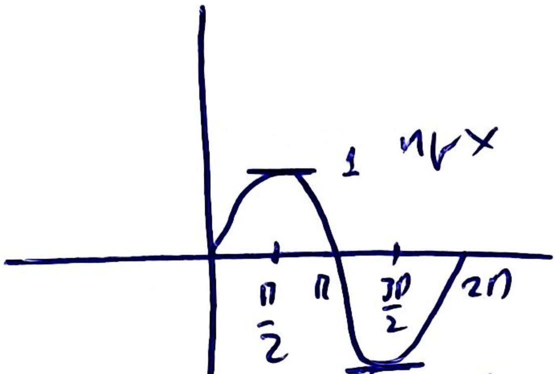
-1
$-e^x$



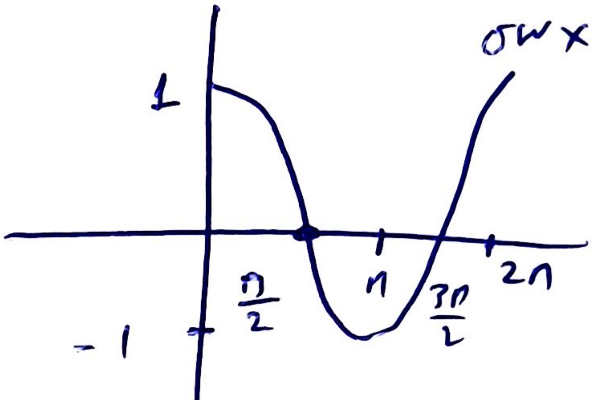
ln x
+
-
1



-ln x
1

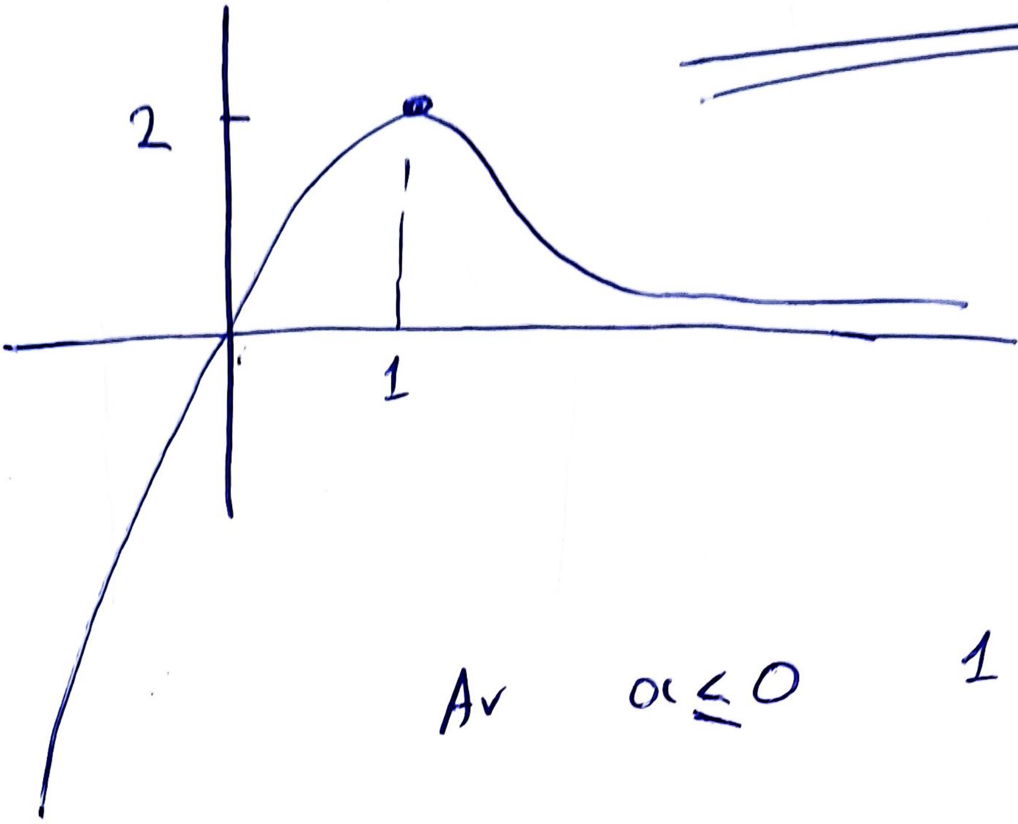


ημx
1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
-1



συνx
1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
-1

$f(x) = \alpha$



Αν $\alpha \leq 0$ 1 ρίζα

Αν $0 < \alpha < 2$ 2 ρίζες

Αν $\alpha = 2$ 1 ρίζα

Αν $\alpha > 2$ καμία ρίζα

$f(0)=g(0)$

8. $f(x) \le g(x) + \eta\mu x$

$$\underbrace{f(x) - g(x) - \eta\mu x}_{\varphi(x).} \le 0$$

f, g παρ/μες στο 0

$\Rightarrow$ Η φ παρ/μη στο 0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-g(x)-\eta\mu x}{x} \quad = ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-g(x)-\eta\mu x}{x}$$

$$f(x) - g(x) - \eta\mu x \le 0$$

Για $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-g(x)-\eta\mu x}{x} \le 0$$

Για $x<0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-g(x)-\eta\mu x}{x} \ge 0 .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x) - \eta\mu x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{g(x) - g(0)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

$$f'(0) - g'(0) - 1 = 0$$

$$f'(0) = g'(0) + 1$$

7. Σελ 285

$x=0$
$0 \le f(0) \le 0$
$f(0)=0$

$2x\eta\mu x \le f(x) \le x^2+\eta\mu^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Βρείτε το $f'(0)$.

$$\boxed{f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

Για $x>0$

$$\frac{2x\eta\mu x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{x^2+\eta\mu^2 x}{x}$$

- $\lim_{x\to 0^+} 2\eta\mu x=0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x}+\frac{\eta\mu^2 x}{x}=0$

$\Big\}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$

Για $x<0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=0$$

Από Κ.Π

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=0.$$

9. $f(2+h) = 1+2h+3h^3 \quad \forall h \in \mathbb{R}$.

(α) νδο $f(2) = 1$.

Για $h=0$: $f(2+0) = 1+2\cdot 0+3\cdot 0^3$

$\underline{\underline{f(2)=1}}$

(β) . $\underline{\underline{f'(2)}}$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{1}+2(x-2)+3(x-2)^3-\cancel{1}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4+3(x-2)^3}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2+3(x-2)^2)}{\cancel{x-2}} = 2$$

$f(2+h) = 1+2h+3h^3$

Θέτω $2+h=x \Rightarrow h = x-2$

$f(x) = 1+2(x-2)+3(x-2)^3$

11. $g(x) = \left(\sqrt{x^3+3} - 2\right) f(x)$

f συνεχής στο 1.

$$g'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x^3+3} - 2\right) f(x) - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 1) f(x)}{(x-1)\left(\sqrt{x^3+3} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1) f(x)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^3+3} + 2\right)} = \frac{3f(1)}{4}$$

$$g'(1) = \frac{3f(1)}{4}.$$

12. $f(x) = |x-2| + 2x - 1$, $x_0 = 2$

Είναι παρ/μη στο 2;

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{|x-2| + 2x - 1 - 3}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{|x-2| + 2x - 4}{x-2}.$$

$$\to \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2| + 2x - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)} + 2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$= \boxed{1}$$

$$\to \lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2| + 2x - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\cancel{x-2} + 2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \boxed{3}$$

Το $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ δεν υπάρχει!

Η f όχι παρ/μη στο 2.

14. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 1 \\ ax+\beta, & x>1 \end{cases}$.

Είναι παρ/μη στο 1!.

Άρα είναι συνεχής στο 1.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} x^3 = \lim_{x\to 1^+} ax+\beta \iff \boxed{1 = a+\beta}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax+\beta-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax+\cancel{1}-a-\cancel{1}}{x-1} \quad \beta=-2.$$

$$3 = \lim_{x\to 1^+} \frac{a\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \quad a=3$$

Επόμενο Μάθημα

Σελ 285

2 α γ.

3 α

4 α

5 α β.

6

10 .

Σελ 285

2 (α) $f(x) = x^2+1$

$$\boxed{f'(x) = 2x}$$

$$f'(1) = 2\cdot 1 = 2.$$

β' τρόπος

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2.$$

(γ). $f(x) = x^3+1$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(1) = 3.$$

β' τρόπος

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+1-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$$

3. (a) $f(x) = \sqrt{x+1}$

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\sqrt{x+1}} = +\infty$$

4. (a) $f(x) = x|x|$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x|x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

5. (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x<0 \\ x^3, & x \geq 0. \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$\bullet\ f(0) = 0$

Συνεχής στο 0!

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

$$f'(0) = 0$$

5. (β) $f(x) = \begin{cases} 1+\eta\mu x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1+\eta\mu x) = 1 \\ &\bullet \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \end{aligned}\right\} \text{Το όριο δεν υπάρχει.}$$

Όχι συνεχής στο 0

Όχι παρ/μη στο 0.

6. $\boxed{x+2 \le f(x) \le x^2+x+2}$

(α) $2 \le f(0) \le 2 \Rightarrow f(0)=2$.

$f'(0)=1$

(β) $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-2}{x}}$

$x \le f(x)-2 \le x^2+x$

$x<0$

ομοίως $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-2}{x} = 1$,

$x>0$

$1 \le \frac{f(x)-2}{x} \le x+1$

$\bullet \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \quad \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-2}{x} = 1$

10. f συνεχής στο 0.

$g(x) = f(x)\,\eta\mu x$.

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)\,\eta\mu x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} f(x)\,\frac{\eta\mu x}{x} = f(0) \cdot 1 = f(0)$$

12. (α) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$$

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln x = 0$

$\Big\}$ Όχι συνεχής στο 0

Όχι παρ/μη στο 0.

13. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - a^2x, & x < 1 \\ 5x + a - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

(α) Συνεχής στο 1.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 - a^2x) = 3 - a^2$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 5x + a - 4 = 1 + a$

$\Leftrightarrow$

$3 - a^2 = 1 + a$

$a^2 + a - 2 = 0$

$a = -2$ $\quad$ $a = 1$.

(β) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - a^2x - (1+a)}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - a^2x - 1 - a}{x - 1}$

(Β) Αν $\alpha = -2$ τότε

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x, & x < 1 \\ 5x - 6, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{6x - 4}{1} = 2.$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{5x - 6 + 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{5x - 5}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{5}{1} = 5.$$

Όχι παρ/μη για $\underline{\alpha = -2}$

Αν $\alpha = 1$ τότε και;

Επομαο Μαθημα

Σελ 320

21

22

23

24

25.

Ασκησαι για ολουΣ

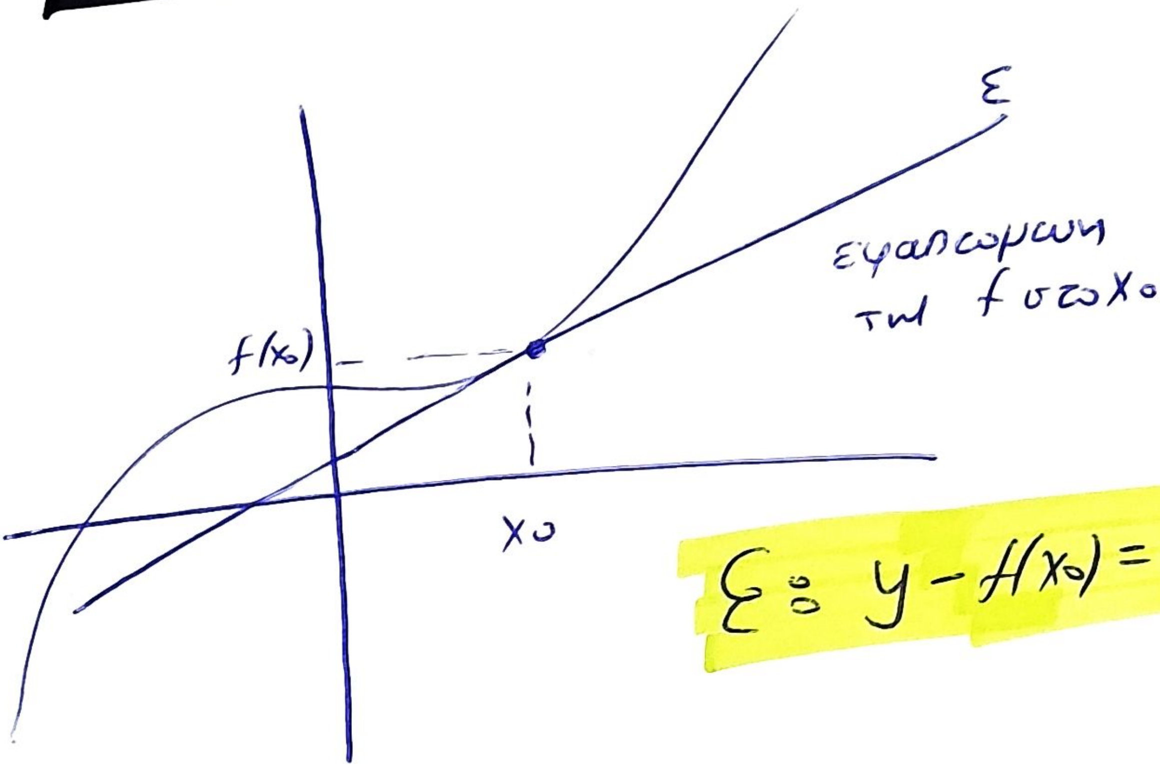
Κωσταντινα- Δημητρα

Λυνουν το pdf τηΣ πλατφορμαΣ.

Ραφαελα - ΚωσταντινοΣ

1.6
1.7
1.14
1.18
1.21
1.28
1.31.

Εφαπτομενη της f στο x_0



$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

2 Σελ 338

(γ) $f(x) = \ln x \qquad x_0 = 1$.

$$\boxed{\varepsilon : y - f(1) = f'(1)(x-1)}$$

- $f(1) = \ln 1 = 0 \qquad f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \qquad f'(1) = 1$

$y - 0 = 1 \cdot (x-1)$

$$\boxed{y = x - 1}$$

3 $f(x) = \ln(1+e^x)$ Βρε εφαπτομένη της C_f. σε σημείο με τεταγμένη $y_0 = \ln 2$.

$f(x) = \ln 2$

$\ln(1+e^x) = \ln 2$

$1 + e^x = 2$

$e^x = 1$

$x = 0$

$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

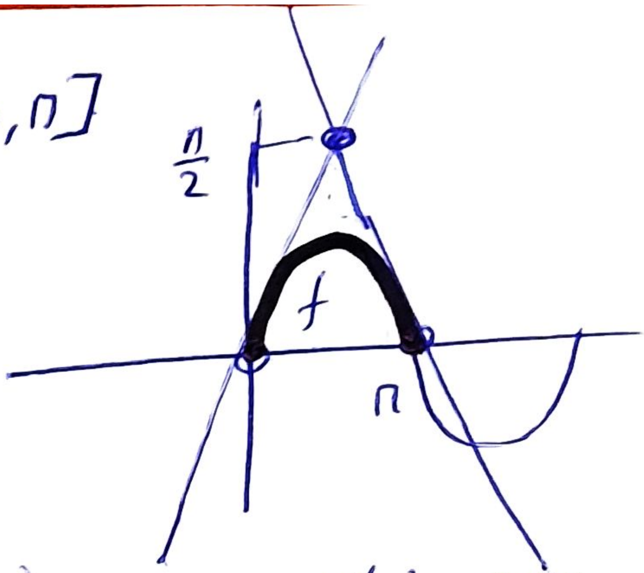
$f'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{y - f(0) = f'(0)(x-0)}$$

$y - \ln 2 = \frac{1}{2}x$

$y = \frac{1}{2}x + \ln 2$

4. $f(x)=ημx \quad , x\in[0,π]$



ⓐ $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$y-f(π)=f'(π)(x-π)$.

$f'(x)=συνx$

$\left.\begin{array}{l} \cdot f(0)=ημ0=0 \\ \cdot f'(0)=συν0=1 \end{array}\right\}\ y-0=1(x-0)$

$\boxed{y=x}$

$\left.\begin{array}{l} \cdot f(π)=ημπ=0 \\ \cdot f'(π)=συνπ=-1 \end{array}\right\}\ y-0=-(x-π)$

$\boxed{y=-x+π}$

ⓑ. $E=\frac{B\cdot U}{2}=\frac{π\cdot\frac{π}{2}}{2}=\frac{π^2}{4}$

$\begin{cases} y=x \\ y=-x+π \end{cases} \iff x=-x+π \iff 2x=π$

$x=\frac{π}{2}$

$y=\frac{π}{2}$

5. (a) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu 2x, & x \leq 0 \\ 2x + \sigma\upsilon\nu x - 1, & x > 0 \end{cases}$

$$\boxed{\varepsilon : y - f(0) = f'(0)(x-0)}$$

- $f(0) = \eta\mu 2 \cdot 0 = 0$ $\quad f(0)=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\eta\mu 2x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2\sigma\upsilon\nu 2x}{1} = 2$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2-\eta\mu x}{1} = 2$

$f'(0)=2$

$$\varepsilon : y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$$y - 0 = 2(x-0)$$

$$y = 2x$$

12. (β) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x e^{x}} = -\infty$

$$\to \lim_{x\to -\infty} x e^{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{x}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

(γ) . $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{e^{x} \ln(1+e^{-x})} = +\infty$

$$\to \lim_{x\to -\infty} e^{x} \ln(1+e^{-x}) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$$

$$\xrightarrow[\substack{x\to -\infty \\ y\to +\infty}]{e^{-x}=y} \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln(1+y)}{e^{y}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\frac{1}{1+y}}{e^{y}} =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{e^{y}(1+y)} = 0.$$

6. (β) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\cancel{\frac{\ln x}{x}}^{0} - 1 + \frac{1}{x}\right)$

$= +\infty(0-1+0)$

$\underline{\underline{= -\infty}}$

$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

(δ) $\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x + e^x - 1) =$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \cancel{\frac{\ln x}{x}}^{0} + \cancel{\frac{e^x}{x}}^{+\infty} - \cancel{\frac{1}{x}}^{0}\right) = +\infty\cdot(1-0+\infty-0)$

$\underline{\underline{= +\infty}}$

$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$

(στ) $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - \ln x - 2^x) =$

$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \cancel{\frac{\ln x}{x^2}}^{0} - \cancel{\frac{2^x}{x^2}}^{+\infty}\right) = +\infty(-\infty) = -\infty$

$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$

$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{2} = +\infty$

Σελ 358

11. (β) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x \overset{0\cdot\infty}{=}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3x^2}{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^6}{3x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3}{3} = 0.$$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} \ln x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}}} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{1/x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{e^{1/x}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{e^{1/x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x \cdot \frac{1}{e^{1/x}} = 0 \cdot 0 = 0.$$

(52) $$\lim_{x\to-\infty} e^{x}\ln(x^2+1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\frac{1}{e^{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{e^{-x}(x^2+1)} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{-x}}\cdot\frac{2x}{x^2+1}$$

$$= 0\cdot 0$$

$$= 0.$$

$$\to \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

$$\to \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Επομενο Μαθημα

Σελ 338

2 α β

Κινοστ + Ραφ.

Σελ 360

23

24

25

26

27

28

29

30

Κινοστ + Ραφ.

Δημ. + Κωνσταν.

pdf.

Βασικη Ασκηση

Εστω $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x<0 \\ x\ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$

(α) Είναι η f συνεχής;

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x+1) = 0\cdot \ln 1 = 0\cdot 0 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αρα } \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0. \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Συνεχής στο } 0!$$

Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως π.δ.σ άρα συνεχής παντού!.

(β) Είναι παραγωγίσιμη;

• $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{1} = 1.$

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x+1)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\ln(x+1)}{\cancel{x}} = 0$

Η $f(x)$ όχι παρ/μη στο 0

και κατ' επέκταση γνωστά

(γ). Βρες την $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x<0 \\ \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}, & x>0. \end{cases}$$

(δ). ε1: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$.

$y - (\frac{1}{e} - 1) = \frac{1}{e}(x+1) \Rightarrow y - \frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$

$y = \frac{1}{e}x + \frac{2}{e} - 1$

ε2: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$\boxed{y - \ln 2 = (\ln 2 + \frac{1}{2})(x-1)}$.

Σελ 360 Συνέχεια στο 0!.

(23) $f(x) = \begin{cases} x\ln x + \alpha x - \beta, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \ln(-x) + \alpha, & x < 0. \end{cases}$

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}} \ln(-x) + \alpha\right) = \alpha$

$\longrightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \ln(-x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(-x)}{\dfrac{1}{e^{1/x}}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(-x)}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-\frac{1}{x}(-1)}{e^{-\frac{1}{x}}\left(+\frac{1}{x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2}{x e^{-\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{e^{-\frac{1}{x}}} = \dfrac{0}{e^{-(-\infty)}} =$

$= \dfrac{0}{e^{+\infty}} = \dfrac{0}{+\infty}$

$= 0 \cdot \dfrac{1}{+\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

$\cdot \lim_{x\to 0^+} H(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\cancel{x\ln x} + \alpha x - \beta\right) = -\beta$

$\rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$

Άρα $\alpha = -\beta = 1$

$\alpha = 1$ $\beta = -1$

29. $f(x) = \begin{cases} \ln x + a - 1, & x > 1 \\ e^{x-1} + \beta x - \beta, & x \leq 1 \end{cases}$

Αφού f παρ/μη στο 1 είναι και συνεχής

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{x-1} + \beta x - \beta = 1$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln x + a - 1 = a - 1$

$a - 1 = 1$

$\underline{\underline{a = 2}}$

- $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - \beta - 1}{x - 1} =$

$= \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = 1 + \beta$.

- $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x + a - 1 - 1}{x - 1} =$

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$

$\underline{\beta = 0}$

27. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$$e^x (f(x) - x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(α) $e^x f(x) - x e^x = f(x)$

$$e^x f(x) - f(x) = x e^x$$

$$f(x)(e^x - 1) = x e^x$$

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}, \quad x \neq 0.$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + x e^x}{e^x}$$

$$= 1.$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x e^x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}}$$

(B) i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{xe^x}{e^x-1}}{x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}(e^x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1.$$

ii). $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^x-1} - x =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{xe^x} - \cancel{xe^x} + x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x-1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

(D). $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 1 = \frac{1}{2}x \iff y = \frac{1}{2}x + 1$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{xe^x}{e^x-1} - 1}{x} =$$

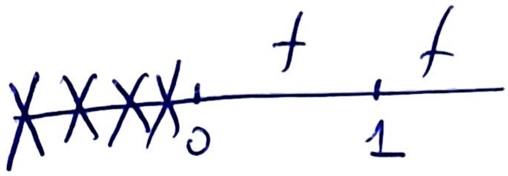
$$= \lim_{x \to 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{xe^x - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x}}{e^x + xe^x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{e^x} + x\cancel{e^x}}{\cancel{e^x} + \cancel{e^x} + x\cancel{e^x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+x}{1+1+x} = \frac{1}{2}.$$

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1, & x=1 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(α) Νδο f συνεχής!.



$\bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{x-1} = \dfrac{0}{-1} = 0.$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = 0.$

$\boxed{\text{Άρα } f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \text{ συνεχής στο } 0}$

$\bullet\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}}{1} = \underline{1}$

$\bullet\ f(1) = 1$

$\boxed{f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \text{ συνεχής στο } 1.}$

Η f συνεχής στο $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ ως π.δ.δ.

(β). $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x\ln x}{x-1} - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + \cancel{1} - \cancel{1}}{2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

(γ) i) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ii). $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\ln x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 1}{1}$

$$= +\infty$$

25. $f: (0,+\infty) \longrightarrow R$ συνεχής,

$$x f(x) - \ln x = f(x) \quad \forall x > 0.$$

ⓐ $x f(x) - f(x) = \ln x$

$$(x-1) f(x) = \ln x$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

$$f(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1, \end{cases}}$$

(B). $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

• $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$.

(Γ) i) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$.

ii). $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

24. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ Συνεχής.

ⓐ • $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$

$\underline{\underline{a = 1}}$

• $f(0) = a$

ⓑ . Εφαπτομένη στο 0.

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 0)$

$y = \dfrac{1}{2}x + 1$

(8) i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{-1}{-\infty} = 0.$

ii). $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \; \frac{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{DLH}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$

Επομενο Μαθημα

1. Δινεται f παραγωγισιμη

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+1}+\lambda x, & x<-1 \\ \dfrac{ax+a}{x+a}, & x\geq -1 \end{cases}$$

$\underline{\underline{a>1}}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

(α) νδο $\lambda=1$

(β) Νδο $a=2$ και να βρει την εφαπτομενη στο $A(-1,0)$.

2. Δινεται $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\geq 0 \\ 2-e^{-x}, & x<0 \end{cases}$.

(α) Ειναι συνεχης;

(β) Ειναι παραγωγισιμη;

(γ) Οριζεται η εφαπτομενη στο 0; Αν και βρες την.

(δ) Βρει την $f'(x)$.

3. Έστω f συνεχής $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

(α) νδο $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(β) Βρεί την εφαπτομένη στο $x_0 = 0$.

(γ) Βρεί το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} -x^3+3x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$.

Νδο η f είναι συνεχής αλλά όχι

παραγωγίσιμη στο 0.

5. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

όπου $a < -3$

Νδο η f συνεχής αλλά όχι παρ/μη στο 0

Άσκηση 1

Παρ/μη

$a>1$

$\lambda \in R$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \lambda x, & x < -1 \\ \dfrac{ax+a}{x+a}, & x \geq -1 \end{cases}$$

(α) Αφού f παρ/μη είναι και συνεχής.

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(e^{x+1} + \lambda x\right) = 1 - \lambda$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{ax+a}{x+a} = 0$

Άρα $1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

(β) $$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{e^{x+1} + x - 0}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{e^{x+1} + x}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{e^{x+1} + 1}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{ax+a}{x+a} - 0}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{ax+a}{(x+a)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{a\cancel{(x+1)}}{(x+a)\cancel{(x+1)}} = \frac{a}{a-1}$$

Απαιτώ αφού η f παρ/μη.

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}=2 \iff \alpha=2(\alpha-1)$$

$$\alpha=2\alpha-2$$

$$2=\alpha$$

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} e^{x+1}+x, & x<-1 \\ \dfrac{2x+2}{x+2}, & x\geq -1. \end{cases}}$$

$\varepsilon: \ y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

$y-0=2(x+1)$

$y=2x+2$

Άσκηση 2

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x \geq 0 \\ 2-e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

(α) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2-e^{-x}) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

$f(0) = 1$

Συνεχής στο 0!

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως π.σ.σ.

Άρα γενικά συνεχής.

(β) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2-e^{-x}-1}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-(-e^{-x})}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x}}{1} = 1$

Η f παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 1$.

Η f παρ/μη στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ως π.π.σ.

Άρα γενικά παραγωγίσιμη.

(γ) $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 1 = 1(x-0)$

$\boxed{y = x+1}$

(δ)

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x}, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Άσκηση 3

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

(α) Θέτω $\frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

$\left(\frac{1}{t}\right)^2 f(t) = \eta\mu \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} \cdot f(t) = \eta\mu \frac{1}{t}$

$f(t) = t^2 \eta\mu \frac{1}{t}$ ή $\boxed{f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, \quad x \neq 0}$.

$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0 \qquad f(0) = 0$

$-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x} \leq 1$

$\boxed{-x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \end{array}\right\}$ Από Κ.Π $\lim_{x \to 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0$.

(B) $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 0 = 0(x-0)$

$y = 0 \quad \cdot(x'x).$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \eta\mu\frac{1}{x} - 0}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\,\eta\mu\frac{1}{x} = 0$$

$$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$$

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le 1$$

$$|x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

$$\left|x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

$$-|x| \le x\,\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \lim_{x\to 0} -|x| = 0 \\ &\cdot \lim_{x\to 0} |x| = 0 \end{aligned}\right\} \text{Άρα Κ.Π. } \lim_{x\to 0} x\,\eta\mu\frac{1}{x} = 0.$$

β $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3+3x+1, & -1 \le x \le 0 \\ x^x, & 0 < x \le \frac{2}{e} \end{cases}$$

Άσκηση 4

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^3+3x+1) = 1$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = 0$$

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ και $f(0) = 1$

Συνεχής στο 0!.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3+3x+1-1}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3+3x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -x^2+3 = \boxed{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln x}(x\ln x)'}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^x\cdot(\ln x+1) = 1\cdot(-\infty+1)$$

$$= \boxed{-\infty}$$

<u>**Δεν**</u> είναι παρ/μη στο 0 !

Άσκηση 5

Δίνεται $f(x) = \begin{cases} ax^3-3x^2-x+1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$a<-3$

• $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax^3-3x^2-x+1 = 1$

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ Συνεχής στο 0!

$f(0)=1$

• $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x} =$

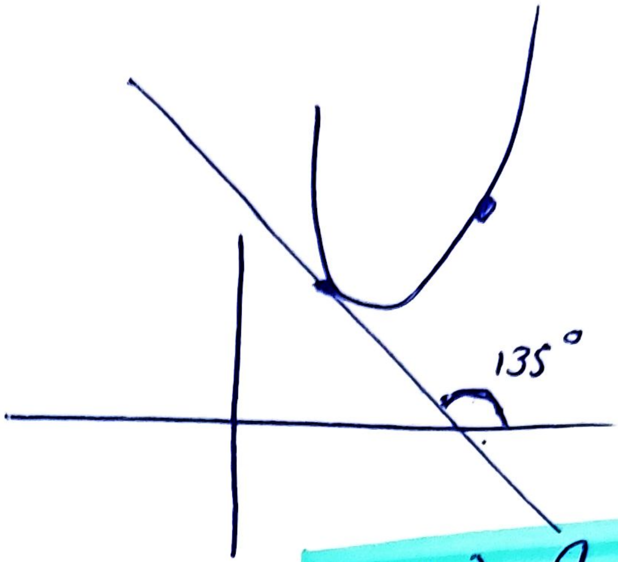
$= \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^2-3x-1}{1} = -1$

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Δεν είναι παρ/μη στο 0!

Σελ 339

6 $f(x) = x^2 - 2x + 3$



α) Έστω $M(x_0, f(x_0))$

Το σημείο επαφής.

$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x_0)$ κλίση

$\boxed{f'(x) = 2x - 2}$

$\varepsilon\varphi 135^\circ = f'(x_0)$

$-1 = 2x_0 - 2$

$2 - 1 = 2x_0$

$1 = 2x_0$

$\boxed{x_0 = \frac{1}{2}}$

$\varepsilon: y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{9}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y - \frac{9}{4} = -x + \frac{1}{2}$

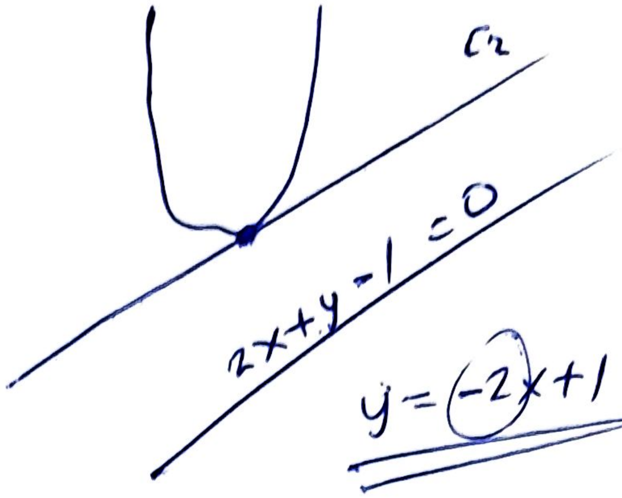
$y = -x + \frac{9}{4} + \frac{1}{2}$

$y = -x + \frac{11}{2}$

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + 3 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$
- $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = -1$

(B) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής.

$\varepsilon_2 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$



$y = -2x + 1$

Αφού $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon$

$\Rightarrow f'(x_0) = -2$

$2x_0 - 2 = -2$

$2x_0 = 0$

$x_0 = 0$

$\varepsilon_2 : y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

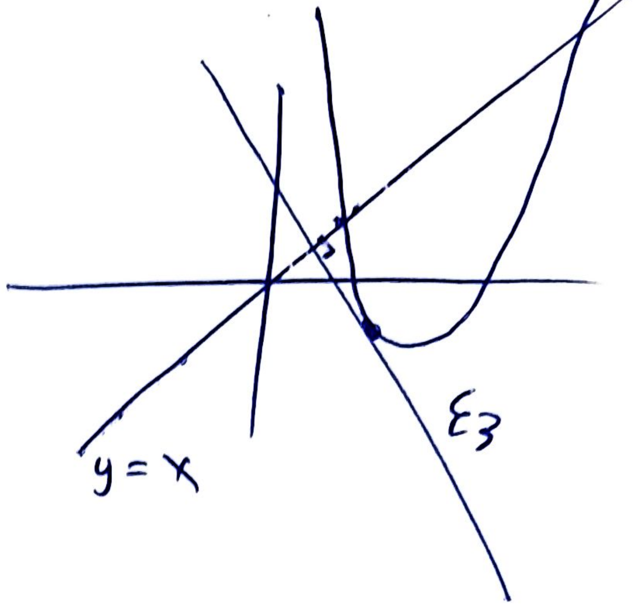
$y - 3 = -2x$

$\boxed{\varepsilon_2 : y = -2x + 3}$

γ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$

σημείο επαφής

$\varepsilon_3 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$



Αφού $\varepsilon_3 \perp y = x$

$\lambda_{\varepsilon_3} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1$

$f'(x_0) \cdot 1 = -1$

$f'(x_0) = -1$

$2x_0 - 2 = -1$

$2x_0 = 1$

$x_0 = \frac{1}{2}$

$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y = -x + \frac{11}{2}$

(δ). Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // $x'x$.

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$2x_0 - 2 = 0$

$x_0 = 1$

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

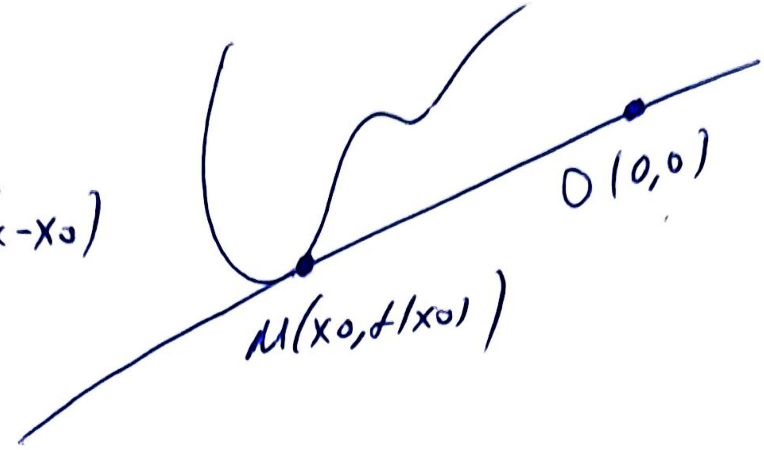
$y - 2 = 0(x-1)$

$y = 2$.

8. Δίνεται $f(x) = \frac{2x-1}{x}$, $x \neq 0$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$



$\downarrow$

$(0,0)$

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$$

$$-\frac{2x_0 - 1}{x_0} = \frac{1}{x_0^2}(-x_0) \Leftrightarrow \frac{2x_0 - 1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)'x - (2x-1)x'}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2x + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$2x_0 - 1 = 1$$

$$2x_0 = 2$$

$$x_0 = 1$$

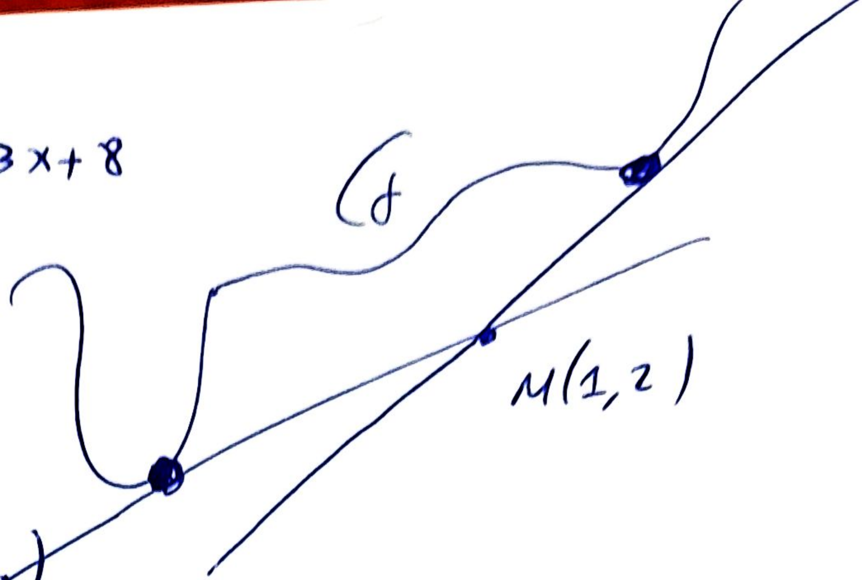
$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 1 = 1(x - 1)$$

$$y = x$$

9.

$f(x)=x^2-3x+8$



ⓐ Έστω $A(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής

$$\underbrace{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}_{\downarrow}.$$

$M(1,2)$

$f'(x)=2x-3$

$$2-f(x_0)=f'(x_0)(1-x_0)$$

$$2-(x_0^2-3x_0+8)=(2x_0-3)(1-x_0)$$

$$2-x_0^2+\cancel{3x_0}-8=2x_0-2x_0^2-3+\cancel{3x_0}$$

$$x_0^2-2x_0-3=0$$

$x_0=3$ $\qquad$ $x_0=-1$

$y-f(3)=f'(3)(x-3)$ $\qquad$ $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

(B) $B(3, 8)$ $\Gamma(-1, 12)$

Ψάχνω εφαπτομένη // $\varepsilon_{B\Gamma}$.

Έστω $K(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // $B\Gamma$

$$f'(x_0) = \lambda_{B\Gamma} = \frac{12-8}{-1-3}$$

$$f'(x_0) = \frac{4}{-4} = -1.$$

$2x_0 - 3 = -1$

$2x_0 = 2$

$x_0 = 1$

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

13. $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}$.

Αφού η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο $x_1 = 1$ // $x'x$. $\Rightarrow$ $f'(1) = 0$

Αφού η εφαπτομένη ε_2 της C_f στο $x_2 = 2$ σχηματίζει γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$ με τον $x'x$.

$$f'(2) = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4},$$

$$f'(2) = \varepsilon\varphi 135 = -1$$

$$f'(2) = -1$$

$$f'(x) = \alpha - \frac{\beta}{x^2}$$

$$f'(1) = \boxed{\alpha - \beta = 0}$$

$$f'(2) = \alpha - \frac{\beta}{4} = -1$$

$4\alpha - \beta = 4$

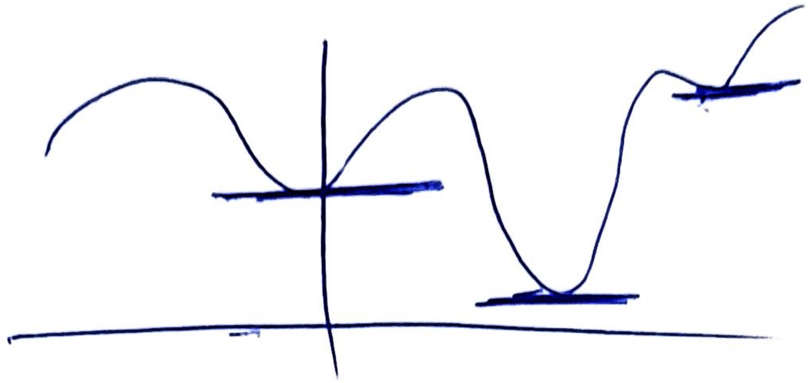
$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha - \beta = 4 \end{cases} \oplus$$

$3\alpha = 4$

$\alpha = 4/3$ $\beta = \frac{4}{3}$

16

$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$



Εστω $M(x_0, f(x_0))$ σημειο επαφης

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \parallel x'x$

$f'(x_0) = 0$

αρκει νδο η εξισωση 3 λυσεις.
αυτη εχει ακριβως

Αρκει νδο η $f'(x)$ τεμνει
τον $x'x$ 3 φορες.

$f'(x) = 4x^3 - 28x^2 + 24$

$f'(x) = 4\left(x^3 - 7x^2 + 6\right).$

$\longrightarrow x^3 - 7x^2 + 6 = 0$ $\qquad (x-1)(x^2-6x-6)=0$

$\Delta = 60 > 0$

$x=1$ $\qquad$ 2 ρίζες

1	−7	0	6	1
↓	1	−6	−6	
1	−6	−6	0	

Άρα η $f'(x)=0$ έχει 3 ρίζες.

Σωστό ?

17

Δίνεται $f(x) = e^x \cdot (x^2+2)$.

Αρκεί νδο $f'(x) \neq 0$.

$$f'(x) = e^x(x^2+2) + e^x \cdot 2x$$

$+$

$$f'(x) = e^x\,(x^2+2x+2) > 0$$

$+$ $\qquad \Delta < 0$

$$f'(x) > 0$$

Η ευθεία

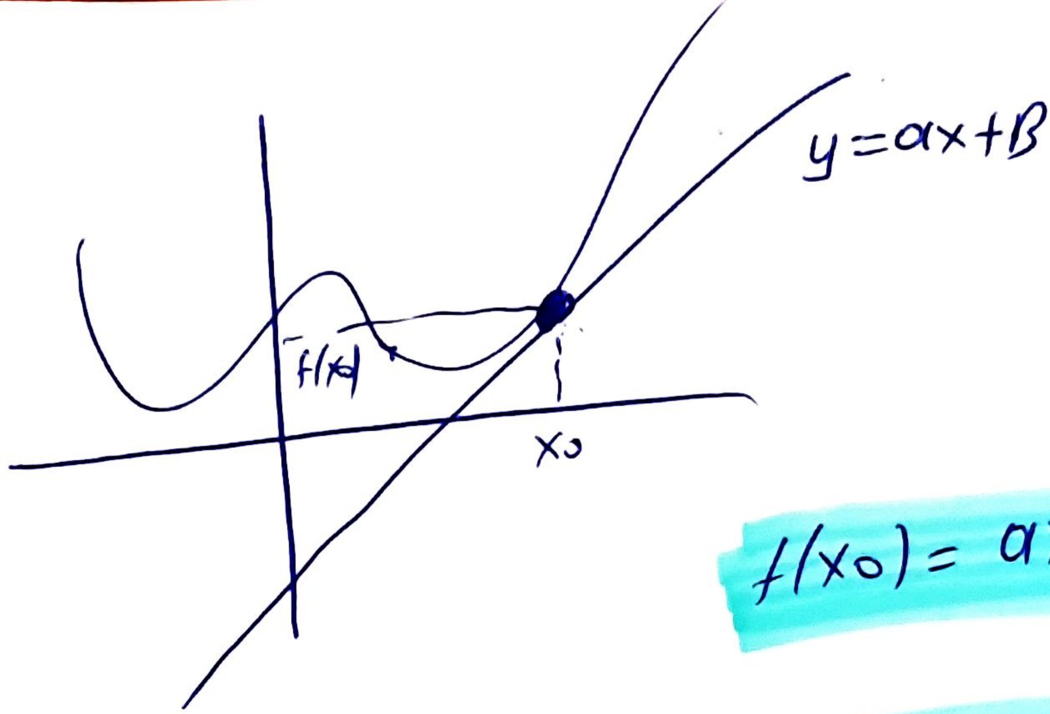
$$3x-4y+2=0$$

εφάπτεται της C_f στο 1.

$$3x+2=4y$$

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f(1)=\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{1}{2} \\ f'(1)=\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=\frac{5}{4} \\ f'(1)=\frac{3}{4} \end{cases}$$



$f(x_0) = a x_0 + B$

$f'(x_0) = a$

19 $f(x)=x^2-x+2$

η ε: $y=x+1$

Αρκει νδο $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$\begin{cases} f(x_0)=x_0+1 \Rightarrow x_0^2-x_0+2=x_0+1 \\ f'(x_0)=1 \Rightarrow 2x_0-\cancel{1}=\cancel{1} \end{cases}$$

$2x_0=2$

$x_0=1$

$\cancel{1^2}-\cancel{1}+2=1+1$

$2=2$ ✓

Η η ε: $y=x+1$

εφαπτεται

της C_f στο $(1, f(1))$

22

η : $y = \alpha x + 1$ εφάπτεται στο -1

τη $f(x) = \beta x^2 - \alpha x + 2$.

$f'(x) = 2\beta x - \alpha$

$$\begin{cases} f(-1) = -\alpha + 1 \\ f'(-1) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \alpha + 2 = -\alpha + 1 \\ -2\beta - \alpha = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + 2\alpha = -1 \\ -2\beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \oplus$$

$-\beta = -1$

$\beta = 1$

$\alpha = 1$

23

$x'x$ ვ $y=0$ $\sigma\tau o$ 1.

$f(x) = x^2+2a x+\beta$. $f'(x)=2x+2a$.

$$\begin{cases} f(1)=0 & \Rightarrow 1+2a+\beta=0 \quad \beta=1 \\ f'(1)=0 & \Rightarrow 2+2a=0 \end{cases}$$

$a=-1$

Επόμενο Μάθημα

Παρασκευή 4:30 – 6.

1. Στην αρχή του μαθήματος
   Τεστ στα βασικά ερωτήματα
   κλασματικής.

2. **Ασκήσεις**

Σελ. 338 - 339 - 340 - 341.

2 α β
5
7
20
10
21
11
24.
12
14