33. Σελ 64

$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{3}{2}$ → $2\alpha = -3\beta$

$\boxed{\alpha = -\frac{3}{2}\beta.}$

(α) $\frac{6\alpha - 3\beta}{5\beta} = \frac{6\cdot\left(-\frac{3}{2}\beta\right) - 3\beta}{5\beta} = \frac{-9\beta - 3\beta}{5\beta} = \frac{-12\beta}{5\beta}$

$= -\frac{12}{5}$.

(β) $\frac{5\alpha}{3\alpha+\beta} = \frac{5\left(-\frac{3}{2}\beta\right)}{3\left(-\frac{3}{2}\beta\right)+\beta} = \frac{-\frac{15}{2}\beta}{-\frac{9}{2}\beta+\beta} =$

$= \frac{-\frac{15}{2}\beta}{-\frac{7}{2}\beta} = \frac{2\cdot 15}{2\cdot 7} = \frac{15}{7}$.

38. Αν $x^2-y^2-2x=-1$

τότε $y=x-1$ ή $y=-x+1$

$x^2-y^2-2x+1=0$.

$x^2-2x+1-y^2=0$

$(x-1)^2-y^2=0$

$(x-1-y)(x-1+y)=0$

$x-1-y=0$ ή $x-1+y=0$

$y=x-1$

$y=1-x$

35. (α) Αν $\alpha+\beta+\gamma=24$ και $\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}$

Βρες α, β, γ.

$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=k \Rightarrow$ $\alpha=5k$, $\beta=3k$, $\gamma=4k$

$5k+3k+4k=24$

$12k=24$

$k=2$

$\alpha=10$

$\beta=6$

$\gamma=8$

39. (B) $\left(\frac{a+\beta}{a-\beta}\right)^{-1} \cdot \frac{a^{-2}-\beta^{-2}}{a^{-1}-\beta^{-1}} =$

$= \left(\frac{a-\beta}{a+\beta}\right)^{1} \cdot \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{\beta}}$

$= \frac{a-\beta}{a+\beta} \cdot \frac{\frac{\beta^2}{a^2\beta^2}-\frac{a^2}{a^2\beta^2}}{\frac{\beta}{a\beta}-\frac{a}{a\beta}}$

$= \frac{a-\beta}{a+\beta} \cdot \frac{\frac{\beta^2-a^2}{a^2\beta^2}}{\frac{\beta-a}{a\beta}}$

$= \frac{a-\beta}{a+\beta} \cdot \frac{a\beta(\beta^2-a^2)}{a^2\beta^2(\beta-a)}$

$= \frac{a-\beta}{a+\beta} \cdot \frac{(\beta-a)(\beta+a)}{a\beta(\beta-a)} = \frac{a-\beta}{a\beta}.$

40. (a) $(3x-1)^3 + (x-2)^3 + (3-4x)^3 = 0$.

$\rightarrow 3x-1+x-2+3-4x = 4x-4x-3+3 = 0$ ✓

$3(3x-1)(x-2)(3-4x) = 0$

$3x-1=0$ ή $x-2=0$ ή $3-4x=0$.

$x=\frac{1}{3}$ $x=2$ $x=\frac{3}{4}$.

(B). $(3x-1)^3 = x^3+(2x-1)^3$.

$(3x-1)^3 - x^3 - (2x-1)^3 = 0$.

$(3x-1)^3 + (-x)^3 + (1-2x)^3 = 0$

$\rightarrow 3x-1-x+1-2x=0$ ✓

$3(3x-1)(-x)(1-2x)=0$

$3x-1=0$ $x=\frac{1}{3}$

$-x=0$ $x=0$

$1-2x=0$ $x=\frac{1}{2}$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ ΜΟΝΟ ΑΝ $\alpha+\beta+\gamma=0$

Επαναληψη Μαθημα

Σελιδα 12-1.

Να λυσεις τα θεματα

της τραπεζας θεματων

που ακολουθουν.

Θέματα πραγματικών αριθμών

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy\,.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

Βασικοί κανόνες διάταξης.

1. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$

2. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \beta>0\end{matrix}\right\} \oplus$ $\alpha+\beta>0$

3. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha<0\\ \beta<0\end{matrix}\right\} \oplus$ $\alpha+\beta<0$

4. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \beta>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha\beta>0$ και $\frac{\alpha}{\beta}>0$

5. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha<0\\ \beta<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha\beta>0$ και $\frac{\alpha}{\beta}>0$

6. Ισχύει πάντα ότι $\alpha^2 \geq 0$

7. Αν $\alpha^2+\beta^2=0 \Rightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$.

8. Αν $\alpha^2+\beta^2>0 \Rightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.

9. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$

10. Αν $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

11. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\begin{cases} \alpha\gamma > \beta\gamma & , \gamma > 0 \\ \alpha\gamma < \beta\gamma & , \gamma < 0 \end{cases}$

12. $\left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{matrix}\right\} \oplus \quad \alpha + \gamma < \beta + \delta.$

Προσθέτω αφού βλέπω κάτω μέλη

13. $\left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{matrix}\right\} \odot \quad \alpha\gamma < \beta\delta$

Πολ/πω κατά μέλη θετικά ανισότητα

Δεν διαιρώ, δεν αφαιρώ ανισότητες κατά μέλη!

14. $\alpha < \beta \iff \alpha^\vee < \beta^\vee$

ΜΟΝΟ ΑΝ α, β ν Θετικοί.

15. $\alpha = \beta \iff \alpha^\vee = \beta^\vee$

ΜΟΝΟ ΑΝ α, β ν Θετικοί.

1. Να γίνουν οι πράξεις.

(α) $(2-x)^2 - x^2(1-2x)$

(β) $(2x-1)^3 - x(1-3x)^2$

(γ) $(-1-x)(-x+1) - (2-3x)(-2+3x)$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

(α) $\dfrac{x^2-81}{x^2-49} \cdot \dfrac{x^2-7x}{x^2+9x}$

(β) $\dfrac{x^2-25}{x^2-1} \cdot \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$

(γ) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+6xy+9y^2} \cdot \dfrac{3x^2y+9xy^2}{x-3}$

(δ) $\dfrac{x^2-16}{x+3} : \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$.

1. Αν $\alpha < 2 < \beta$ νδο $\alpha^2 + 2\beta > \alpha\beta + 2\alpha$

2. Αν $x > 4$ νδο $x^3 > 4x^2 - 3x + 12$

3. Νδο $3(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta \geq -2(\alpha + 2\beta)^2$

4. Νδο $x^2 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1$

5. Νδο $(\alpha - \beta)^2 + 8\beta^2 \geq 4\alpha\beta$

6. Νδο $4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

7. Νδο $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma)$.

8. Αν $\alpha > \beta > 0$ νδο $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$

9. Βρ.Δ τα $x, y \in \mathbb{R}$ ωστε

i) $2x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2xy$.

ii). $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

iii). $3x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 2x(y - z + 2)$.

1. Av $\alpha < 2 < \beta$ vδo $\alpha^2 + 2\beta > \alpha\beta + 2\alpha$.

$$\alpha^2 + 2\beta - \alpha\beta - 2\alpha > 0$$

$$\alpha(\alpha - \beta) - 2(\alpha - \beta) > 0$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha - 2) > 0.$$

(−) (−) ✓

- $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta < 0$
- $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha - 2 < 0$

2. Av $x > 4$ vδo $x^3 > 4x^2 - 3x + 12$.

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 12 > 0.$$

$$x^2(x-4) + 3(x-4) > 0$$

$$(x-4)(x^2+3) > 0$$

(+) (+) ✓

- $x > 4 \Rightarrow x - 4 > 0$
- $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 > 0$

3. Νδο $3(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta \geq -2(\alpha+2\beta)^2$

$\Rightarrow 3\alpha^2-3\beta^2+2\alpha\beta \geq -2(\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)$

$3\alpha^2-3\beta^2+2\alpha\beta \geq -2\alpha^2-8\alpha\beta-8\beta^2$

$3\alpha^2-3\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2+8\alpha\beta+8\beta^2 \geq 0$

$5\alpha^2+10\alpha\beta+5\beta^2 \geq 0$

$5(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) \geq 0$

$5(\alpha+\beta)^2 \geq 0$ που ισχυει.

4. Να δ.ο $x^2 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1$.

Πολ/ζω παντου με (x^2+1) ⊕

$$x^2(x^2+1) + \cancel{(x^2+1)}\frac{1}{\cancel{x^2+1}} \geq 1\cdot(x^2+1)$$

$$x^4 + \cancel{x^2} + \cancel{1} \geq \cancel{x^2} + \cancel{1}$$

$x^4 \geq 0$ που ισχυει ✓.

5. Να δ.ο $(\alpha-\beta)^2 + 8\beta^2 \geq 4\alpha\beta$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 8\beta^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 \geq 0$$

$$(\alpha - 3\beta)^2 \geq 0$$ ✓

6. Να δ.ο $4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

$$\underbrace{4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2} + \beta^2 \geq 0$$

$$(2\alpha - \beta)^2 + \beta^2 \geq 0$$ ✓

7. Nδο $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 2\alpha(\beta+\gamma)$.

$$2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 2\alpha\beta+2\alpha\gamma$$

$$2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma \geq 0$$

$$\underbrace{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}+\underbrace{\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2} \geq 0$$

$$(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\alpha)^2 \geq 0 \checkmark$$

8. Αν $\alpha>\beta>0$ νδο $\alpha^3-\beta^3>(\alpha-\beta)^3$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha-\beta)^3 \geq 0$$

$$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-(\alpha-\beta)^2\right)>0$$

$$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\right)>0$$

$$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2\right)>0$$

$$\boxed{(\alpha-\beta)\,3\alpha\beta>0} \checkmark$$

$(\alpha-\beta)$ ⊕ $3\alpha\beta$ ⊕⊕

• $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha-\beta>0$

9. i) $2x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2xy$

$2x^2 + y^2 + 4 - 4x - 2xy = 0$

$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$(x-2)^2 + (x-y)^2 = 0$

$x - 2 = 0$ atau $x - y = 0$

$x = 2$ $\qquad$ $x = y$

$y = 2$,

ii). $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

$x^2 + y^2 + 10 = 2x - 6y$

$x^2 + y^2 + 10 - 2x + 6y = 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$

$x - 1 = 0$ atau $y + 3 = 0$

$x = 1$ $\qquad$ $y = -3$

iii) . $3x^2+y^2+z^2+4 = 2x(y-z\cdot+2)$.

$$3x^2+y^2+z^2+4 = 2xy-2xz+4x$$

$$3x^2+y^2+z^2+4-2xy+2xz-4x=0$$

$$x^2-2xy+y^2 + x^2+2xz+z^2 + x^2-4x+4=0$$

$$(x-y)^2 + (x+z)^2 + (x-2)^2 = 0$$

$x-y=0$ ou $x+z=0$ ou $x-2=0$

$x=2$

$2-y=0$

$2+z=0$

$z=-2$

$y=2$

19 (A) Av $3(a-B)+1>5a-(7B-1)$

vdo $a<2B$

$3a-3B+1>5a+7B+1$

$3a-3B+1-5a-7B-1>0$

$-2a+4B>0$

$\frac{4B}{2}>\frac{2a}{2} \Rightarrow \boxed{2B>a}$

(B) Av $a(a-2)>a^2-2B$ vdo $a<B$.

$a^2-2a>a^2-2B$

$a^2-2a-a^2+2B>0$

$-2a+2B>0$

$\frac{2B}{2}>\frac{2a}{2} \Rightarrow \boxed{B>a}$

(C) $1-3(2a-B)<2B-(5a-1)$ vdo $a>B$.

$1-6a+3B<2B-5a+1$

$1-6a+3B-2B+5a-1<0$

$-a+B<0$

$\boxed{B<a}$

(5). Αν $\frac{1-\alpha}{2} - \frac{\beta-2}{4} > 1$ τότε $\beta < -2\alpha$.

$4\frac{1-\alpha}{2} - 4\frac{(\beta-2)}{4} > 4 \Rightarrow 2 - 2\alpha - \beta + 2 > 4 \Rightarrow$

$4 - 2\alpha - \beta > 4 \Rightarrow -2\alpha > 4 - 4 + \beta \Rightarrow \boxed{-2\alpha > \beta}$

22 (α) ν.δ.ο. $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $1 \leq x^2 + 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x^2 \geq 0$ ✓

- Ισχύει για κάθε x υψωμένο στο τετράγωνο και
- Ισχύει για $x = 0$

(β) ν.δ.ο. $\frac{2(a^2+1)}{2} \leq \frac{2a}{a^2+1} \leq \frac{2(a^2+1)}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^2 + 1 \geq 2a \geq a^2 + 1$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

• $-\frac{2(a^2+1)}{2} \leq \frac{2a^2+1}{a^2+1} \Rightarrow -a^2-1 \leq 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow -a^2-1-2a \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+1+2a \geq 0 \Rightarrow (a+1)^2 \geq 0$

• Ισχύει για οποιοδήποτε α και για 0.

$\frac{2(a^2+1)}{a^2+1} \leq \frac{2(a^2+1)}{2} \Rightarrow 2a \leq a^2+1 \Rightarrow 0 \leq a^2+2a+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+1)^2 \geq 0$

α

21 α) Αν $\alpha<0$ τότε $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$.

$$\alpha^2+\alpha\frac{1}{\alpha}+2\alpha \ge 0$$
$$\alpha^2+2\alpha+1 \ge 0$$
$$(\alpha+1)^2 \ge 0$$
(+)

Επειδή $\alpha<0$ και η αρχική ισχύει.

β) Αν $\alpha,\beta>0$ τότε

i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\ge\frac{4}{\alpha+\beta}$

$$\alpha\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\beta\frac{1}{\beta}\ge\alpha\beta\frac{4}{\alpha+\beta}$$
$$\beta+\alpha\ge\frac{\alpha\beta 4}{\alpha+\beta}$$
$$(\alpha+\beta)\beta+(\alpha+\beta)\alpha\ge(\alpha+\beta)\frac{\alpha\beta 4}{\alpha+\beta}$$
$$\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta 4\ge 0$$
$$\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2\ge 0$$
$$(\beta-\alpha)^2\ge 0$$

II). Να δ.ο $(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) \leq 4$

$$\alpha\frac{1}{\alpha} - \alpha\frac{1}{\beta} - \beta\frac{1}{\alpha} + \beta\frac{1}{\beta} - 4 \leq 0$$

$$-\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} - 4 \leq 0$$

$$-\alpha\beta\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta\frac{\beta}{\alpha} - 4\alpha\beta \leq 0$$

$$-\alpha^2 - \beta^2 - 4\alpha\beta \leq 0$$

$$-(\alpha+\beta)^2 \leq 0$$

(+)

III) $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\alpha+\beta}{1+\beta}$.

$$(\alpha+1)(\beta+1)\frac{\alpha}{(\alpha+1)} - (\alpha+1)(\beta+1)\frac{\alpha+\beta}{(\beta+1)} < 0$$

$$(\beta+1)\alpha - (\alpha+1)(\alpha+\beta) < 0$$

$$\alpha\beta+\alpha - (\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\beta) < 0$$

$$\alpha\beta+\alpha - \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta < 0$$

$$-\alpha^2 - \beta < 0$$

$$-(\alpha^2+\beta) < 0$$

(+)

44. Av $a>0$ vsa $a+a^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\geq 4$

$a\cdot a^2 + a^2\cdot a^2 + a^2\frac{1}{a} + a^2\frac{1}{a^2} - 4a^2 \geq 0$

$a^3 + a^4 + a + 1 - 4a^2 \geq 0$

~~$a^3(a+1) + (a+1) - (2a)^2 \geq 0$~~

~~$(a+1)(a^2+1) - (2a)^2 \geq 0$~~

~~$(a+1)(a+1)(a^2-a+1) - (2a)^2 \geq 0$~~

~~$(a+1)^2(a^2-a+1) - (2a)^2$~~

$a^4 + 2a^2 + 1 + a^3 + a - 2a^2 \geq 0$

$(a^2-1)^2 + a(a^2-2a+1) \geq 0$

$(a-1)^2(a+1)^2 + a(a-1)^2 \geq 0$

$(a-1)^2\left[(a+1)^2 + a\right] \geq 0$

$(a-1)^2(a^2+2a+1+a) \geq 0$

$(a-1)^2(a^2+3a+1) \geq 0$

$\oplus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$

43. (α) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta} \geq \alpha\beta$.

α, β θετικοί

$(\alpha+\beta)\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha+\beta)} - (\alpha+\beta)\alpha\beta \geq 0$

$\alpha^3+\beta^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2 \geq 0$

$\alpha^2(\alpha-\beta)-\beta^2(\alpha-\beta) \geq 0$

$(\alpha^2-\beta^2)(\alpha-\beta) \geq 0$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \geq 0$

$\therefore (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0$

(+) (+)

(β) νδο $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha+\beta)^3} \geq \dfrac{1}{4}$.

$4(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^3$

$4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)^2 \geq 0$

$4\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2 \geq 0$

$3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2 \geq 0$

$3(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) \geq 0$

$3(\alpha-\beta)^2 \geq 0$

(+)

50.

$\alpha > 0 \qquad \beta > 0$.

(α) ν.δ.ο $a + \frac{4}{a} \geq 4$

$a \cdot a + a\frac{4}{a} \geq 4a$

$a^2 + 4 \geq 4a$

$a^2 + 4 - 4a \geq 0$

$(a-2)^2 \geq 0$ ✓

Η ισότητα ισχύει για $a = 2$

(β) ν.δ.ο $\left(a + \frac{4}{a}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

- $a + \frac{4}{a} \geq 4$
- $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$

} ⊙ για κάθε $\alpha > 0$

$\left(a + \frac{4}{a}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ ✓

27

(α) $2x^2+y^2-2xy=0$

$x^2-2xy+y^2+x^2=0$

$(x-y)^2+x^2=0$

$x=0$ και $y=x$
και
$y=0$

(β) $2x^2+1+2xy-2x+y^2=0$

$x^2-2x+1+x^2+2xy+y^2=0$

$(x-1)^2+(x+y)^2=0$

$x=1$ και $y=-x$ άρα
και
$y=-1$

(6) $x^2+2y^2-2x+4y+3=0$,

$x^2-2x+1+2y^2+4y+2=0$

$(x-1)^2+y^2+2y+1+y^2+2y+1=0$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(y+1)^2=0$

$x=1$ and $y=-1$

Άσκηση για Τρίτη

1. Να υπολογίσετε η παράσταση

$$A = \frac{(x^3y^2)^{-2} \cdot (x^{-4}y^3)^{-1}}{(x^3 : y^2)^{-2}}$$

2. Να υπολογίσετε η παράσταση

$$A = (2x-1)^2 + (3x+1)^2 - (x+1)^3 + (-x+5)(x+5).$$

3. (α) Νδο $a(a-2) - (a-1)^2 = -1$

(β) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = 2025 \cdot 2023 - 2024^2$$

4. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\frac{x^3+x^2+3x+3}{x^3-4x} : \frac{x^2+2x+1}{x^2-5x+6}$$

5. (α) Να δ.ο $2(\alpha^2+\beta^2)-(\beta^2-\alpha^2)\geq 2\beta(3\alpha-\beta)$

(β) Αν $\alpha\leq -1$ τ.δ.ο $\alpha^3+1\leq \alpha^2+\alpha$

(γ) Αν $\alpha>1>\beta$ τ.δ.ο $\alpha+\beta>1+\alpha\beta$

6. Βρείτε τους x, y, λ ώστε

$$6x^2-4xy+4y^2+\lambda^2-12x+2x\lambda+9=0$$

3

(α) $a^2 - 4a + 4 \geq 0$

$(a-2)^2 \geq 0$ ✓

(β) $a^2 + 25 \geq 10a$

$a^2 - 10a + 25 \geq 0$

$(a-5)^2 \geq 0$ ✓

(γ) $a(a+2) \geq -1$

$a^2 + 2a + 1 \geq 0$

$(a+1)^2 \geq 0$ ✓

(δ) $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \geq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ ✓

(ε) $2(a^2+\beta^2) \geq (a-\beta)^2$

$2a^2+2\beta^2 \geq a^2-2a\beta+\beta^2$

$2a^2+2\beta^2-a^2+2a\beta-\beta^2 \geq 0$

$a^2+2a\beta+\beta^2 \geq 0$

$(a+\beta)^2 \geq 0$ ✓

(δ?) $2(a^2+9) \geq (a+3)^2$

$2a^2+18 \geq a^2+6a+9$

$2a^2+18-a^2-6a-9 \geq 0$

$a^2-6a+9 \geq 0$

$(a-3)^2 \geq 0$.

5. (A) $x^2+y^2-2x+1 \geq 0$

$x^2-2x+1 \quad +y^2 \geq 0$

$(x-1)^2 + \quad y^2 \geq 0$ ✓

(B) $x^2+y^2-4x+6y \geq -13$

$x^2+y^2-4x+6y+13 \geq 0$

$x^2-4x+4 \quad +y^2+6y+9 \geq 0$

$(x-2)^2 + \quad (y+3)^2 \geq 0$ ✓

6. (a) $x^2+y^2-6y+9=0$

$x^2 + \quad (y-3)^2 = 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\boxed{x=0}$ $\qquad y-3=0$

$\boxed{y=3}$

(β) $x^2+y^2-4x+2y+5=0$

$x^2-4x+y^2+2y+5=0$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=0$

$x-2=0$ $\quad$ $y+1=0$

$\boxed{x=2}$ $\quad$ $\boxed{y=-1}$

(γ) $x^2+y^2-10x+4y=-29$

$x^2+y^2-10x+4y+29=0$

$x^2-10x+25+y^2+4y+4=0$

$(x-5)^2+(y+2)^2=0$.

$x-5=0$

$x=5$

$y+2=0$

$y=-2$,

(δ) $x^2+4y^2-2x-4y+2\leq 0$

$x^2-2x+4y^2-4y+2\leq 0$

$x^2-2x+1+4y^2-4y+1\leq 0$

$(x-1)^2+(2y-1)^2\leq 0$

$(x-1)^2+(2y-1)^2=0$

$x-1=0$ $\quad$ $2y-1=0$

$x=1$ $\quad$ $y=\frac{1}{2}$

7. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+14=0$

$x^2-6x+9+y^2+2y+1+z^2-4z+4=0$

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=0$

$x-3=0$ $\quad$ $y+1=0$ $\quad$ $z-2=0$

$x=3$ $\quad$ $y=-1$ $\quad$ $z=2$

23. (a) Av $a<1$ vdo $a(a-1)^2 < 1-a^2$

$$a(a^2-2a+1) < 1-a^2$$

$$a^3-2a^2+a < 1-a^2$$

$$a^3-2a^2+a-1+a^2 < 0$$

$$a^3-a^2+a-1 < 0$$

$$a^2(a-1)+a-1 < 0$$

$$(a-1)(a^2+1) < 0 \quad \checkmark$$

(−) (+)

$a<1 \Rightarrow a-1<0$

(B) Av $a<B$ vdo $a^3-B^3 \le aB^2-a^2B$

$$a^3-B^3-aB^2+a^2B \le 0$$

$$a(a^2-B^2)+B(a^2-B^2) \le 0$$

$$(a^2-B^2)(a+B) \le 0$$

$$(a-B)(a+B)(a+B) \le 0$$

$$(a-B)(a+B)^2 \le 0$$

$(a-B)(a+B)^2 \le 0$

(−) (+) ✓

• $a<B$

$\Rightarrow a-B<0$

25. Av $x>1$ vdo $x^2-3x+3>\frac{1}{x}$.

$$x^3-3x^2+3x>1$$

$$x^3-3x^2+3x-1>0.$$

$$(x-1)^3>0$$ ✓

- $x>1 \Rightarrow x-1>0$

26. ⓐ $x^3y^2+x^3 \geq 2x^3y$ $\forall x \geq 0$

$$x^3y^2+x^3-2x^3y \geq 0$$

$$x^3(y^2+1-2y) \geq 0$$

$$x^3(y^2-2y+1) \geq 0$$

$$x^3 \ (y-1)^2 \geq 0$$ ✓

x^3 (+) $(y-1)^2$ (+)

- $x \geq 0$

(B) $x^2y^2 + 3x^2 + y^2 + 3 \geq 2xy^2 + 6x$

$x^2y^2 + 3x^2 + y^2 + 3 - 2xy^2 - 6x \geq 0$.

$x^2(y^2+3) + y^2+3 - 2x(y^2+3) \geq 0$

$(y^2+3)(x^2+1-2x) \geq 0$

$(y^2+3)\ (x-1)^2 \geq 0$

$(+)\quad (+)$ ✓

27. (a) $2x^2 + y^2 - 2xy = 0$

$x^2 + x^2 + y^2 - 2xy = 0$

$x^2 + (x-y)^2 = 0$

$x = 0$

$x - y = 0$

$y = x$

$y = 0$

(B) $2x^2+1+2xy-2x+y^2=0$

$x^2+x^2+2xy+y^2+1-2x=0$

$(x+y)^2+x^2-2x+1=0$

$(x+y)^2+(x-1)^2=0$

$x+y=0$ $\quad$ $x-1=0$

$y=-1$ $\quad$ $x=1$

(1) $x^2+2y^2-2x+4y+3=0$.

$x^2-2x+1+2y^2+4y+2=0$

$(x-1)^2+2(y^2+2y+1)=0$

$(x-1)^2+2(y+1)^2=0$

$x-1=0$ $\quad$ $y+1=0$

$x=1$ $\quad$ $y=-1$

28. (a) $x^2-4x+5>0$

$x^2-4x+4+1>0$

$(x-2)^2+1>0$ ✓

(b) $9x^2-6x+2>0$.

$9x^2-6x+1+1>0$

$(3x-1)^2+1>0$ ✓

(c). $2x^2+2x+1>0$

$x^2+x^2+2x+1>0$

$x^2+(x+1)^2>0$ ✓

Προσοχή

1. Όταν σύρω στο τσεφάγωνο
   → θετική αντίσταση η φορά ίδια.
   → αρνητική αντίσταση αλλιώς η φορά.
2. Όταν αντιστρέφω φορά αντίστασης αλλιώς τη φορά
3. Πρόσθετη αντίσταση αφού βάζω κατά μήκος
   Πολλά θετική αντίσταση κατά μήκος
   Αν είναι αρνητική αλλιώς η φορά.
   Δεν αφαιρώ - Δεν διαιρώ κατά μήκος.

Όταν λέμε ότι

$$2 \leq x \leq 5$$

εναλλακτικά το γράφουμε

$$x \in [2, 5]$$

"x ανήκει από 2 μέχρι 5 κλειστό"

Εάν όμως $2 < x \leq 5$

τότε $x \in (2, 5]$

"x ανήκει από 2 μέχρι 5 ανοιχτό"

Εάν $2 < x \leq 5$

$x \in (2, 5]$

Εάν $x > 2$ τότε $x \in (2, +\infty)$.

Εάν $x \leq 2$ τότε $x \in (-\infty, 2]$.

Λυμένη Άσκηση 1

Έστω $2 < x < 4$.

(α) $x+2$

- $2 < x < 4 \Rightarrow 2+2 < x+2 < 4+2 \Rightarrow \boxed{4 < x+2 < 6}$

(β) $x-3$

- $2 < x < 4 \Rightarrow 2-3 < x-3 < 4-3 \Rightarrow \boxed{-1 < x-3 < 1}$

(γ) $3x$

- $2 < x < 4 \Rightarrow 3 \cdot 2 < 3 \cdot x < 3 \cdot 4 \Leftrightarrow \boxed{6 < 3x < 12}$

(δ) $-4x$

- $2 < x < 4 \Rightarrow \boxed{-8 > -4x > -16}$

(ε) $2x^2$

- $2 < x < 4 \Rightarrow 2^2 < x^2 < 4^2 \Rightarrow 4 < x^2 < 16$

$$\boxed{8 < 2x^2 < 32}$$

(3) $\frac{1}{x} - x^3$

- $2 < x < 4 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{4}}$

- $2 < x < 4 \Rightarrow 2^3 < x^3 < 4^3 \Rightarrow 8 < x^3 < 64$

$\Rightarrow \boxed{-8 > -x^3 > -64}$

(+)

$$\frac{1}{2} - 8 > \frac{1}{x} - x^3 > \frac{1}{4} - 64$$

$$\boxed{-\frac{15}{2} > \frac{1}{x} - x^3 > -\frac{255}{4}.}$$

(4) $2(x-1)^2 + \frac{2}{x}$

- $2 < x < 4 \Rightarrow 1 < x-1 < 3 \Rightarrow 1^2 < (x-1)^2 < 3^2$

$1 < (x-1)^2 < 9$

$\boxed{2 < 2(x-1)^2 < 18}$

- $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{4} \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2} > 2\cdot\frac{1}{x} > 2\cdot\frac{1}{4}$

$1 > \frac{2}{x} > \frac{2}{4}.$

(+)

$\boxed{\frac{2}{4} < \frac{2}{x} < 1.}$

$$2 + \frac{2}{4} < 2(x-1)^2 + \frac{2}{x} < 19$$

Λυμένη άσκηση 2

Έστω $1 < x < 2$ και $2 < y < 3$

(α) $x+y$

- $1 < x < 2$
- $2 < y < 3$

} ⊕ $\boxed{3 < x+y < 5}$

(β) $x \cdot y$

- $1 < x < 2$
- $2 < y < 3$

} $\boxed{2 < xy < 6}$

(γ) $x-y$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 2 > x > 1$
- $2 < y < 3 \Rightarrow -2 > -y > -3$

} ⊕ $\boxed{0 > x-y > -2}$

(δ) $\frac{x}{y}$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 2 > x > 1$
- $2 < y < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$

} ⊙ $\boxed{1 > \frac{x}{y} > \frac{1}{3}}$

12. $1 < x < 2$

(a) x^2+1

$\cdot 1 < x < 2 \Rightarrow$

$1^2 < x^2 < 4 \Rightarrow 1+1 < x^2+1 < 4+1 \Rightarrow$

$\boxed{2 < x^2+1 < 5}$

(B) $2x^3-1$

$\cdot 1 < x < 2 \Rightarrow 1 < x^3 < 8 \Rightarrow 2 < 2x^3 < 16$

$\boxed{1 < 2x^3-1 < 15}$

(γ) $1 - \frac{4}{x^2}$

$\cdot 1 < x < 2 \Rightarrow 1 < x^2 < 4 \Rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{4}$

$-4 < -\frac{4}{x^2} < -1$

$-3 < 1 - \frac{4}{x^2} < 0$

⑧ $(x+1)^2 - 2$ · $1 < x < 2 \Rightarrow$

$2 < x+1 < 3 \Rightarrow 4 < (x+1)^2 < 9$

$4-2 < (x+1)^2 - 2 < 9-2 \Rightarrow$

$2 < (x+1)^2 - 2 < 7$

11. $1 < x < 3$ ve $2 < y < 5$

(a) $x+y$

$1 < x < 3$
$2 < y < 5$
$\Big\}$ (+) $\Rightarrow 3 < x+y < 8$

(b) xy

$1 < x < 3$
$2 < y < 5$
$\Big\} \Rightarrow 2 < xy < 15$

(c) $2x+y$

$1 < x < 3 \Rightarrow 2 < 2x < 6$
$2 < y < 5$ ⟶ (+)

$4 < 2x+y < 11$

(d) $x-3y$

$1 < x < 3 \Rightarrow 3 > x > 1$
$2 < y < 5 \Rightarrow -6 > -3y > -15$
$\Big\} -3 > x-3y > -14$

(3) $x-y$

$1 < x \leq 3 \Rightarrow 3 \geq x > 1$
$2 \leq y < 5 \Rightarrow -2 \geq -y > -5$
$+$
$1 > x - y > -4$

(52) $\frac{x}{y}$

$1 < x \leq 3 \Rightarrow 3 \geq x > 1$
$2 \leq y < 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$
$\times$
$\frac{3}{2} \geq \frac{x}{y} > \frac{1}{5}$.

36. $x \in [3,5]$ και $y \in [-2,-1]$

(α) $y-x$

- $3 \le x \le 5 \Rightarrow -3 \ge -x \ge -5$
- $-2 \le y \le -1 \Rightarrow -1 \ge y \ge -2$

$\Big\} \oplus \; -4 \ge y-x \ge -7$

(β) x^2+y^2

- $3 \le x \le 5 \Rightarrow 3^2 \ge x^2 \ge 5^2 \Rightarrow 9 \ge x^2 \ge 25$
- $-2 \le y \le -1 \Rightarrow (-2)^2 \ge y^2 \ge (-1)^2 \Rightarrow 4 \ge y^2 \ge 1$

$\Big\} \oplus \; 13 \ge x^2+y^2 \ge 26$

(γ) $\frac{x}{y}$

- $3 \le x \le 5 \Rightarrow 5 \ge x \ge 3$
- $-2 \le y \le -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{-1}$

$\Rightarrow 3 \le x \le 5$, $\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1$ $\Big\}$ (·)

$\frac{3}{2} \le \frac{x}{y} \le 5$

35. $x \in [2,3] \Rightarrow 2 \le x \le 3$

$y \in [1,2] \Rightarrow 1 \le y \le 2$.

(α) $x+y = 3 \le x+y \le 5$

- $2 \le x \le 3$
- $1 \le y \le 2$

} ⊕ ↑

(β) $2x-3y =$

- ~~$2 \le x \le 3 \Rightarrow 2+2 \le x+x \le 3+3 \Rightarrow 4 \le 2x \le 6$~~
- ~~$1 \le y \le 2 \Rightarrow 3+1 \le x+y \le 3+2 \Rightarrow 4 \le x+y \le 5$~~
- $2 \le x \le 3 \Rightarrow 4 \le 2x \le 6 \Rightarrow 6 \ge 2x \ge 4$ } ⊕
- $1 \le y \le 2 \Rightarrow -3 \ge -3y \ge -6$

$3 \ge 2x-3y \ge -2$

(γ) $\frac{x}{y}$

~~$2x-3y$~~

$2 \le x \le 3 \Rightarrow 3 \ge x \ge 2$

$1 \le y \le 2 \Rightarrow \frac{1}{1} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2}$ } ⊕ $\frac{3}{1} \ge \frac{x}{y} \ge \frac{2}{2}$ } $1 \ge \frac{x}{y} \ge 1$

(δ) x^2-y^2

$2 \le x \le 3 \Rightarrow 2^2 \le x^2 \le 3^2 \Rightarrow 4 \le x^2 \le 9$

$1 \le y \le 2 \Rightarrow 1^2 \le y^2 \le 2^2 \Rightarrow 1 \le y^2 \le 4$

$y \Rightarrow -4 \le -y^2 \le -1$ ⊕ $-1 \le x^2-y^2 \le 5$

$x \Rightarrow 4 \le x^2 \le 9$ }

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Δώνεται το pdf

+

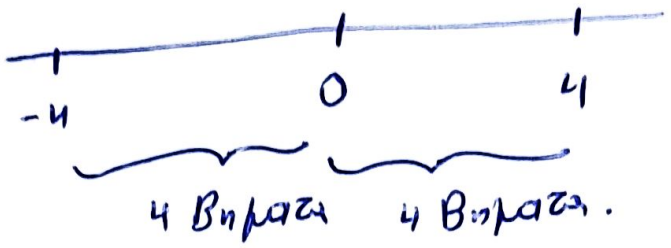
Σελ 90

(8)

(13).

Απόλυτη Τιμή

1.



- $|4| = 4$
- $|-4| = 4$

2. Συμμετρική ιδιότητα.

(α) $|x| \overset{(+)}{=} x$

(β) $|x| \overset{(-)}{=} -x$

(γ) $|x| \geq 0$

(δ) $|x| = |-x|$

(ε) $|x|^2 = x^2$

(ζ) $|xy| = |x||y|$

(η) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(θ) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(ι) $|x| \geq x$

(κ) $|x| \geq -x$

1. (E) $\left| 1 + |-2| \right| - \left| 3 - |-5| \right| =$

$= \left| 1+2 \right| - \left| 3-5 \right| = |3| - |-2| =$

$= 3 - 2 = 1.$

3. (B) $B = |\pi - 4| + |\sqrt{2} - 2| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

- $\pi < 4 \Rightarrow \pi - 4 < 4 - 4 \Rightarrow \pi - 4 < 0$
- $\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} - 2 < 0$
- $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$

$B = -\pi + 4 - \sqrt{2} + 2 - (-\sqrt{2} + \sqrt{3})$

$B = -\pi + 4 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

$\boxed{B = -\pi + 6 - \sqrt{3}.}$

4. (δ) $|-x^2+10x-25| = |x^2-10x+25| =$

$= |\overset{(+)}{(x-5)^2}| = (x-5)^2$

(ε) $|\overset{(+)}{|x|+1}| - |x| = |x|+1-|x| = 1$

7. (β) $B = |2-|\overset{(+)}{x-3}|| = |2-(x-3)| =$

• $3<x<5 \Rightarrow 0<x-3<2$

$= |2-x+3| = |\overset{(+)}{5-x}| = 5-x$

• $3<x<5 \Rightarrow -3>-x>-5 \Rightarrow 2>5-x>0$

(δ) $\Gamma = |\overset{(+)}{x-2}| + |\overset{(-)}{x-6}| + |\overset{(+)}{x}| = x-2-x+6+x = x+4$

• $3<x<5 \Rightarrow 1<x-2<3$

• $3<x<5 \Rightarrow -3<x-6<-1$

• $3<x<5$

8. (γ) $A = |\overset{\oplus}{x-2}| - |\overset{\oplus}{x-3}| = x-2-(x-3) =$

$= x-2-x+3 = 1$.

- $x > 3 \Rightarrow \boxed{x-2 > 1}$
- $x > 3 \Rightarrow \boxed{x-3 > 0}$

10. (B) $B = \left| |\overset{-}{\alpha-\beta}| + |\overset{-}{\beta-\gamma}| \right| = |-\alpha+\beta-\beta+\gamma|$

$= |\overset{+}{\gamma-\alpha}| = \gamma-\alpha$.

- $\boxed{\alpha < \beta < \gamma}$
- $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha-\beta < 0$
- $\beta < \gamma \Rightarrow \beta-\gamma < 0$
- $\gamma > 0 \Rightarrow \gamma-\alpha > 0$

Άσκηση 5

1. Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \frac{(x^{-2}y)^3 : [(x^2)^2 y]}{x^3 : (x^{-2})^2}$$ αν $x = -1$, $y = 1$.

2. Να γίνει η απλοποίηση.

$$A = (2x-1)^2 - (-x+1)(1+x) - (1-x)^3 - x(x^2-x)$$

3. Νδο $(x-1)^2 - x(x-2) = 1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την παράσταση

$$2023^2 - 2024 \cdot 2022.$$

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{x^2-9}{x^3-3x^2+2x-6} \cdot \frac{x^2-1}{x^3+3x}$$

5. Έστω $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{1, 2\}$.

Βρείτε $A \cup B$, $A \cap B$, A', B'.

6. Αν $\alpha < 2 < \beta$ νδο $\alpha^2 + 2\beta > \alpha\beta + 2\alpha$

7. Νδο $3(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta \geq -2(\alpha + 2\beta)^2$

8. Νδο $4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

9. Αν $\alpha < \beta$ νδο $\alpha^{2025} + \frac{1}{\alpha} < \beta^{2025} + \frac{1}{\beta}$.

10. Βρ. x, y ώστε $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

11. Εαν $1 < x < 2$ και $2 < y < 3$.

(α) $2x - 3$ (β) $x^3 - xy$.

Στόχοι Μαθήματος

1. Λύνουμε τις ασκήσεις.
2. Να έχουμε σχολικό βιβλίο
3. Θα γράφουμε προετοιμασία διδασκαλίας.

1. $A = \dfrac{(x^{-2}y)^3 : [(x^2)^2 y]}{x^3 : (x^{-2})^2}$ Av $x=-1$ και $y=1$.

$$A = \frac{(x^{-6}y^3) : (x^4 y)}{x^3 : x^{-4}} = \frac{x^{-10}y^2}{x^7} = x^{-17}y^2$$

$$A = \frac{1}{x^{17}}y^2$$

$$A = \frac{1}{(-1)^{17}}\,1^2 = -1 \cdot 1 = -1.$$

2. $A = (2x-1)^2 - (-x+1)(1+x) - (1-x)^3 - x(x^2-x)$

$$A = 4x^2 - 4x + 1 - (1 - x^2) - (1 - 3x^2 + 3x - 1) - x^3 + x^2$$

$$A = 4x^2 - 4x + 1 - 1 + x^2 - 1 + 3x^2 - 3x + 1 - x^3 + x^2$$

$$\boxed{A = -x^3 + 9x^2 - 7x}$$

3. $(x-1)^2 - x(x-2) = 1$.

$x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x = 1$

$0 = 0$.

Πρεπει να Βρω τι αριθμο θα Βαλω στη θεση του x ωστε να προκυψει η παρασταση $A = 2023^2 - 2024 \cdot 2022$

Αν Βαλω $x = 2024$

$(2024-1)^2 - 2024 \cdot (2024-2) = 1$

$$2023^2 - 2024 \cdot 2022 = 1$$

4. $\dfrac{x^2-9}{x^3-3x^2+2x-6} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^3+3x} =$

$= \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)+2(x-3)} \cdot \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x^2+3)}$

$= \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+3)} \cdot \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x^2+3)}$

5. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

και $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{1, 2\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

$A \cap B = \{1, 2\}$

$A' = \{5, 6\}$.

$B' = \{3, 4, 5, 6\}$.

6. Αν $\alpha < 2 < \beta$ τότε $\alpha^2 + 2\beta > \alpha\beta + 2\alpha$.

$\alpha^2 + 2\beta - \alpha\beta - 2\alpha > 0$

$\alpha(\alpha - \beta) - 2(\alpha - \beta) > 0$

$(\alpha - \beta)(\alpha - 2) > 0$

$(-)$ $(-)$ ✓

- $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta < 0$
- $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha - 2 < 0$

7. $3(a^2-b^2)+2ab \geq -2(a+2b)^2$

$3a^2-3b^2+2ab \geq -2(a^2+4ab+4b^2)$

$3a^2-3b^2+2ab \geq -2a^2-8ab-8b^2$

$5a^2+10ab+5b^2 \geq 0$

$5(a^2+2ab+b^2) \geq 0$

$5(a+b)^2 \geq 0$ ✓

8. Ndo $4a^2-4ab+2b^2 \geq 0$

$2a^2-2ab+b^2 \geq 0$.

$a^2+a^2-2ab+b^2 \geq 0$

$a^2+(a-b)^2 \geq 0$ ✓

9. Αν $\alpha < \beta$ νδο $a^{2025} - \frac{1}{a} < \beta^{2025} - \frac{1}{\beta}$.

- $\alpha < \beta \Rightarrow a^{2025} < \beta^{2025}$ ⊕
- $\alpha < \beta \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{\beta} \Rightarrow -\frac{1}{a} < -\frac{1}{\beta}$

$$a^{2025} - \frac{1}{a} < \beta^{2025} - \frac{1}{\beta}.$$

10. $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

$x^2 + y^2 + 10 = 2x - 6y$

$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2 + 6y + 9}_{(y+3)^2} = 0.$

$x - 1 = 0$ $\quad$ $y + 3 = 0$

$x = 1$ $\quad$ $y = -3$.

11. Εαν $1<x<2$ και $2<y<3$

(α) $2x-3$

- $1<x<2 \Rightarrow 2<2x<4 \Rightarrow \boxed{-1<2x-3<1}$

(β) x^3-xy

- $1<x<2 \Rightarrow 1<x^3<8 \Rightarrow 8>x^3>1$

$\oplus$

- $1<x<2$
- $2<y<3$

$\Big\}\odot \; 2<xy<6 \Rightarrow -2>-xy>-6$

$6>x^3-xy>-5$

Λυμένες ασκήσεις στους απολύτους Τόμος

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση.

$$A = |\pi - 5| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |2 - \sqrt{3}| \quad (*)$$

- $\pi < 5 \Rightarrow \pi - 5 < 0$
- $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$
- $2 > \sqrt{3} \Rightarrow 2 - \sqrt{3} > 0$

Λύση

Έστω $2 < \sqrt{3} \Rightarrow 2^2 < \sqrt{3}^2 \Rightarrow 4 < 3$ Άτοπο!.

Άρα $2 > \sqrt{3}$.

$(*)$ $-\pi + 5 - (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) =$

$= -\pi + 5 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = \sqrt{2} + 3 - \pi$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση.

$$A = |2x^2+1| - |-x^2-1| + |x^2+2x+1| - |-x^2+6x-9|$$

- $x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2+1 > 0$
- $x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow -x^2-1 \leq -1$

$$A = 2x^2+1 - (x^2+1) + |(x+1)^2| - |x^2-6x+9|$$

$$A = 2x^2+1 - x^2 - 1 + (x+1)^2 - |(x-3)^2|$$

$$A = x^2 + x^2 + 2x + 1 - (x-3)^2$$

$$A = 2x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 6x + 9)$$

$$A = 2x^2 + 2x + 1 - x^2 + 6x - 9$$

$$A = x^2 + 8x - 8$$

3. Έστω $1<x<2$ να

απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = |\overset{(+)}{3x-1}| - |\overset{(-)}{1-2x}| - \left|-1-|\overset{(+)}{x-1}|\right|$$

- $1<x<2 \Rightarrow 3<3x<6 \Rightarrow 2<3x-1<5$
- $1<x<2 \Rightarrow -2>-2x>-4 \Rightarrow -1>1-2x>-3$
- $1<x<2 \Rightarrow 0<x-1<1.$

$$A = 3x-1-\left(-1+2x\right| - \left|-1-(x-1)\right|$$

$$A = 3x-1+1-2x-\left|-1-x+1\right|$$

$$A = x - |\overset{(-)}{-x}| = x-(+x) = x-x = 0.$$

- $1<x<2 \Rightarrow -1>-x>-2$

4. Έστω $1<x<2$ και $2<y<3$

Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \overset{\oplus}{|2x-y|} - \overset{\ominus}{|1-xy|}.$$

- $1<x<2 \Rightarrow 2<2x<4$ $\Rightarrow 2>2x>4$
- $2<y<3 \Rightarrow -2>-y>-3$ $\Big| \oplus$

$$0>2x-y>1.$$

- $1<x<2$
- $2<y<3$

$\Big\}\odot$ $2<xy<6$

$-2>-xy>-6$

$$-1>1-xy>-5$$

$$A = 2x-y-(-1+xy)$$

$$A = 2x-y+1-xy$$

Ε πομο Μαθημα

Σελ 111

(1) α β γ δ

(2) ολη

(3) α

(4) α β γ

(5) α β

(6)

(7) α.

(8) α β.

(9) α β

(10) α

(11) α β

(12) α β γ

(13) α β γ.

Σελ. 111

1.

(α) $|+5| = 5$

(β) $|-3| = 3$

(γ) $|0| = 0$

(δ) $|-7| + |+3| - |1-3| = 7 + 3 - |-2| = 10 - 2 = 8$

2. (α) $|\overset{(+)}{\pi - 3}| = \pi - 3$

• $\pi > 3 \Rightarrow \pi - 3 > 0$

(β) $|\overset{(+)}{4 - \pi}| = 4 - \pi$

• $4 > \pi \Rightarrow 4 - \pi > 0$

(γ) $|6 - 2\pi| = 2|\overset{(-)}{3 - \pi}| = 2(-3 + \pi) = -6 + 2\pi$

• $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$

(δ) $|\overset{(+)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

• $\sqrt{3} > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$

(ε) $|\overset{(+)}{\sqrt{2} - 1}| = \sqrt{2} - 1$

• $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 > 0$

(ϛ) $|\overset{(-)}{\sqrt{5} - 3}| = -\sqrt{5} + 3$.

• $\sqrt{5} < 3 \Rightarrow \sqrt{5} - 3 < 0$

3. (α) $A = |\overset{(+)}{\pi - 3}| + |\overset{(+)}{\sqrt{2} - 1}| - |\overset{(-)}{\sqrt{3} - 2}|$

- $\pi > 3 \Rightarrow \pi - 3 > 0$
- $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 > 0$
- $\sqrt{3} < 2 \Rightarrow \sqrt{3} - 2 < 0$

$A = \pi - 3 + \sqrt{2} - 1 - (-\sqrt{3} + 2)$

$A = \pi + \sqrt{2} - 4 + \sqrt{3} - 2 = \pi + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 6$.

4. (α) $|\overset{(+)}{x^2 + 1}| = x^2 + 1$

- $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1$

(β) $|\overset{(-)}{-x^2}| = x^2$

- $x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0$

(γ) $|x^2 - 2x + 1| = |\overset{(+)}{(x-1)^2}| = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

5. ⓐ $A = |x^2 - 4x + 4| - |-x^2 - 3|$

$A = |\overset{(+)}{(x-2)^2}| - |\overset{(-)}{-x^2 - 3}|$

$A = (x-2)^2 - (x^2 + 3)$

$A = \cancel{x^2} - 4x + 4 \cancel{-x^2} - 3$

$\boxed{A = -4x + 1}$

ⓑ $B = |6x - 9 - x^2| - |\overset{(+)}{x^4 + 1}|$

$B = |-6x + 9 + x^2| - (x^4 + 1)$

$B = |\overset{(+)}{(x-3)^2}| - x^4 - 1$

$B = x^2 - 6x + 9 - x^4 - 1$

$B = x^2 - 6x - x^4 + 8$

6. $5 < x < 10$

$$A = \frac{\overset{(+)}{|x-5|}}{x-5} + \frac{\overset{(-)}{|x-10|}}{x-10}.$$

- $5 < x < 10 \Rightarrow \boxed{0 < x-5 < 5}$
- $5 < x < 10 \Rightarrow \boxed{-5 < x-10 < 0}$

$$A = \frac{\cancel{x-5}}{\cancel{x-5}} + \frac{-x+10}{x-10} = 1 - \frac{\cancel{x-10}}{\cancel{x-10}} = 1-1=0.$$

7. (a) $A = \overset{(+)}{|x-3|} + \overset{(-)}{|x-5|}$

- $3 < x < 5 \Rightarrow \boxed{0 < x-3 < 2}$
- $3 < x < 5 \Rightarrow \boxed{-2 < x-5 < 0}$

$$A = x-3-x+5 = 2$$

8. $A = |\overset{(+)}{x-2}| - |\overset{(-)}{x-3}|$

(01) • $2 \le x \le 3 \Rightarrow \boxed{0 \le x-2 \le 1}$

• $2 \le x \le 3 \Rightarrow \boxed{-1 \le x-3 \le 0}$

$A = x-2-(-x+3)$

$A = x-2+x-3 = 2x-5$.

(B) $A = |\overset{(-)}{x-2}| - |\overset{(-)}{x-3}|$

• $x < 2 \Rightarrow \boxed{x-2 < 0}$

• $x < 2 \Rightarrow \boxed{x-3 < -1}$

$A = -x+2-(-x+3)$

$A = -x+2+x-3$

$A = -1$.

Επανάληψη

1ου

Διαγωνίσματος

Μαθηματικών

Βασικές ιδιότητες απολύτων

1. $|x| = \theta \iff x = \theta$ ή $x = -\theta$

2. $|x| = |y| \iff x = y$ ή $x = -y$

3. $|x| < \theta \iff -\theta < x < \theta$
$\Rightarrow x \in (-\theta, \theta)$.

4. $|x| > \theta \iff x > \theta$ ή $x < -\theta$
$x \in (-\infty, -\theta) \cup (\theta, +\infty)$.

1 Βρες τα x ώστε

(α) $|2x-4| = 2$

$\Rightarrow 2x-4=2$

$2x=6$

$\boxed{x=3}$

ή $2x-4=-2$

$2x=4-2$

$2x=2$

$\boxed{x=1}$

(Β) $|2x-3| = |1-3x|$

$2x-3 = 1-3x$

$2x+3x = 1+3$

$5x = 4$

$x = \frac{4}{5}$

ή $2x-3 = -1+3x$

$2x-3x = 3-1$

$-x = 2$

$x = -2$

(γ) $|3x-2| < 1$

$-1 < 3x-2 < 1$

$1 < 3x < 3$

$\frac{1}{3} < x < 1$ $\quad x \in (\frac{1}{3}, 1)$.

(8) $|3x| > 3$

$3x > 3$ ili $3x < -3$

$x > 1$ ili $x < -1$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

2. Να δ.ο $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ✳

Απόδειξη

$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

$\Leftrightarrow$

$|\alpha\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2$

$\Leftrightarrow$

$(\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2$

$\alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2$ ✓

Να δ.ο $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ✳

Απόδειξη

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

$\Leftrightarrow$

$|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$

$\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$

$\Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha\beta|$

$\alpha\beta \leq |\alpha\beta|$ ✓

3. Βασικές προτάσεις διάταξης. Χρήσεις για Σ-Λ.

1. $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$
2. $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$
3. $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
4. $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.
5. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$, $\gamma \neq 0$
6. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$, $\gamma > 0$
7. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$, $\gamma < 0$
8. $\left.\begin{matrix}\alpha < \beta \\ \gamma < \delta\end{matrix}\right\} \oplus \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$ Προσθέτω αφού κατά μέλη ανισώσεις.
9. $\left.\begin{matrix}\alpha < \beta \\ \gamma < \delta\end{matrix}\right\} \odot \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\delta$ μόνο αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί

Πολ/ζω κατά μέλη μόνο θετικές ανισότητες

10. $\Delta\mathcal{N}$ αφαιρώ $\Delta\mathcal{N}$ διαιρώ κατά μέλη.

11. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

μονο αν α, β και ν θετικοι

12. $\alpha > \beta \Leftarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

ισχυει επισης αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

αλλα ο ν περιττος.

13. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$

μονο αν α, β και ν θετικοι.

14. $|\alpha| = \alpha$ αν $\alpha \geq 0$

15. $|\alpha| = -\alpha$ αν $\alpha \leq 0$

16. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

17. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

18. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

4. 

(σελ 47) Ιδιωτικό δίκαιο

και τα υποκείμενά του.