

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

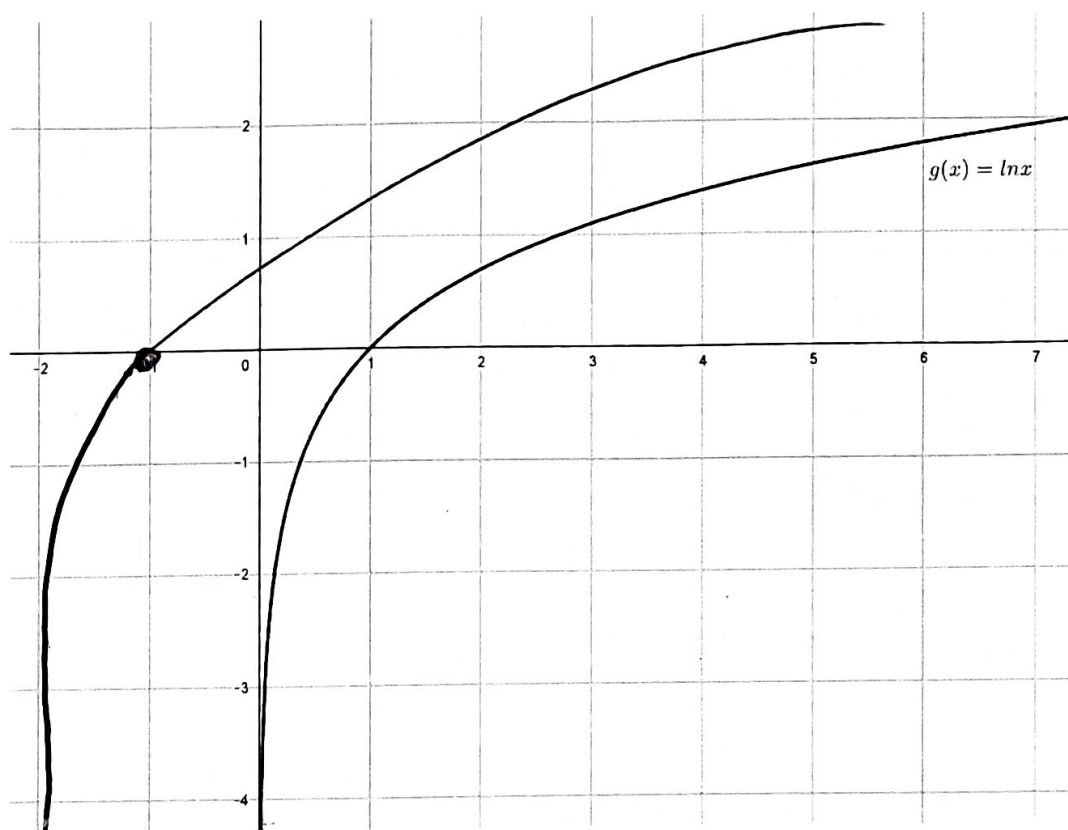
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{a} \quad x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \quad D_f = (-2, +\infty)$$

$$\textcircled{b} \quad H(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \ln(x+2) = 0 \quad (\Rightarrow) \ln(x+2) = \ln 1 \quad (\Rightarrow) x+2 = 1 \\ (\Rightarrow) x = -1 \quad A(-1, 0)$$

① ↗

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$.

(Μονάδες 7)

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$.

(Μονάδες 6)

γ) $10^\beta - 10^\alpha = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.

(Μονάδες 12)

Δίνεται ότι $e \approx 2,71$.

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \quad \beta + \alpha = 3 & \Leftrightarrow \log 50 + \log 20 = 3 \\ & \log 50 \cdot 20 = 3 \\ & \log 1000 = 3 \\ & \log 10^3 = 3 \quad (\Leftrightarrow) 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\beta} \quad \ln(\beta + \alpha) &> 1 \\ \ln 3 &> 1 \\ \ln 3 &> \ln e \\ 3 &> e \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\gamma} \quad 10^\beta - 10^\alpha &= 10(\beta + \alpha) \\ 10^{\log 50} - 10^{\log 20} &= 10 \cdot 3 \\ 50 - 20 &= 30 \\ 30 &= 30. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

α) Πραγμα $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$.

$$D_f = (-1, +\infty).$$

β) $f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$

γ) $f(x) = 2$

$$\ln(x+1) = 2$$

$$e^{\ln(x+1)} = e^2$$

$$x+1 = e^2$$

$$x = e^2 - 1.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad \begin{array}{ll} x^2 + 4 > 0 & x > 0 \\ D_f = \mathbb{R} & D_g = (0, +\infty) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\beta} \quad f(x) &= g(x) \\ \ln(x^2 + 4) &= \ln x + \ln 4 \\ \ln(x^2 + 4) &= \ln 4x \end{aligned}$$

$$x^2 + 4 = 4x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$\boxed{x=2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad \log(x^2 + 1) = \log 10 + \log 3 - \log 6$$

$$\log(x^2 + 1) = \log 30 - \log 6$$

$$\log(x^2 + 1) = \log 5$$

$$\textcircled{\beta} \quad \log(x^2 + 1) = \log 5$$

πρωτι $x^2 + 1 > 0$.

$$x^2 + 1 = 5$$

$$x^2 = 4$$

$$\textcircled{x=2}$$

$$\textcircled{x=-2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \ln A < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \approx 2.71$.

α) $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$

$$A = \ln e^{\frac{1}{2}} + \log 100^{\frac{1}{3}}$$

$$A = \frac{1}{2} + \log 10^{\frac{2}{3}}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \Rightarrow A = \frac{7}{6}$$

β) $0 < \ln A < 1$

$$\ln 1 < \ln \frac{7}{6} < \ln e$$

$$H f(x) = \ln x \nearrow$$

$$1 < \frac{7}{6} < e \quad \text{που ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$.

(Μονάδες 12)

α) $\ln(x+1) = \ln 2x$

$$x+1 = 2x$$

$$\boxed{1 = x}$$

$$x+1 > 0 \text{ και } 2x > 0$$

$$x > -1 \quad x > 0$$

$$x \in (0, +\infty).$$

β) $\ln(x+1) > \ln(2x)$

$$x+1 > 2x$$

$$1 > x$$

$$\text{Άρα } x \in (0, 1).$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

(Μονάδες 6)

ii. $A = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

(Μονάδες 13)

α) $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$

ii) $A = \ln 1 + \log(10 \log 10)$

$A = 0 + \log(10 \cdot 1)$

$A = \log 10$

$A = 1$

i) $\log 10^{10} =$
 $= 10 \cdot \log 10$
 $= 10 \cdot 1 = 10$

β) $\log(x^2 + 1) = A$

$\log(x^2 + 1) = 1$

$\log(x^2 + 1) = \log 10$

$x^2 + 1 = 10$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

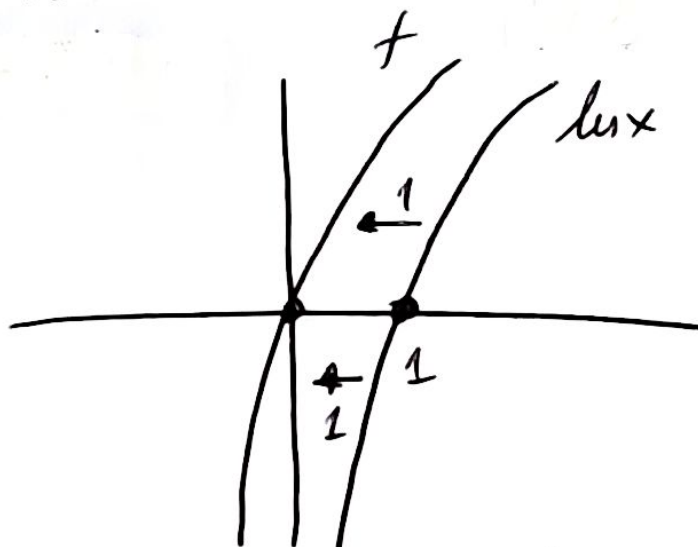
(Μονάδες 7)

α) Πρασι $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$
 $D_f = (-1, +\infty)$

β) $\frac{x'x}{f(x)} = 0$
 $\ln(x+1) = 0$
 $e^{\ln(x+1)} = e^0$
 $x+1 = 1$
 $x = 0$

$\frac{y'y}{f(y)} = \ln 1 = 0$
 $A(0, 0).$

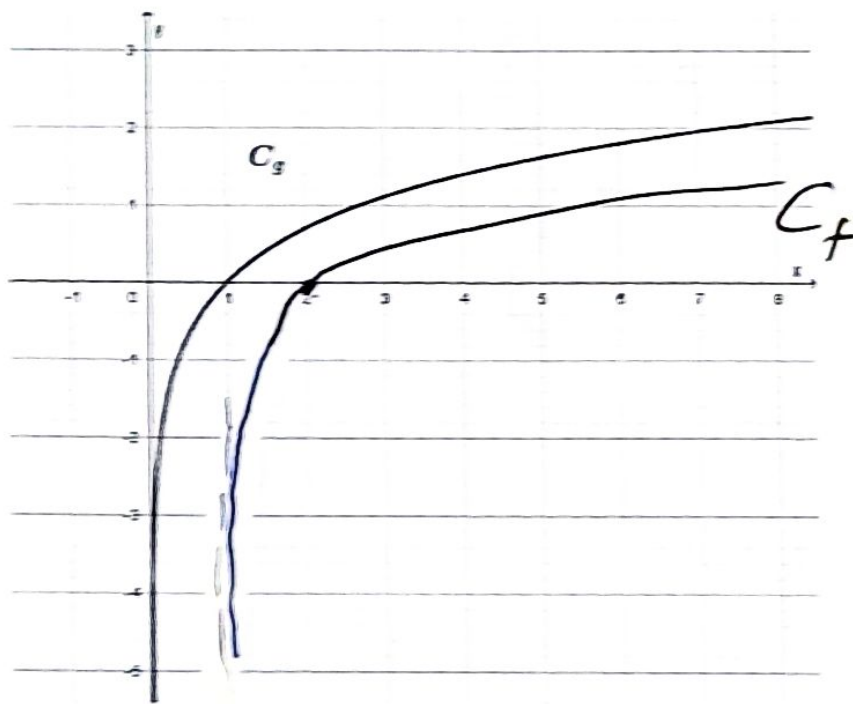
γ)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \ln x, \quad x > 0.$$



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 05)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 12)

α) Περὺ $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad D_f = (1, +\infty)$

β) ↗

γ) $x \in (1, 2)$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

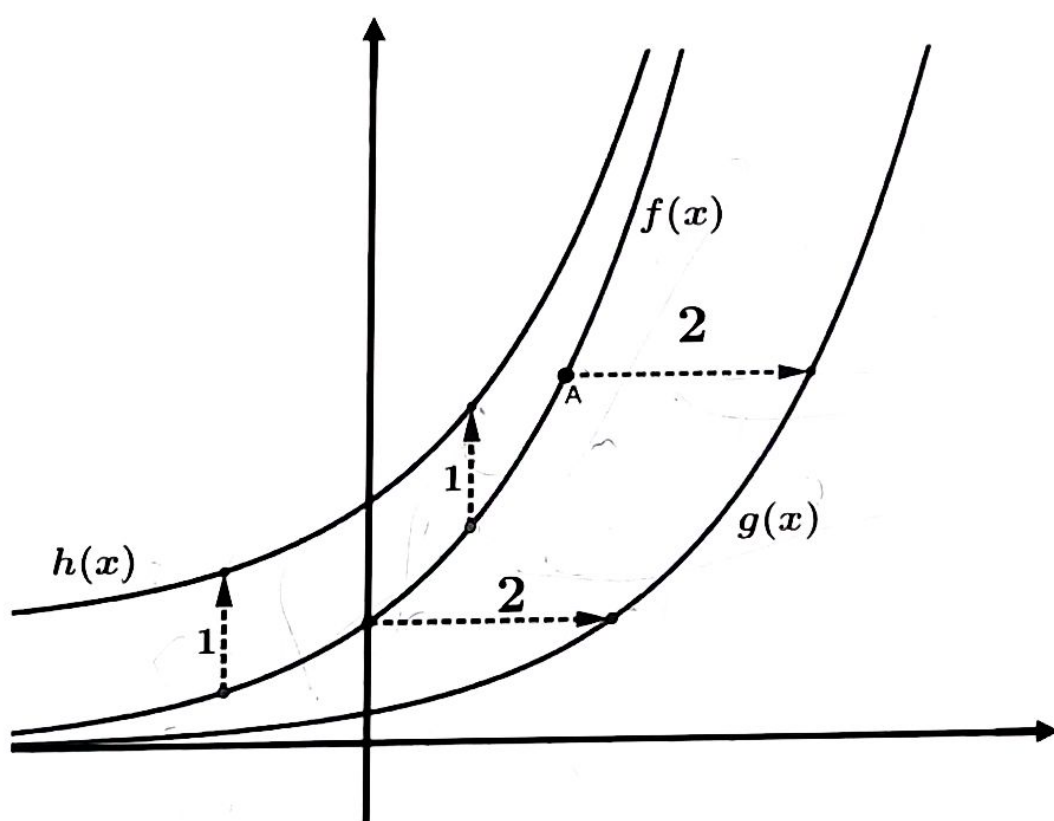
(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

(Μονάδες 9)



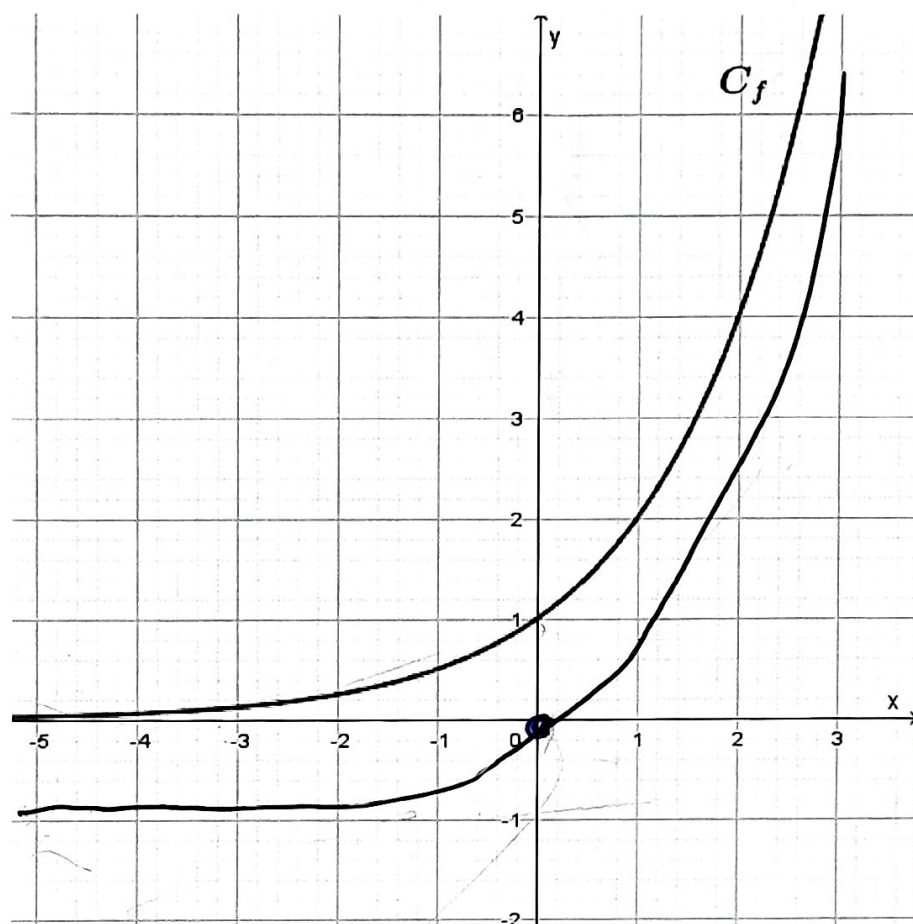
α) Η C_g προέκυψε από τη μετατόπιση της C_f κατά 2 δεξιά ενώ η C_h κατά 1 πάνω.

β) $g(x) = 2^{x-2}$ ενώ $h(x) = 2^x + 1$.

γ) $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$.

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

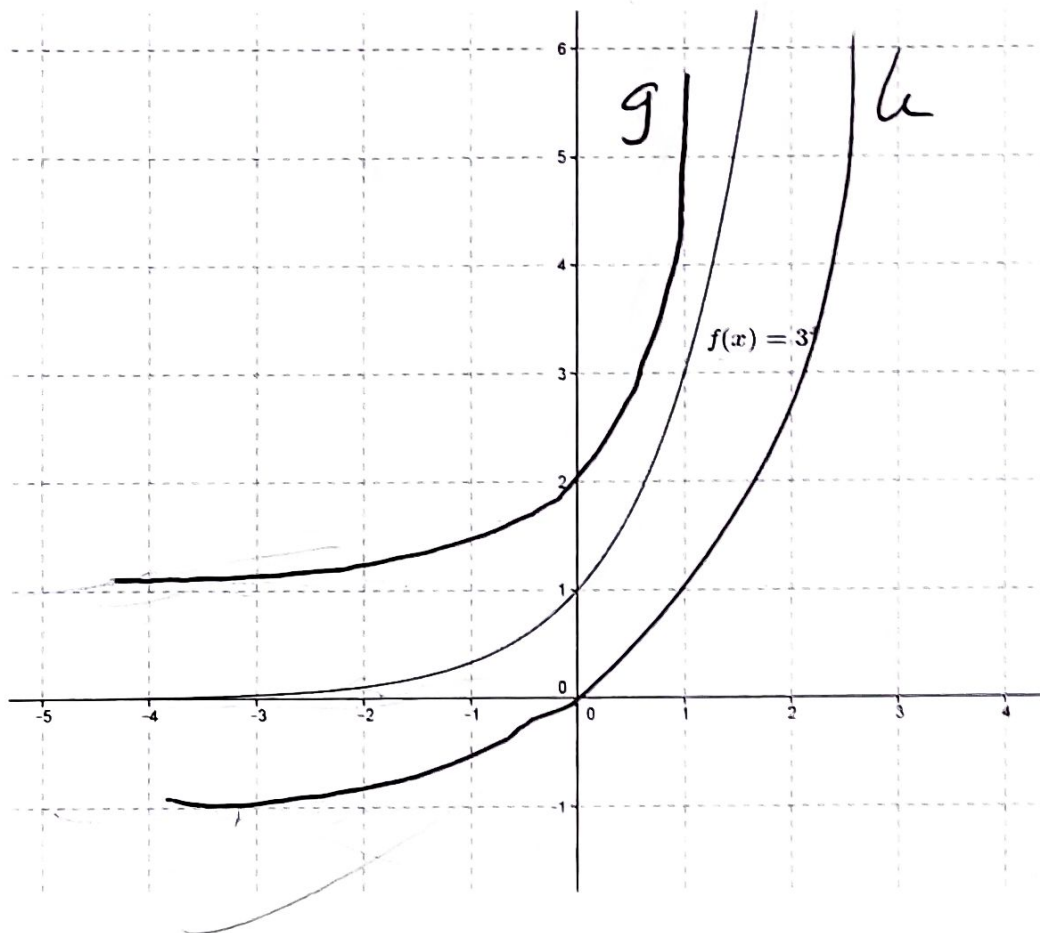
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 05)

(α) $2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$
 (β) i) $\nearrow$
 ii) $(0, 0)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ με $x \in \mathbb{R}$.



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;

(Μονάδες 13)

β) Η ασυμπτωτική της g είναι η $y = 1$
ενώ της h είναι η $y = -1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$$

$$A = \log 5^2 + \log 2^3 - \log 20$$

$$A = \log 25 + \log 8 - \log 20$$

$$A = \log 200 - \log 20$$

$$A = \log 10 = 1.$$

$$\textcircled{\beta} \quad \ln(e^x - 1) = A$$

$$\ln(e^x - 1) = 1$$

$$\ln(e^x - 1) = \ln e$$

$$e^x - 1 = e$$

$$e^x = e + 1$$

$$\ln e^x = \ln(e + 1)$$

$$x = \ln(e + 1).$$

β' τροπή

$$e^x = e + 1$$

$$e^x = e^{\ln(e+1)}$$

$$x = \ln(e + 1)$$

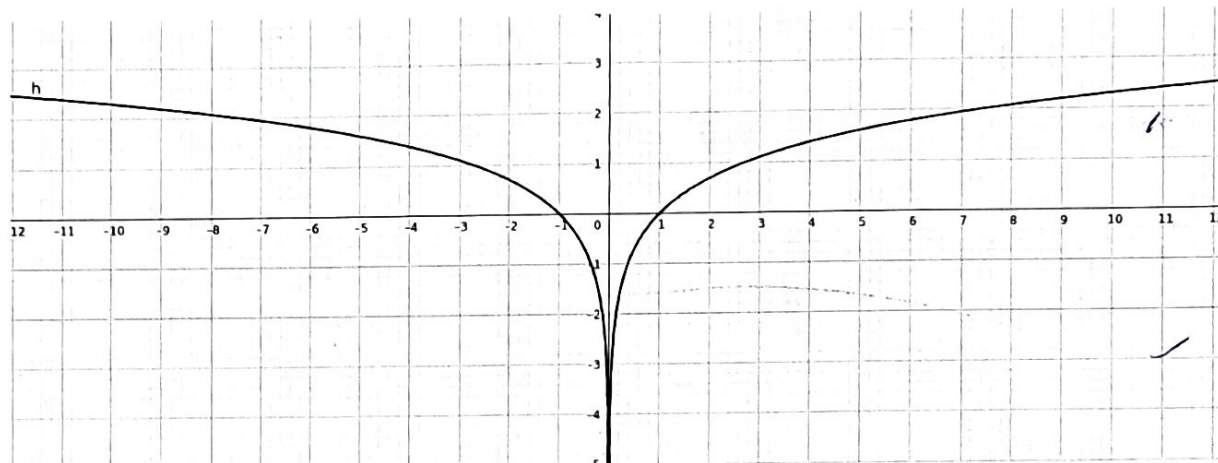
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 10)

β) i) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

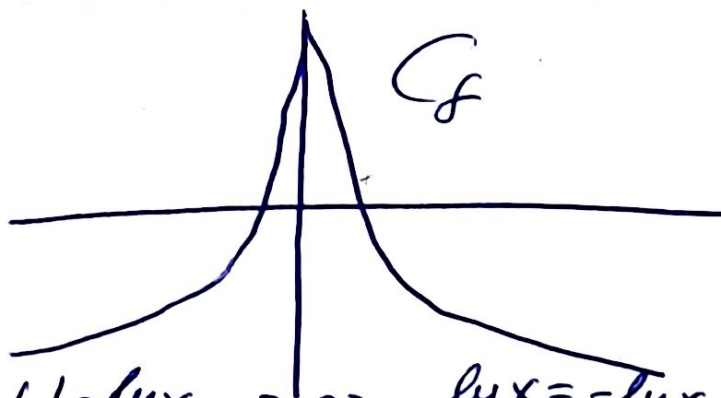
(Μονάδες 7)

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = \ln x$, $x > 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$.

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{a} \quad f(x) = \ln \frac{1}{|x|} = \ln 1 - \ln|x| = -\ln|x|$$

ii) Γνωρίζω ότι $f(x)$ και $-f(x)$ είναι συμμετρικά ως προς τον $x'x$.



ii) Για $x > 0$
 $f(x) = -\ln x$ και $h(x) = \ln x$ άρα $\ln x = -\ln x \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \log A < 1$.

(Μονάδες 13)

α) $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}}$

$$A = 2 + 10^{\log \sqrt{5}^2}$$

$$A = 2 + 5^2$$

$$A = 2 + 5 = 7$$

β) $0 < \log A < 1$

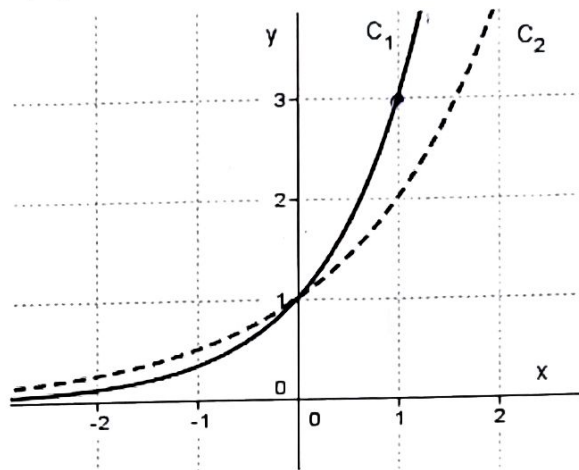
$$\log 1 < \log 7 < \log 10$$

$$1 < 7 < 10 \text{ που ισχύει}$$

η $f(x) = \log x$ είναι ↗

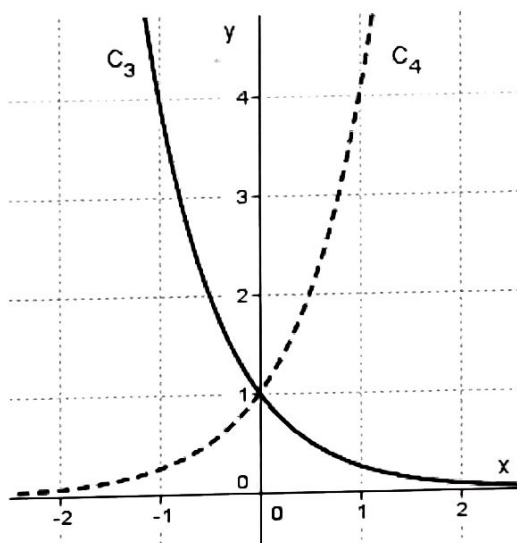
ΘΕΜΑ 2

α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 13)

α) Για την C_1 παρατηρώ ότι διέρχεται από το $(1, 3)$ άρα $C_1 \equiv g(x) = 3^x$ ενώ η $C_2 \equiv f(x) = 2^x$

β) $C_4 \equiv \varphi(x) = 4^x$ γιατί είναι ↗

$C_3 \equiv \psi(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ γιατί είναι ↘

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$

(Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$$

$$A = \log_4 3\alpha - \log_4 \beta$$

$$A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Αφού } 3\alpha = 16\beta$$

$$\text{αρα } A = \log_4 \frac{16\beta}{\beta} = \log_4 16$$

$$A = \log_4 4^2 = ?$$

$$A = 2.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \approx 2.71$.

α)

$$0 < \alpha < \beta$$

$$0 < \ln 2 < \ln 3$$

$$\ln 1 < \ln 2 < \ln 3$$

$$1 < 2 < 3 \text{ που ισχύει.}$$

β)

$$\beta - \alpha < 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 < 1$$

$$\ln \frac{3}{2} < \ln e$$

$$\frac{3}{2} < e \text{ που ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 2

Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x.$$

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad \alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$$

$$\alpha = \log 10^2 + \log 10 - \log 1$$

$$\alpha = 2 + 1 = 3$$

$$\textcircled{\alpha} \quad 9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x = 2$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad \begin{array}{ll} x+1 > 0 & \text{και} \quad 1-x > 0 \\ x > -1 & x < 1 \end{array}$$

$$x \in (-1, 1)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$$

$$\log(x+1) = \log 1 - \log 2 - \log(1-x)$$

$$\log(x+1) + \log(1-x) = -\log 2$$

$$\log(x+1)(1-x) = \log 2^{-1}$$

$$(x+1)(1-x) = \frac{1}{2}$$

$$-(x^2-1) = \frac{1}{2}$$

$$-x^2 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^\lambda = A$.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln \lambda < 0$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = 2\log 5 + 2\log 2$$

$$A = \log 5^2 + \log 2^2$$

$$A = \log 25 + \log 4$$

$$A = \log 100 = \log 10^2 = 2$$

$$\textcircled{\beta} \quad e^\lambda = A$$

$$e^\lambda = 2$$

$$\ln e^\lambda = \ln 2$$

$$\lambda = \ln 2.$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \text{νδο} \quad \ln \lambda < 0$$

$$\ln(\ln 2) < 0$$

$$\ln(\ln 2) < \ln 1$$

$$\ln 2 < 1$$

$$\ln 2 < \ln e$$

$$2 < e$$

που ισχύει

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

α) πριν $\frac{1-x}{x} > 0$

x	0	1
1-x	+	-
x	-	+
$\frac{1-x}{x}$	-	+

$$x \in (0, 1).$$

β) $f(x) = 0$

$$\ln \frac{1-x}{x} = \ln 1.$$

$$\frac{1-x}{x} = 1$$

$$1-x = x$$

$$1 = 2x$$

$$x = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad 2\beta = \alpha + \gamma$$

$$2 \ln 4 = \ln 2 + \ln 8$$

$$\ln 4^2 = \ln 16$$

$$\ln 16 = \ln 16 \quad \checkmark$$

$$0 = 0$$

$$\textcircled{\beta} \quad \beta + \gamma = 5\alpha$$

$$\ln 4 + \ln 8 = 5 \ln 2$$

$$\ln 32 = \ln 2^5$$

$$\ln 32 = \ln 32$$

$$32 = 32$$

$$0 = 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι :

i. $\beta + \alpha > 1$.

(Μονάδες 6)

ii. $\ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$.

(Μονάδες 7)

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \quad & 0 < \alpha < \beta \\ & 0 < \log 3 < \log 4 \\ & \log 1 < \log 3 < \log 4 \\ & 1 < 3 < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\beta} \text{ i) } & \beta + \alpha > 1 \\ & \log 4 + \log 3 > 1 \\ & \log 12 > \log 10 \\ & 12 > 10 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

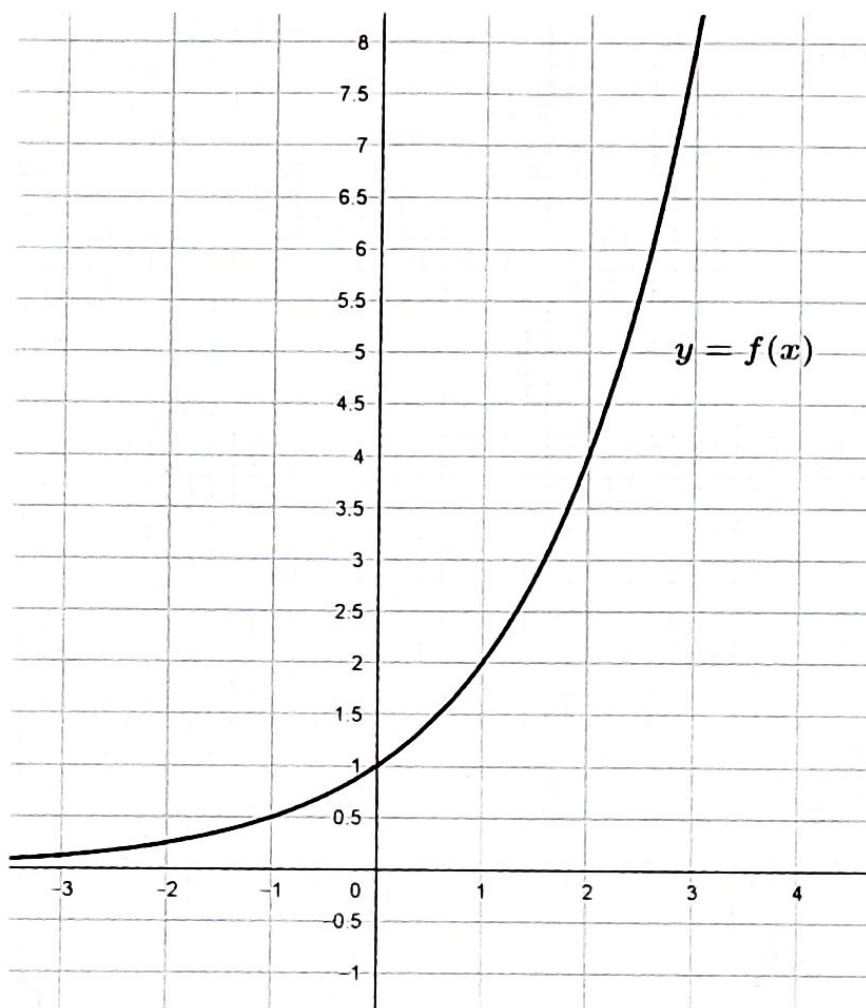
$$\ln \frac{\log 3}{\log 4} < \ln 1 \quad (\Leftrightarrow) \frac{\log 3}{\log 4} < 1$$

$$\log 3 < \log 4 \quad (\Leftrightarrow) 3 < 4$$

$$\left(\begin{array}{l} 4 > 1 \Rightarrow \log 4 > \log 1 \\ \log 4 > 0 \end{array} \right)$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α)

i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,5	1	2	4	8

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

(Μονάδες 8)

α) ii) $H(x) = a^x \rightarrow (1, 2)$ αφού $2 = a^1$
 $\Rightarrow a = 2$ $H(x) = 2^x$

β) $H(x) = 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e}$

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{a} \quad A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e} = \ln e - \ln 5 - (\ln 4 - \ln e)$$

$$A = 1 - \ln 5 - \ln 4 + 1$$

$$A = 2 - 1,609 - 1,386$$

$$A = -0,995$$

$$\textcircled{b} \quad \ln 80 = 4,381$$

$$\ln 5 \cdot 4^2 = 4,381$$

$$\ln 5 + \ln 4^2 = 4,381$$

$$\ln 5 + 2 \ln 4 = 4,381$$

$$1,609 + 2 \cdot (1,386) = 4,381$$

$$4,381 = 4,381$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\log_2 8) \cdot x^3 + (4 \log_2 \sqrt{2}) \cdot x^2 - (4 \log_2 1) \cdot x + 1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8 + 2 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad \log_2 8 + 2 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$$

$$\log_2 2^3 + \log_2 \sqrt{2}^2 = 4$$

$$3 + \log_2 2 = 4$$

$$3 + 1 = 4$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) = (\log_2 2^3) x^3 + (\log_2 \sqrt{2}^4) x^2 - 0 \cdot x + 1990$$

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1990.$$

Το υπόλοιπο της $P(x) : (x-2)$

είναι $P(2)$

$$\text{Άρα } P(2) = 24 + 8 + 1990$$

$$P(2) = 2022.$$

ΓΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

α) Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση a^x , $0 < a < 1$, να βρείτε το a .

(Μονάδες 13)

β) Για $a = \frac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = a^x \rightarrow A\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = a^1 \quad (\Rightarrow) \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

$\textcircled{\beta}$

$$\text{Επειδή } \sqrt{2} < \sqrt{3}$$

$$\text{και αφού } \frac{1}{2} < 1$$

$$f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$$

$$a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x, x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100), f(\sqrt{10})$

(Μονάδες 12)

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{a} \quad f(100) = \log 100 = \log 10^2 = 2$$

$$f(\sqrt{10}) = \log \sqrt{10} = \log 10^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{b} \quad f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$$

$$\log(x+1) + \log(x-1) = \log 2.$$

$$\log(x+1)(x-1) = \log 2$$

$$x^2 - 1 = 2$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$~~x = \sqrt{3}~~$$

πρην

$$x+1 > 0$$

$$x-1 > 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 \log 6 - \log 12 \quad \text{και} \quad B = \log 5 + \log 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A < B$.

(Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

(Μονάδες 08)

$$\textcircled{\alpha} \quad A = 2 \log 6 - \log 12$$

$$A = \log 6^2 - \log 12$$

$$A = \log 36 - \log 12$$

$$A = \log \frac{36}{12}$$

$$A = \log 3$$

$$B = \log 5 + \log 2$$

$$B = \log 10$$

$$B = 1$$

$$\textcircled{\beta} \quad A < B$$

$$\log 3 < 1$$

$$\log 3 < \log 10$$

$$3 < 10 \quad \text{ισχύει}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \log x < 1$$

$$\log x < \log 10$$

$$x < 10$$

$$\text{και} \quad x > 0$$

$$\text{Άρα} \quad x \in (0, 10),$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

$$\begin{aligned} \textcircled{\beta} \quad \log(x^2 + 1) &= 1 - \log 2 \\ \log(x^2 + 1) &= \log 10 - \log 2 \\ \log(x^2 + 1) &= \log \frac{10}{2} \\ \log(x^2 + 1) &= \log 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 5 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\textcircled{x=2} \quad \textcircled{x=-2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \quad 1 - \log 2 &= \log 5 \\ \log 10 - \log 2 &= \log 5 \\ \log \frac{10}{2} &= \log 5 \\ \log 5 &= \log 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(3) = \ln(3^2 - 2 \cdot 3 + 3) = \ln(6)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 4$$

$$\ln 3 + \ln 2^3 - \ln 6 = \ln 4$$

$$\ln 3 + \ln 8 - \ln 6 = \ln 4$$

$$\ln 24 - \ln 6 = \ln 4$$

$$\ln 4 = \ln 4$$

$$\textcircled{\gamma} \quad f(x) = \ln 4$$

$$\ln(x^2 - 2x + 3) = \ln 4$$

$$x^2 - 2x + 3 = 4$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &> 0 \\ x &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1 \Rightarrow \ln e^x > \ln 1$$

$$\Rightarrow x > 0$$

$$D_f = (0, +\infty).$$

$$\textcircled{\beta}. \quad f(x) = 0$$

$$\ln(e^x - 1) = \ln 1$$

$$e^x - 1 = 1$$

$$e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln 2.$$

$$x = \ln 2.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$\Lambda = \ln x + \ln(x+6).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7.$$

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{a} \quad x > 0 \quad \text{και} \quad x+6 > 0 \\ x > -6.$$

$$\text{αρα} \quad x \in (0, +\infty).$$

$$\textcircled{b} \quad \ln x + \ln(x+6) = \ln 7$$

$$\ln x(x+6) = \ln 7$$

$$x^2 + 6x = 7$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\cancel{x = -7} \quad \textcircled{x = 1}$$

ΘΕΜΑ 4

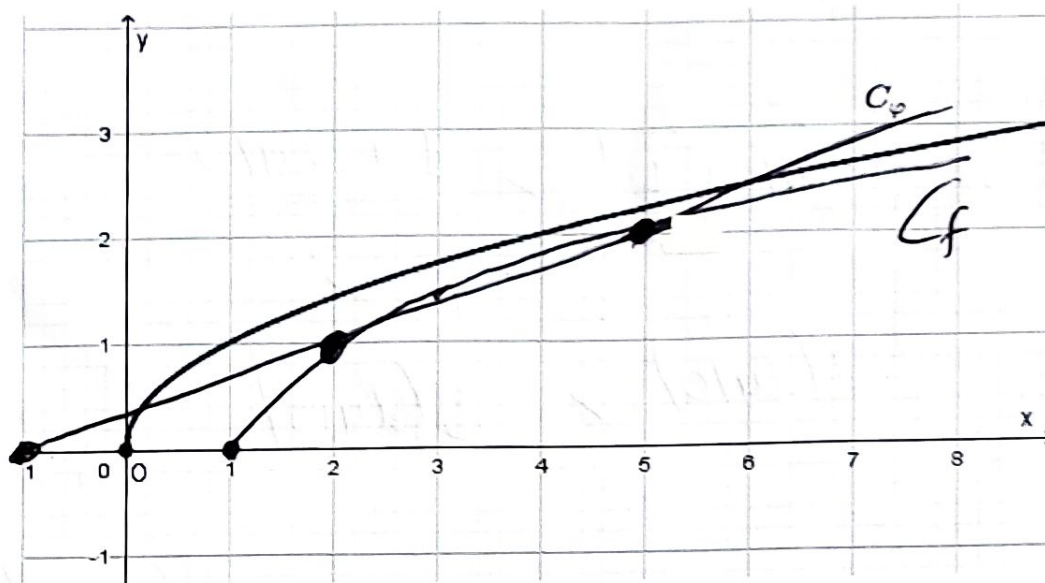
Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = \sqrt{x}, \text{ με } x \geq 0, f(x) = \sqrt{x-1}, \text{ με } x \geq 1 \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{3}, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ .



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 02)

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

(Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$.

(Μονάδες 05)

$$\textcircled{a} \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = x+1 \quad \text{πρέπει } x-1 \geq 0 \text{ και } x+1 \geq 0$$

$$x \geq 1 \quad x \geq -1$$

$$g(x-1) = x^2 + 2x + 1$$

$$9x - g = x^2 + 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 7x + 10$$

$$\textcircled{x=2} \quad \textcircled{x=5}$$

$$A(2, 1) \quad B(5, 2)$$

③ ✓

⑦ $f(x) > g(x)$
 $x \in (2, 5)$.

⑧ vso $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$

$$f(\ln 10) > g(\ln 10).$$

$\ln 10 = 2,325$ To $\ln 10 \in (2, 5)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

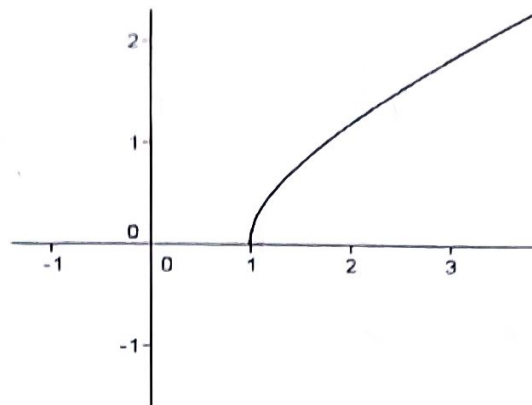
(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.



(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.

(Μονάδες 7)

α) D_f

πρσμ $x \ln x \geq 0$ και $x > 0$

x	0	1
x	-	+
$\ln x$	-	-
$x \ln x$	+	-

$$x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$D_f = [1, +\infty)$$

D_g

πρσμ $\ln x \geq 0$
και $x > 0$

$$\begin{aligned} \text{Αρα } \ln x &\geq 0 \\ \ln x &\geq \ln 1 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

$$D_g = [1, +\infty)$$

β) Αρκεν νδσ $f(x) \geq g(x)$

$$\sqrt{x \ln x} \geq \sqrt{\ln x} \Leftrightarrow x \ln x \geq \ln x \Leftrightarrow (x-1) \ln x \geq 0$$

$$\bullet x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \quad \text{---} \quad \text{ⓐ}$$

$$\bullet x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \quad (x-1) \ln x \geq 0 \checkmark$$

① i) Άνο σχημα n f $\nearrow$

ii) Ισχυα οα $\frac{5}{3} > \frac{7}{5} \xrightarrow{f \nearrow} f(\frac{5}{3}) > f(\frac{7}{5})$

$$\frac{5}{3} = \frac{25}{15}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{21}{15}$$

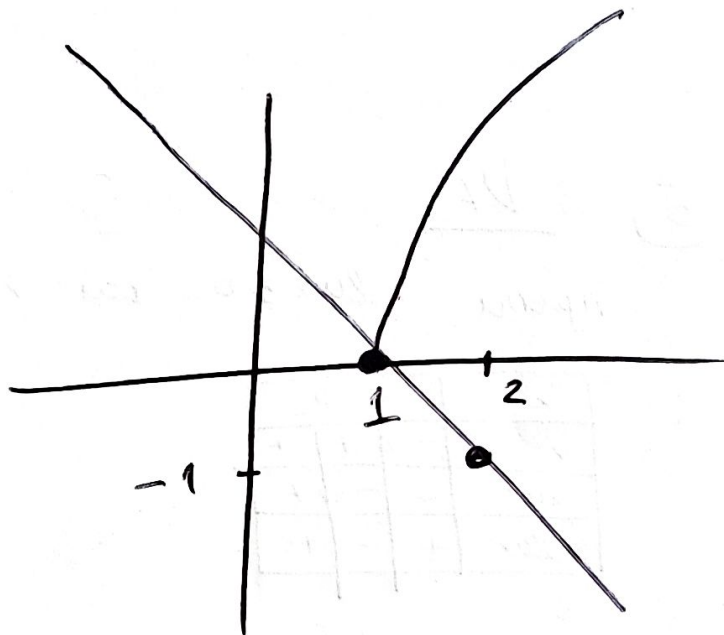
⑧. $y = 1 - x$

x	1	2
y	0	-1

$$f(x) = 1 - x$$

γραφικα.

$$\boxed{x=1}$$



ΘΕΜΑ 4

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο ($1W/m^2$). Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12} w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100 w/m^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

(Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad D = 10 \log \frac{100}{10^{-12}} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14}$$

$$D = 10 \cdot 14 \quad (\Rightarrow) \quad D = 140$$

$$\textcircled{\beta} \quad \left. \begin{aligned} D &= 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \\ D+20 &= 10 \log \left(\frac{I^*}{I_0} \right) \end{aligned} \right\} \ominus$$

$$D - (D+20) = 10 \left(\log \left(\frac{I}{I_0} \right) - \log \left(\frac{I^*}{I_0} \right) \right)$$

$$-20 = 10 \log \left(\frac{I}{I^*} \right) \quad (\Rightarrow) \quad -2 = \log \left(\frac{I}{I^*} \right)$$

$$\log 10^{-2} = \log \left(\frac{I}{I^*} \right)$$

$$\frac{1}{100} = \frac{I}{I^*}$$

$$\Rightarrow \boxed{I^* = 100 I}$$

$$\textcircled{1} D = 120$$

$$\Leftrightarrow 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 120$$

$$\log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 12$$

$$\log \frac{I}{10^{-12}} = \log 10^{12}$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^{12}$$

$$I = 10^{12} \cdot 10^{-12}$$

$$I = 1$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

α) ηρση $10^x - 1 > 0$

$$10^x > 1$$

$$\log 10^x > \log 1$$

$$x > 0$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

β) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > 0$

$$\log(10^x - 1) > \log 1$$

$$10^x - 1 > 1$$

$$10^x > 2$$

$$\Leftrightarrow \log 10^x > \log 2$$

$$x > \log 2$$

$$x \in (\log 2, +\infty)$$

$$\textcircled{1} \cdot f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x).$$

$$\log(10^x - 1) + x = \log(10^{2x} - 10^x).$$

$$\log(10^x - 1) + \log 10^x = \log(10^{2x} - 10^x)$$

$$\log((10^x - 1) 10^x) = \log(10^{2x} - 10^x)$$

$$10^{2x} - 10^x = 10^{2x} - 10^x$$

$$0 = 0$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = -x$$

$$f(x) + x = 0$$

$$\log(10^{2x} - 10^x) = 0$$

$$\log(10^{2x} - 10^x) = \log 1$$

$$10^{2x} - 10^x = 1$$

$$(10^x)^2 - 10^x - 1 = 0$$

$$t^2 - t - 1 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$10^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

$$10^x = t$$

$$t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$10^x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Answer

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\epsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\epsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$$

$$P(x) = ex^3 + 4x^2 \ln e^{\frac{1}{2}} + 2$$

$$P(x) = ex^3 + 4x^2 \frac{1}{2} + 2$$

$$P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(x) = ex + 4$$

$$ex^3 + 2x^2 + 2 = ex + 4$$

$$ex^3 + 2x^2 - ex - 2 = 0$$

$$x^2(ex + 2) - (ex + 2) = 0$$

$$(ex + 2)(x^2 - 1) = 0 \quad \textcircled{x=1} \quad \textcircled{x=-1}$$

$$ex + 2 = 0$$

$$ex = -2 \quad \textcircled{x = -\frac{2}{e}}$$

$$\textcircled{8} \quad P(x) > ex+4$$

$$(ex+2)(x^2-1) > 0$$

x	-1	$-\frac{2}{e}$	1
ex+2	-	-	+
x^2-1	+	-	+
$\varphi(x)$	-	+	+

$$x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty)$$

$$\textcircled{9} \quad P(e) - e^2 - 4$$

Παρατίθω ότι $\varphi(x) = P(x) - ex - 4$

$$\varphi(e) = P(e) - e^2 - 4$$

Το $e > 1$ από $\varphi(e) > 0$

γιατί $\varphi(x) > 0 \quad \forall x > 1$.

Από $P(e) - e^2 - 4 > 0$

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

(Μονάδες 04)

α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

i) $\sqrt{x^2 + 1} > x$ αφού $x < 0$, προφανώς

$\sqrt{x^2 + 1} > x$

αυφω $\sqrt{x^2 + 1} > 0$

ii) $f(x) > 0$

$\sqrt{x^2 + 1} > x$
 $x \in \mathbb{R}$

→ αν $x < 0$ εδωξα οτι ισχυει.

→ αν $x > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow 1 > 0$
 ισχυει.

$$(B) \text{ i) } g(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) =$$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$$

$$= \ln 1 - (\ln \sqrt{x^2+1} + x) = -g(x).$$

ii) vdo n g nepritu s2t

$$\text{Agor } g(-x) = -g(x)$$

$$x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$$

nepitu

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

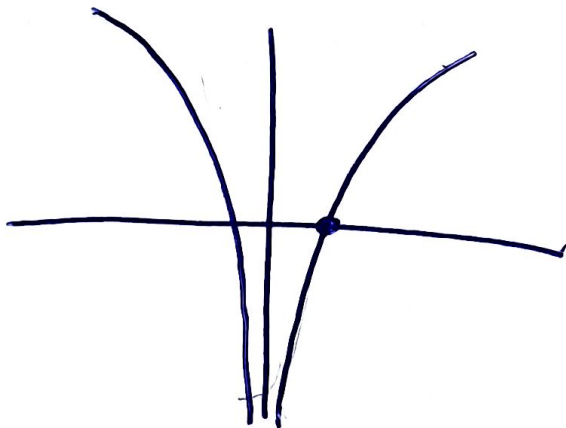
δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$.

(Μονάδες 10)

α) πριν $|x| > 0$ $D_f = \mathbb{R}^*$

β) $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$ } Αρτια.
 Αν $x \in D_f$ και $-x \in D_f$

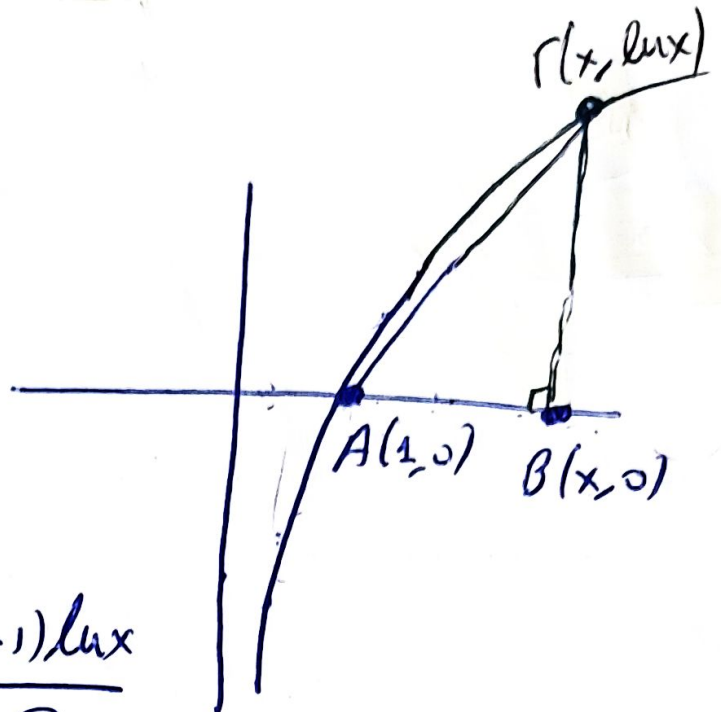
γ) $f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



$$\textcircled{8} . E = \frac{B \cdot 0}{2}$$

$$E = \frac{|x-1| \cdot |lux|}{2}$$

$$E = \frac{|(x-1)lux|}{2} = \frac{(x-1)lux}{2}$$



x	1	
x-1	-	+
lux	-	+
(x-1)lux	+	+

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} και στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α .

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε τότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5) \approx -0,3$ και $\log(0,85) \approx -0,07$).

(Μονάδες 9)

α) 15% του 10 είναι $\frac{15}{100} \cdot 10 = 1,5$

Μετά από 1η εβδομάδα 8,5 λ.

15% του 8,5 είναι $\frac{15}{100} \cdot 8,5 = 1,275$

Μετά από 2η εβδομάδα 7,225 λ.

β) $V(1) = 8,5$ και $V(2) = 7,225$

$V_0 \alpha = 8,5$



$V_0 \alpha^2 = 7,225$

$V_0 \alpha \cdot \alpha = 7,225$

$8,5 \cdot \alpha = 7,225$

$\alpha = 0,85$

$V_0 \cdot 0,85 = 8,5$

$V_0 = 10$

$$\textcircled{8} \quad v(t) < \frac{v_0}{2}$$

$$10 \cdot (0,85)^t < 5$$

$$(0,85)^t < \frac{1}{2}$$

$$(0,85)^t < 0,5$$

$$\log (0,85)^t < \log 0,5$$

$$t \log (0,85) < \log 0,5$$

$$-0,07 t < -0,3$$

$$t > 4,28.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{a} \quad P(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2 - 9 + \alpha - 2 - 6 = 0$$

$$\quad (\Rightarrow) \quad \alpha - 15 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\alpha = 15}$$

$$\boxed{P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6}$$

$$\textcircled{b} \quad i) \quad P(x) : (x^2 - 3x + 2)$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 & x^2 - 3x + 2 \\ - [2x^3 - 6x^2 + 4x] & \hline -3x^2 + 9x - 6 & 2x - 3 \\ - [-3x^2 + 9x - 6] & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\boxed{P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)}$$

ii). $P(x) < 0$

$$(x^2 - 3x + 2)(2x - 3) < 0$$

① ②, $\left(\frac{3}{2}\right)$

x	1	$\frac{3}{2}$	2
$x^2 - 3x + 2$	+ 0 -	- 0 +	
$2x - 3$	-	- 0 +	+
$P(x)$	-	+	-

$$x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

iii) $\forall \delta > 0 \quad P(\mu_2) < 0,$

Given $2 < e$ now $e \geq 2.7$

$$\mu_2 < \mu_e$$

$$\mu_2 < 1$$

As e is such $P(x) < 0 \quad \forall x < 1$

To $P(\mu_2) < 0.$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

(Μονάδες 7)

α) Πριν $x \neq 0$
 $D_f = A_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αρκεί να δούμε f περιττή.

$\rightarrow x \in D_f$ και $-x \in D_f$

$\rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$
 περιττή.

γ) $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2}) = f(\ln 2) + f(\ln 1 - \ln 2) =$
 $= f(\ln 2) + f(-\ln 2) = f(\ln 2) - f(\ln 2) = 0.$

δ) $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = f(\eta\mu\theta) + f(-\eta\mu\theta) =$
 $= f(\eta\mu\theta) - f(\eta\mu\theta) = 0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x > 0$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\textcircled{x = 2}$$

$$\textcircled{x = -1}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x = 0$$

$$\text{ΘΕΤΩ } \ln x = t$$

$$t^3 - t^2 - 2t = 0$$

$$P(t) = 0$$

$$t = 0$$

ή

$$t = 2$$

ή

$$t = -1$$

$$\ln x = 0$$

$$\ln x = 2$$

$$\ln x = -1$$

$$e^{\ln x} = e^0$$

$$e^{\ln x} = e^2$$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$\boxed{x = e^2}$$

$$x = e^{-1}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{e}}$$

①

$$\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x > 0$$

$$\ln x = t.$$

$$t^3 - t^2 - 2t > 0.$$

t	-1	0	2
t	-	-	+
t^2 - t - 2	+	-	+
P(t)	-	+	+

$$t \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$$

∴

$$-1 < t < 0 \quad \vee \quad t > 2$$

$$-1 < \ln x < 0 \quad \vee \quad \ln x > 2$$

$$\ln e^{-1} < \ln x < \ln 1$$

$$e^{-1} < x < 1$$

$$\frac{1}{e} < x < 1.$$

$$\ln x > \ln e^2$$

$$x > e^2$$

$$\Delta \text{nd } \Delta \text{nd } x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (e^2, +\infty).$$

①

$$\underline{\underline{a = -6}}$$

$$f(x) = 6^x$$

$$f(x) + f(x+1) = 14$$

$$6^x + 6^{x+1} = 14$$

$$6^x + 6^x \cdot 6 = 14$$

$$6^x = t$$

$$t + 6t = 14$$

$$7t = 14$$

$$t = 2$$

$$6^x = 2$$

$$x = \log_6 2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

α) πρώτα $e^x - 2 > 0$

$$e^x > 2$$

$$e^x > e^{\ln 2}$$

$$x > \ln 2$$

$$D_f = (\ln 2, +\infty)$$

β) $f(x) + x = 3 \ln 2$

$$\ln(e^x - 2) + x = \ln 2^3$$

$$\ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 8$$

$$\ln((e^x - 2)e^x) = \ln 8$$

$$e^{2x} - 2e^x = 8$$

$$e^{2x} - 2e^x - 8 = 0$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$t = 4$$

$$e^x = 4$$

$$x = \ln 4$$

$$t = -2$$

$$e^x = -2$$

Αδύνατο

$$e^x = t$$

⑧ $f(x) + x \geq 3 \ln 2$

$$t^2 - 2t - 8 \geq 0$$

t	-2		4	
$t^2 - 2t - 8$	+	0	-	0

$$t \leq -2 \quad \vee \quad t \geq 4$$

$$e^x \leq -2$$

Абсурт

$$e^x \geq 4$$

$$\underline{\underline{x \geq \ln 4}}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > 0$$

$\oplus$

$$4^x - 1 > 0$$

$$4^x > 1$$

$$4^x > 4^0$$

$$\boxed{x > 0}$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) = \log 3 - \log 7$$

$$\log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \log \frac{3}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot ((2^x)^2 - 1) = 3(2^x + 5)$$

$$\textcircled{2^x = t}$$

$$7t^2 - 7 = 3t + 15$$

$$7t^2 - 3t - 22 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm 25}{14} \quad \begin{cases} \frac{28}{14} = 2 \\ -\frac{22}{14} \end{cases}$$

$$\Delta = 9 + 616$$

$$\Delta = 625$$

$$\text{αρα } 2^x = 2$$

$$\textcircled{x=1}$$

$$2^x = -\frac{22}{14}$$

αδυνατό.

$$\textcircled{8} \quad \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log 3 - \log 7$$

$$\log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log \frac{3}{7}$$

$$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \frac{3}{7}$$

$$\text{Deci } 2^x = t$$

$$7t^2 - 3t - 22 > 0$$

t	$-\frac{22}{14}$		2
$7t^2 - 3t - 22$	+	-	+

$$t < -\frac{22}{14} \quad \vee \quad t > 2$$

$$2^x < -\frac{22}{14}$$

$$2^x > 2$$

$$2^x > 2^1$$

Answer

$$\underline{\underline{x > 1}}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = g(x)$$

$$4^x = 2^x - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\textcircled{2^x = t}$$

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1}$$

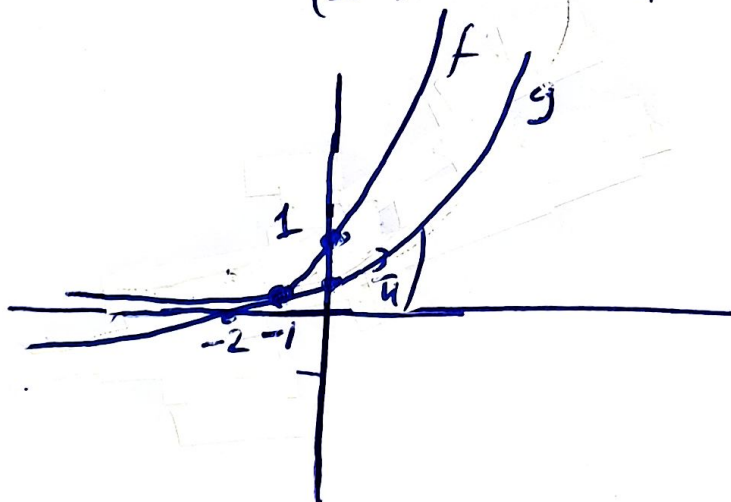
$$x = -1$$

$$\text{Άρα } A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Άρα να } f(x) \geq g(x)$$

$$\text{δηλαδή } (2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

γ)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

α) $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

ω	-1	1	3
ω^2-1	+	-	+
$\omega-3$	-	-	+
$\frac{\omega^2-1}{\omega-3}$	-	+	+

$\omega \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

β) ηρση $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$

$e^x = \omega$

$-1 < \omega < 1 \quad \vee \quad \omega > 3$

$e^x > 3$

$-1 < e^x < 1$

$x > \ln 3$

$e^x < 1$
 $e^x < e^0$
 $x < 0$

$x \in (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$

$$\textcircled{8} \quad A = -\ln 3$$

$$\ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} \right) = -\ln 3$$

$$\ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} \right) = \ln \frac{1}{3}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{e^x = t}$$

$$\frac{t^2 - 1}{t - 3} = \frac{1}{3}$$

$$3t^2 - \cancel{3} = t - \cancel{3}$$

$$3t^2 - t = 0$$

$$t(3t - 1) = 0$$

$$t = 0$$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$e^x = 0$$

$$e^x = \frac{1}{3}$$

Asuotay

$$x = \ln \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{x = -\ln 3}$$

ΘΕΜΑ 4

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 ντεσιμπέλ
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριοθούμενο	140 ντεσιμπέλ

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

(Μονάδες 08)

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι $1 W/m^2$ να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

(Μονάδες 07)

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0,3$).

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad 10 = 10 \log(10^{12} I)$$

$$1 = \log(10^{12} I)$$

$$\log 10 = \log(10^{12} I)$$

$$10 = 10^{12} I$$

$$I = 10^{-11}$$

$$\textcircled{B} \quad D = 10 \log(10^{12} \cdot 1)$$

$$D = 10 \log 10^{12}$$

$$D = 10 \cdot 12$$

$$D = 120 \text{ dB}$$

$$\textcircled{C} \quad \left. \begin{aligned} D &= 10 \cdot \log(10^{12} I) \\ D^* &= 10 \cdot \log(10^{12} 2I) \end{aligned} \right\}$$

$$D^* - D = 10 \left[\log \frac{10^{12} 2I}{10^{12} I} \right]$$

$$D^* - D = 10 \log 2 \quad (\Rightarrow) \quad D^* - D = 10 \cdot 0,3$$

$$D^* - D = 3$$

$$\boxed{D^* = 3 + D}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

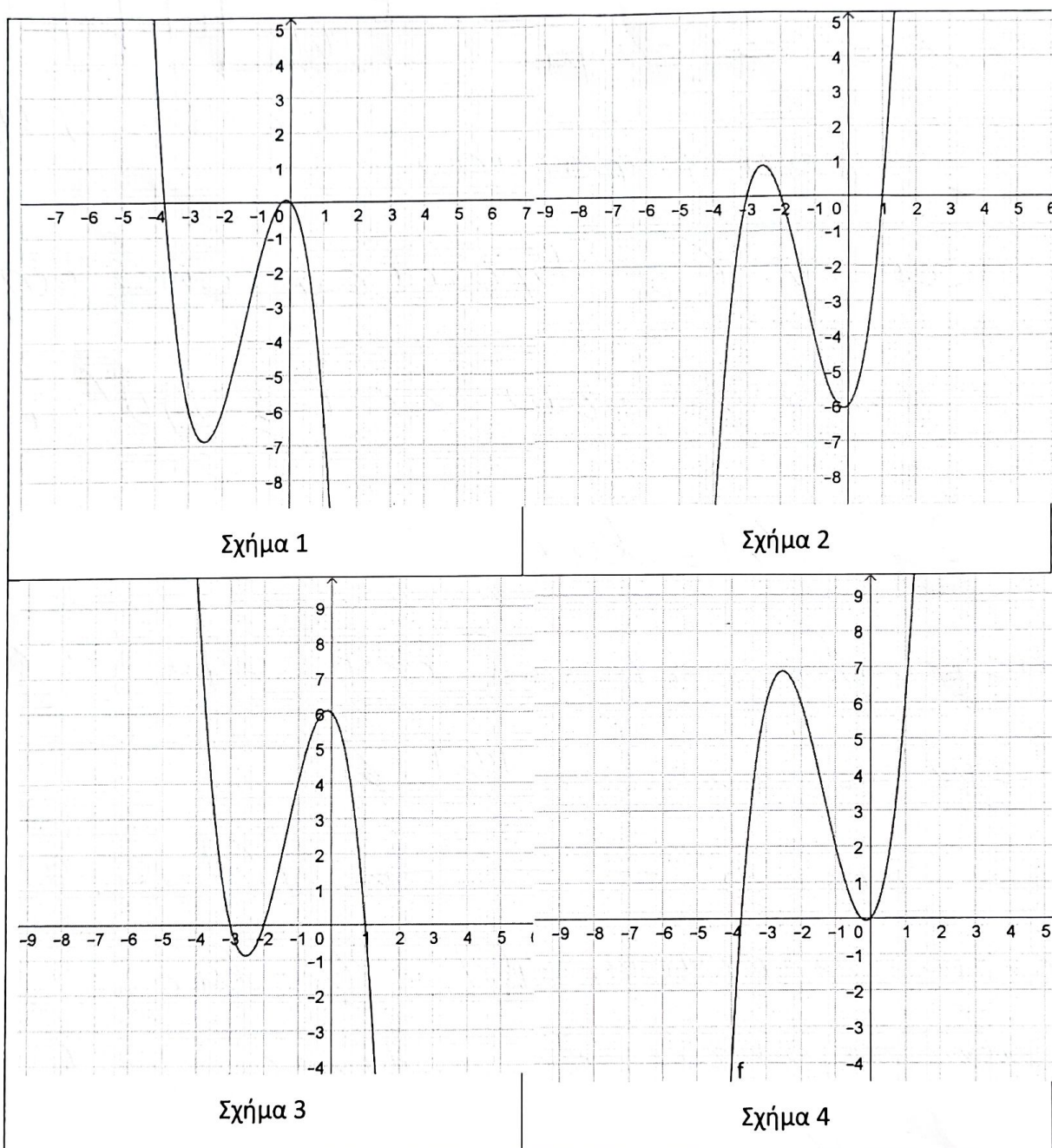
(Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

(Μονάδες 8)



⑥ $P(x) < 0$

$$-x^3 - 4x^2 - x + 6 < 0.$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & -4 & -1 & 6 \end{array} \quad \textcircled{-2}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x+2)(-x^2-2x+3) < 0$$

$$\textcircled{-2} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{-3},$$

x	-3	-2	1
x+2	-	-0+	+
-x^2-2x+3	-	0+	+0-
P(x)	+	-	+

$$x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty).$$

⑦ Σώστε το σχήμα

3 διατη παρατηρώ

οτι η C_p βρίσκεται κάτω από

$$\text{τον } x'x \text{ όταν } x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty).$$

⑧ $P(x) = \ln x$

καταρχήν, η εξίσωση έχει νόημα αν $x > 0$.

Όταν το $x > 0$ η $P(x)$ 

$$P(x) - \ln x = 0 \longrightarrow \varphi(x) = 0. \quad (=) \underline{x=1}$$

Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x) = P(x) - \ln x$

Η $\varphi(x)$ τερνιά τον $x'x$ τουλάχιστον μια φορά στο 1.

• $x_1 < x_2 \Rightarrow P(x_1) > P(x_2).$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$

$\begin{cases} \textcircled{+} \varphi(x_1) > \varphi(x_2) \\ \varphi \downarrow \text{Μονoton} \\ \text{το 1 προς} \end{cases}$

ΘΕΜΑ 4

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot \log \left(\frac{d}{10} \right)$, (1) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9 \cdot 10^{12} \text{ Km}$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

(Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (1) ως προς d .

(Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5,14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

$$\textcircled{\alpha} \quad m < M \quad \Leftrightarrow m - M < 0 \quad \Leftrightarrow 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log d - \log 10 < 0 \quad \Leftrightarrow \log d - 1 < 0$$

$$\log d < 1 \quad \Leftrightarrow \log d < \log 10 \quad \Leftrightarrow d < 10$$

$$\textcircled{\beta}. \quad 1,157 - M = 5 \log \frac{100}{10}$$

$$1,157 - M = 5 \log 10$$

$$1,157 - M = 5$$

$$M = -3,843.$$

$$\textcircled{7} \quad m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right)$$

$$\frac{m - M}{5} = \log \frac{d}{10}$$

$$10^{\frac{m - M}{5}} = 10^{\log \frac{d}{10}}$$

$$10^{\frac{m - M}{5}} = \frac{d}{10} \quad (\Rightarrow) d = 10 \cdot 10^{\frac{m - M}{5}}$$

$$d = 10^{1 + \frac{m - M}{5}} \quad (\Rightarrow) d = 10^{\frac{5 + m - M}{5}}$$

$$\textcircled{8}. \quad d = 10^{\frac{5 + 0,46 + 5,14}{5}}$$

$$d = 10^{2,12} = 10^{\frac{212}{100}} = 10^{\frac{106}{50}} = 10^{\frac{53}{25}} = \sqrt[25]{10^{53}}$$

$$d = 131.$$

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$

(Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

α) i) $x(e^x - 1) = 0$

$\boxed{x=0}$ ή $e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$e^x = e^0$

$\boxed{x=0}$

ii/.

x	0
x	- 0 +
$e^x - 1$	- 0 +
$x(e^x - 1)$	+ +

β) i) ηρση $x(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

ii). $f(0) = 0$

$$f(\ln 2) = \sqrt{\ln 2 (e^{\ln 2} - 1)} = \sqrt{\ln 2}.$$

$$\begin{aligned} f(-\ln 2) &= \sqrt{-\ln 2 (e^{-\ln 2} - 1)} = \sqrt{-\ln 2 (e^{\ln 2^{-1}} - 1)} \\ &= \sqrt{-\ln 2 \left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \sqrt{-\ln 2 \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{iii) } f(0) = 0$$

$$f(\ln 2) = \sqrt{\ln 2}$$

$$f(-\ln 2) = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{2}}.$$

$$-\ln 2 < 0 \quad \Leftrightarrow f(-\ln 2) > f(0)$$

$$\begin{aligned} 0 < \ln 2 \quad \Leftrightarrow f(0) < f(\ln 2) \\ 0 < \sqrt{\ln 2}. \end{aligned}$$

Дар прола ва дуа

я. рошона.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = e^{kx}$, $k \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $k > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

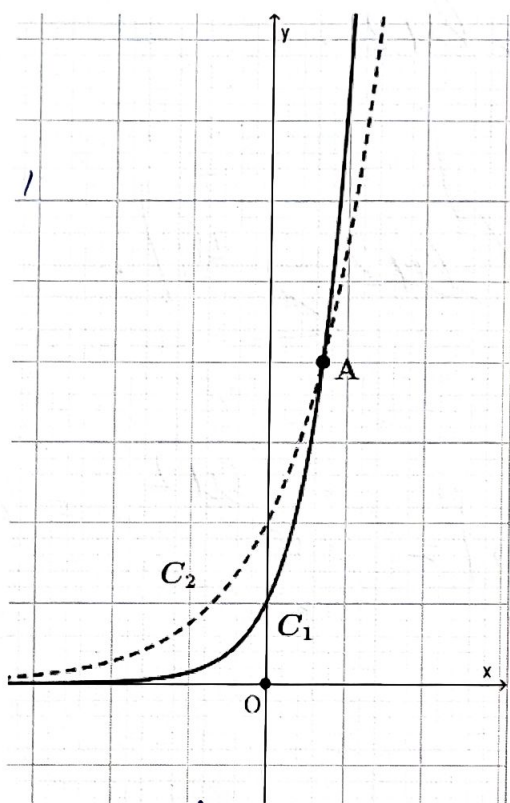
γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.

(Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και $k(x) = e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A;



α) $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$

(Μονάδες 05)

$$e^k - 1 \geq 1 - e^{-k} \Leftrightarrow e^k - 2 \geq -\frac{1}{e^k}$$

$$e^{2k} - 2e^k + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (e^k - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

Το "ισον" αν $e^k - 1 = 0 \Leftrightarrow e^k = 1$ $(k=0)$

$$\textcircled{B} \quad x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \quad kx_1 < kx_2 \quad (\Rightarrow) \quad e^{kx_1} < e^{kx_2}$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

$f \nearrow$

$$\textcircled{f} \quad \text{i) } e^{2x} \geq 2e^x$$

$$e^x \geq 2$$

$$\ln e^x \geq \ln 2$$

$$x \geq \ln 2.$$

$$\text{ii) } A(\ln 2, 4).$$

$$f(\ln 2) = 2e^{\ln 2} = 2 \cdot 2 = 4$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4)}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$$

ω	-6	2
$\omega - 2$	-	+
$\omega^2 + 2\omega + 4$	+	+
$\omega^2 + 4\omega - 12$	+	-
$P(\omega)$	-	+

$$\omega \in (-6, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Προσημ.} \quad \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$$

$$\begin{array}{ll} -6 < \omega < 2 & \text{ή} \quad \omega > 2 \\ -6 < e^x < 2 & e^x > 2 \\ e^x < 2 & x > \ln 2 \\ x < \ln 2 & \end{array}$$

$$D_f = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = 0$$

$$\ln \left(\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} \right) = 0$$

$$\ln \left(\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} \right) = \ln 1$$

$$\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 1$$

$$\Rightarrow e^{3x} - 8 = e^{2x} + 4e^x - 12$$

$$e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

$$e^x = t$$

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$t^2(t-1) - 4(t-1) = 0$$

$$(t-1)(t^2-4) = 0$$

$$t=1$$

$$e^x = 1$$

$$\boxed{x=0}$$

$$t^2 = 4$$

$$t=2$$

$$e^x = 2$$

$$\boxed{x = \ln 2}$$

$$t=-2$$

$$e^x = -2$$

Answer.

ΘΕΜΑ 4

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t) = T_a + ce^{-\kappa t}$$

όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

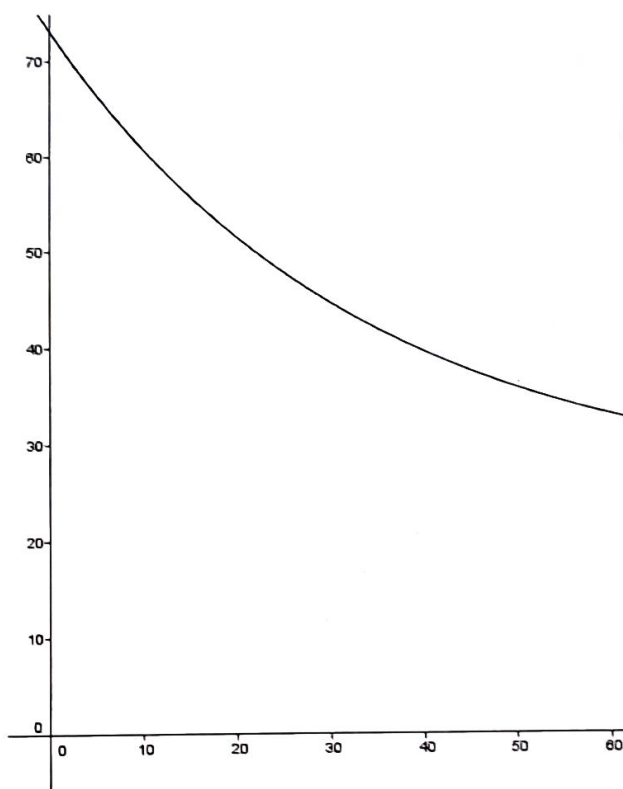
α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση

και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{\beta} \quad T(10) = 61$$

$$T_a + c e^{-k10} = 61$$

$$25 + c e^{-10k} = 61$$

$$c e^{-10k} = 36$$

$$48 e^{-10k} = 36$$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

$$-10k = \ln \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{\alpha} \quad T(0) = 73$$

$$T_a + c e^{-0 \cdot k} = 73$$

$$25 + c = 73 \quad \Leftrightarrow$$

$$c = 48$$

$$k = - \frac{\ln \frac{3}{4}}{10}$$

$$k = \frac{0,3}{10}$$

$$k = 0,03$$

$$\textcircled{\gamma} \quad T(40) = 25 + 48 e^{+40 \cdot 0,03} =$$

$$= 25 + 48 e^{4 \cdot 0,3} = 25 + 48 e^{-1,2} = 25 + 48 \cdot 0,3$$

$$T(40) = 39,4$$

$\textcircled{\delta}$ Γιατί η συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα και όταν $t > 40 \Leftrightarrow T(t) < T(40)$ άρα κρυω ρόφημα

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\epsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

α) $f(2) = \ln 2$

$f(4) = 3 \ln 4 = 3 \ln 2^2 = 6 \ln 2$

$f(8) = 7 \ln 8 = 7 \ln 2^3 = 21 \ln 2$

$f(2) + f(4) = \frac{1}{3} f(8)$

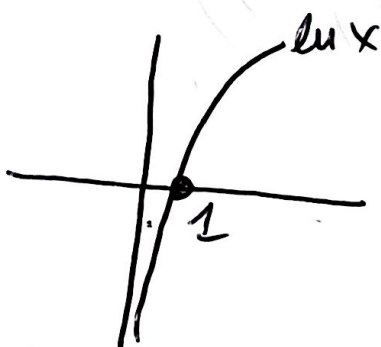
$\ln 2 + 6 \ln 2 = \frac{1}{3} 21 \ln 2$

$7 \ln 2 = 7 \ln 2$

β)

x	1
$x-1$	- 0 +
$\ln x$	- 0 +
$f(x)$	+ +

$f(x) > 0$.



⑧ : | $f(x) = 2x - 2$

$$(x-1) \ln x = 2(x-1)$$

$$(x-1)(\ln x - 2) = 0$$

$$x=1 \quad \ln x - 2 = 0$$

$$\ln x = 2$$

$$A(1, 0)$$

$$x = e^2$$

$$B(e^2, 2e^2)$$

II / $f(x) < 2x - 2$

$$(x-1)(\ln x - 2) < 0$$

x	$1 \quad e^2$		
$x-1$	-	0	+
$\ln x - 2$	-	-	0
$(x-1)(\ln x - 2)$	+	-	+

$$x \in (1, e^2)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$$

$$P(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + 1)$$

$$P(x) = 0 \Rightarrow 0, 1, -1$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(0) = 0,$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -1.$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow -\alpha + \beta - 1 = 0 \Rightarrow -\alpha + \beta = 1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{+} \quad 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\alpha = -1$$

① i) $P(x) > 0$

$$x(-x^2 + 1) > 0$$

x	-1	0	1
x	-	0	+
$-x^2 + 1$	-	0	-
P(x)	+	-	-

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

ii) vđo $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

$$\log \sqrt{10} = \log 10^{1/2} = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Apka vđo $P(\frac{1}{2}) > 0$.

opet to $\frac{1}{2} \in (0, 1)$

apa $P(\frac{1}{2}) > 0$

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 5)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1.$$

$$P(x) = 1 \quad (\Rightarrow) \quad (4x^2 - 1)(3x - 2) + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$(4x^2 - 1)(3x - 2) = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 3x - 2 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Γνωρίζω ότι} \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad P\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad P\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$\text{αρα για να είναι } P(\log 5) = 1$$

$$\text{πρέπει } \log 5 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \log 5 = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \log 5 = \frac{2}{3}$$

που δεν ισχύει τίποτα από αυτά.

⑧ $P(-1) = -14$
 $P(0) = 3$.

} Αφού $P(-1)$ και $P(0)$
 είναι ετερόσημα

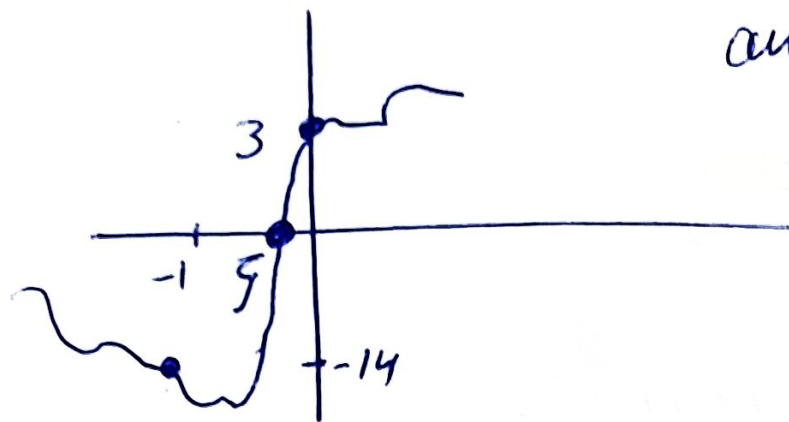
ακολουθώντας την

το $P(x)$ να

τέρνα των x ' x

τουλάχιστον

για $\varphi(x)$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{a} \quad f(1)=3 \Rightarrow 3 = \alpha \cdot 2^1 + \beta \Rightarrow 3 = 2\alpha + \beta$$

$$f(2)=13 \Rightarrow 13 = \alpha \cdot 2^2 + \beta \Rightarrow 4\alpha + \beta = 13$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + \beta = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha - \beta = -3 \\ 4\alpha + \beta = 13 \end{cases}$$

$$\oplus \quad 2\alpha = 10$$

$$\alpha = 5$$

$$\beta = -7$$

$$\textcircled{b} \quad \underline{y'y} \quad \boxed{f(x) = 5 \cdot 2^x - 7}$$

$$f(0) = 5 \cdot 2^0 - 7 = 5 \cdot 1 - 7 = -2$$

$$\Gamma(0, -2)$$

$$\textcircled{g} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \Rightarrow 5 \cdot 2^{x_1} - 7 < 5 \cdot 2^{x_2} - 7$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad f \nearrow$$

$$(8) \quad f(x) > 4^x - 3$$

$$5 \cdot 2^x - 7 > 4^x - 3$$

$$5 \cdot 2^x - 7 > (2^x)^2 - 3$$

$$2^x = t$$

$$5t - 7 > t^2 - 3$$

$$t^2 - 5t + 4 < 0$$

t	1	4
$t^2 - 5t + 4$	$+$	$+$

$$t \in (1, 4)$$

$$1 < t < 4$$

$$1 < 2^x < 4$$

$$2^0 < 2^x < 2^2$$

$$2^x$$

$$0 < x < 2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)

α) Αρκεί να δούμε αν f είναι άρτια.

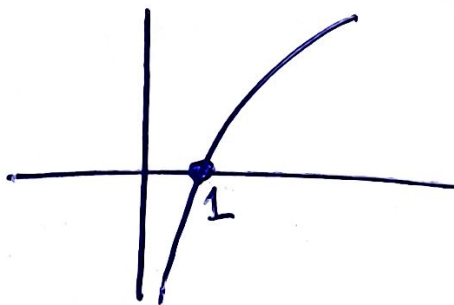
$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln (-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x)$$

Αρα

$f(-x) = f(x).$ $x \in D_f$ $-x \in D_f.$	Άρτια
---	-------

β) $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} 2 \ln x = \ln x$

γ) $f(x) = \ln x$



δ) $f(x) < 2 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^2 \Leftrightarrow x < e^2$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x' .

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

α) προση $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

$$D_f = (0, +\infty).$$

$$\frac{x'x}{f(x)} = 0$$

$$\ln(e^x - 1) = 0$$

$$\ln(e^x - 1) = \ln 1$$

$$e^x - 1 = 1$$

$$e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2$$

$$x = \ln 2$$

$$A(\ln 2, 0).$$

β) $f(x) = x - 1$

$$\ln(e^x - 1) = x - 1$$

$$e^{\ln(e^x - 1)} = e^{x-1}$$

$$e^x - 1 = e^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 = e^x \cdot e^{-1}$$

$$(e^x = t)$$

$$t - 1 = \frac{t}{e}$$

$$et - e = t$$

$$et - t = e$$

$$t(e-1) = e$$

$$t = \frac{e}{e-1} \quad \text{απα} \quad e^x = \frac{e}{e-1}$$

$$\ln e^x = \ln \frac{e}{e-1}$$

$$x = \ln e - \ln(e-1)$$

$$\boxed{x = 1 - \ln(e-1)}$$

① $f(x) = x + \alpha, \alpha > 0$

$$\ln(e^x - 1) = x + \alpha$$

$$e^{\ln(e^x - 1)} = e^{x + \alpha}$$

$$e^x - 1 = e^x e^{\alpha}$$

$$t - 1 = t e^{\alpha}$$

$$t - t e^{\alpha} = 1$$

$$t(1 - e^{\alpha}) = 1$$

$$t = \frac{1}{1 - e^{\alpha}} \quad \text{πρηνι} \quad 1 - e^{\alpha} \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq e^{\alpha} \Leftrightarrow e^0 \neq e^{\alpha}$$

$\alpha \neq 0$
να μην

$$e^x = \frac{1}{1 - e^{\alpha}}$$

$$\ln e^x = \ln\left(\frac{1}{1 - e^{\alpha}}\right)$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{1 - e^{\alpha}}\right)$$

* πρηνι $\frac{1}{1 - e^{\alpha}} > 0$

$$1 - e^{\alpha} > 0$$

$$1 > e^{\alpha}$$

$$e^0 > e^{\alpha}$$

$$\boxed{0 > \alpha}$$

Απορρο!

για $\alpha > 0$
Αδυνατι.

ΘΕΜΑ 4

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

α) Όχαι ου $Q(2) = \frac{1}{3} Q_0$ και $Q(4) = 1$.

$$\begin{aligned} Q(2) &= Q_0 \cdot e^{2c} = \frac{1}{3} Q_0 \rightarrow e^{2c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2c = \ln \frac{1}{3} \\ Q(4) &= Q_0 \cdot e^{4c} = 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} 2c &= \ln 1 - \ln 3 \\ c &= -\frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\ln 3}{2} t} = Q_0 \left(e^{\frac{1}{2} \ln 3} \right)^{-t} = Q_0 \left(e^{\ln \frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^t$$

$$\Leftrightarrow Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t$$

β) $Q_0 \cdot e^{4c} = 1$ οπώ $c = \frac{-\ln 3}{2}$

$$Q_0 \cdot e^{-\frac{4 \ln 3}{2}} = 1 \Leftrightarrow Q_0 \cdot e^{-2 \ln 3} = 1 \Leftrightarrow Q_0 \cdot 3^{-2} = 1$$

$$\boxed{Q_0 = 9}$$

$$\textcircled{1}. Q(t) = \frac{1}{81}$$

$$Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81}$$

$$9 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{3^6}$$

$$\sqrt{3}^{-t} = 3^{-6} \quad \Leftrightarrow 3^{-\frac{1}{2}t} = 3^{-6}$$

$$-\frac{1}{2}t = -6$$

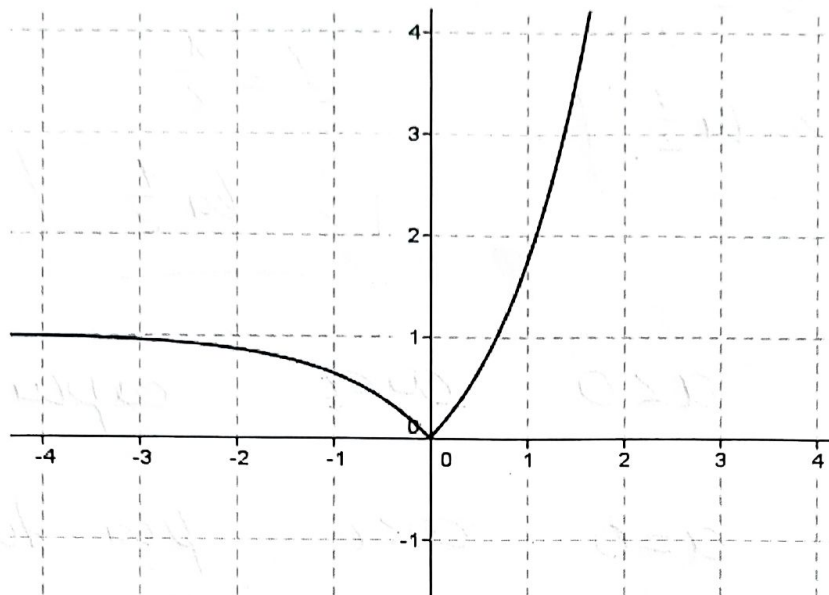
$$\underline{\underline{t = 12}}$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = |e^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y = \alpha$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = |e^x - 1| = \begin{cases} 1 - e^x, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow |e^x| = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	0
$e^x - 1$	$-0+$

β) Η $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$ και $\nearrow$ στο $[0, +\infty)$
 Το $0/0/0 \in$

$$\textcircled{8} \quad |f(x)| = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow) \quad |e^x - 1| = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$e^x - 1 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad e^x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$e^x = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{x = \ln \frac{3}{2}}$$

$$e^x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \ln \frac{1}{2}}$$

$\textcircled{8}$. Αν $\alpha < 0$ τότε καμία λύση.

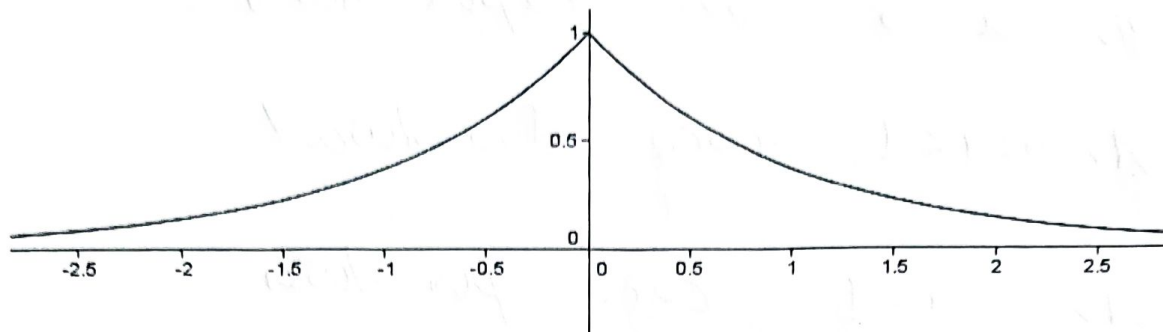
Αν $\alpha = 0$ τότε μία λύση.

Αν $0 < \alpha < 1$, έχω δύο λύσεις.

Αν $\alpha > 1$ τότε 1 λύση.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$\text{A. } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{B. } f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

α) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ γιατί παρουσιάζει
 όταν $x < 0$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα
 ενώ το e^{-x} είναι γν. φθίνουσα.

β) $x \in (-\infty, 0] \uparrow$
 $x \in [0, +\infty) \downarrow$

$A(0, 1)$ Ο.Μ.

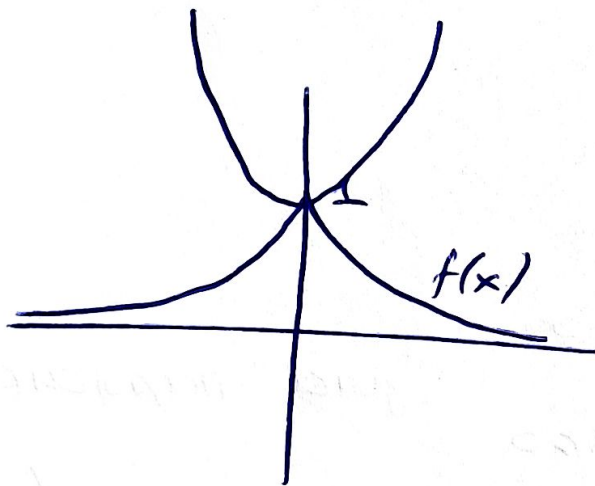
$\max f = 1$.

⑦. $f(x) = \alpha$

1. Αν $\alpha \leq 0$ τότε καμία λύση
2. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε δύο λύσεις,
3. Αν $\alpha = 1$ τότε μία λύση
4. Αν $\alpha > 1$ τότε καμία λύση.

⑧. $f(x) = x^2 + 1$.

Ισχύει ότι $f(x) \leq 1$ αν $x^2 \geq 0$
 $x^2 + 1 \geq 1$.



Αρα προφανώς $f(x) \leq x^2 + 1$
 Εκτός του σημείου επαφής.

$x = 0$

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t=0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(0) = 200 e^{c \cdot 0} = 200 \cdot 1 = 200$$

$$\textcircled{\beta} \quad P(1) = 328$$

$$200 \cdot e^c = 328$$

$$e^c = \frac{328}{200} \Leftrightarrow e^c = 1,64 \Leftrightarrow e^c = e^{\ln 1,64}$$

$$c = \ln 1,64$$

$$c = 0,5$$

$$\textcircled{\gamma} \quad 2000 \leq P(t) \leq 20000$$

$$2000 \leq 200 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \leq 20000$$

$$10 \leq e^{\frac{1}{2}t} \leq 100$$

$$\ln 10 \leq \frac{1}{2}t \leq \ln 100$$

$$2\ln 10 \leq t \leq 2\ln 100$$

$$4,6 \leq t \leq 9,2$$

ΘΕΜΑ 4

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

(Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$$

(Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{ct} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{ct}$$

$$\ln \frac{1}{2} = ct \Leftrightarrow t' = -\frac{\ln 2}{c}$$

$$\textcircled{\beta} \quad 5730 = -\frac{\ln 2}{c}$$

$$c = -\frac{\ln 2}{5730}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \frac{Q_0}{4} = Q_0 e^{ct} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{ct} \Leftrightarrow \ln \frac{1}{4} = ct$$

$$t = -\frac{\ln 4}{c}$$

$$\text{Άρα } t = \frac{-\ln 4}{-\frac{\ln 2}{5730}} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 11460 \text{ χρόνια.}$$

ΘΕΜΑ 4

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t) = q_0 \cdot \alpha^t, \quad t \geq 0,$$

όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$.

(Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

(Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4^{ης} ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

(Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$.

(Μονάδες 5)

α) Το q_0 είναι παριστάνει την αρχική ποσότητα φαρμάκου. Αφού η ποσότητα του φαρμάκου φθίνει τότε η εκθετική σμάρτηση η οποία είναι φθίνουσα φθάνει

$$\textcircled{B} \text{ i) } f(2) = \frac{q_0}{2} \quad \Leftrightarrow q_0 \cdot a^1 = \frac{q_0}{2}$$

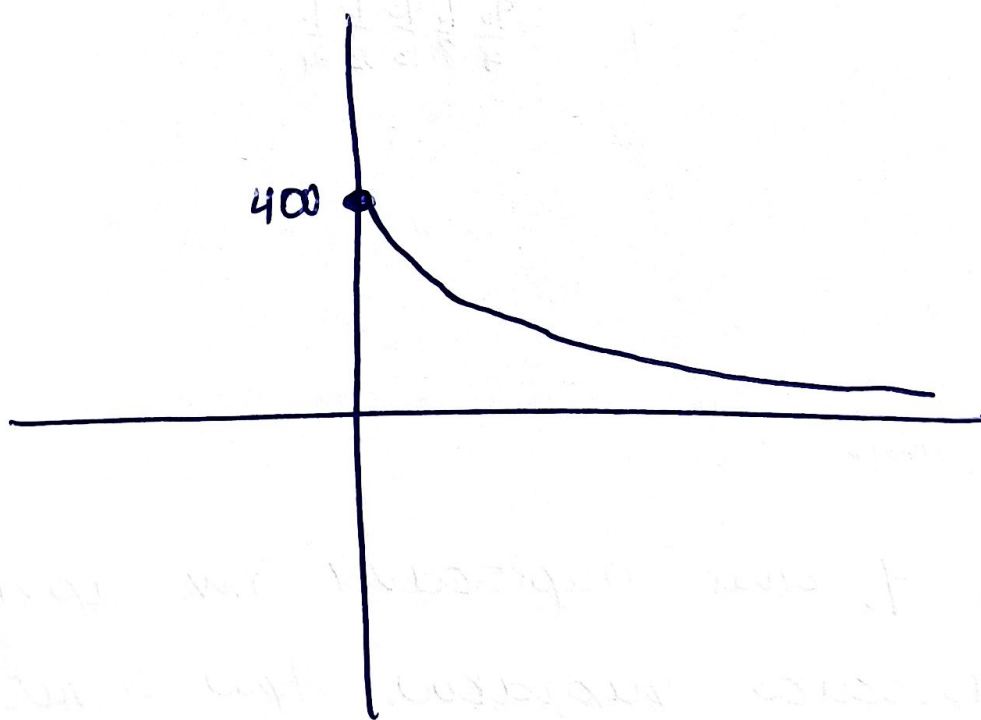
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

ii) maximal.

$$\textcircled{B} \text{ i) } f(4) = 25 \quad \Leftrightarrow q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 25$$

$$\Leftrightarrow q_0 \cdot \frac{1}{16} = 25 \quad \Leftrightarrow q_0 = 400$$

$$\text{ii) } f(x) = 400 \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$



ΘΕΜΑ 4

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576,$$

με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος OK της αψίδας είναι 192 m.

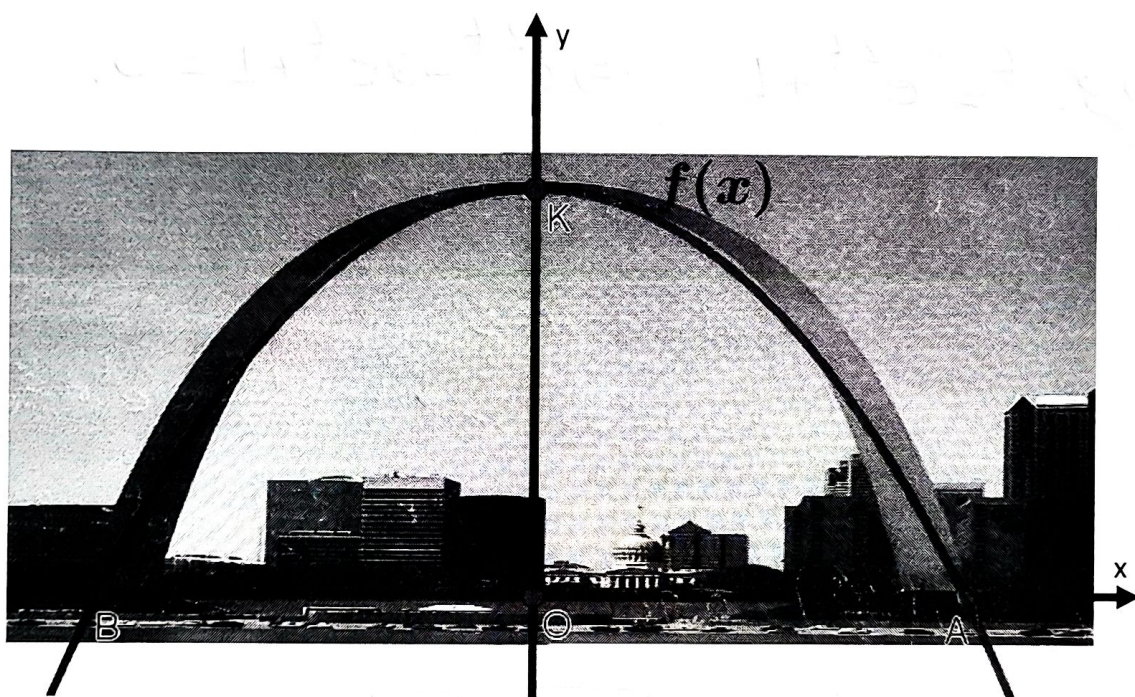
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $\ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \cong 0,96$.

(Μονάδες 13)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία A και B έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος AB της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της OK.

(Μονάδες 5)



α) Αρκει να δούμε $|f(x)| \leq 192$

$$\Leftrightarrow -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576 \leq 192$$

$$-192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) \leq -384 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \geq 2.$$

$$\text{ОСТВ } \frac{x}{100} = t. \text{ Априк } v\delta \quad e^t + e^{-t} \geq 2$$

$$e^t + \frac{1}{e^t} \geq 2 \quad (\Rightarrow) e^{2t} + 1 \geq 2e^t$$

$$(e^t - 1)^2 \geq 0 \quad \text{нон } \text{исхуу.}$$

$$\textcircled{B} \quad H(x) = 0. \quad (\Rightarrow) -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576 = 0.$$

$$\boxed{\text{ОСТВ } \frac{x}{100} = t.}$$

$$576 = (e^t + e^{-t}) 192$$

$$3 = e^t + e^{-t} \quad (\Rightarrow) 3 = e^t + \frac{1}{e^t}$$

$$(\Rightarrow) 3e^t = e^{2t} + 1 \quad (\Rightarrow) e^{2t} - 3e^t + 1 = 0.$$

$$\boxed{e^t = k} \quad k^2 - 3k + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5.$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \rightarrow k = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow e^t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \rightarrow k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow e^t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) = 0,96.$$

$$\frac{x}{100} = 0,96 \quad (\Rightarrow) \boxed{x = 96}$$

$$\textcircled{B} \text{ Априк } v\delta \quad 2 \cdot 96 = 192$$

$$192 = 192.$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

α)

$$\frac{x-2}{x+1} > 0$$

x	-1	2
x-2	-	- 0 +
x+1	- 0 +	+
$\frac{x-2}{x+1}$	+	- +

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

β)

i) πρώτα $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

ii)

πρώτα $0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$

$$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0$$

$$\text{και } \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$$

$$\alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-3}{\alpha+1} < 0$$

$$\alpha+1 > 0$$

$$\alpha \in (2, +\infty) \Rightarrow \alpha > 2$$

iii). Решим $\frac{a-2}{a+1} = 1$

$$\cancel{a}-2=\cancel{a}+1$$

$$-2=1 \text{ Противоречие!}$$

$$\text{Для } \forall a \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 05)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x) \quad \text{άρτια.}$$

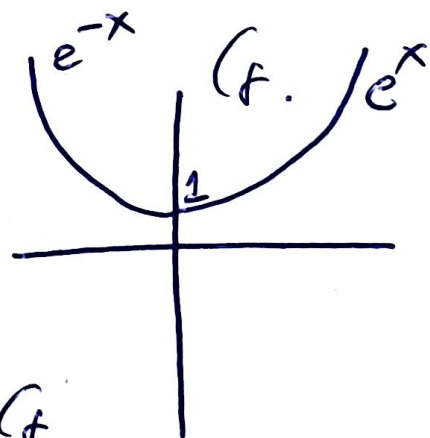
$$x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Νδ} \quad f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{|x|} \geq 1 \Leftrightarrow e^{|x|} \geq e^0$$

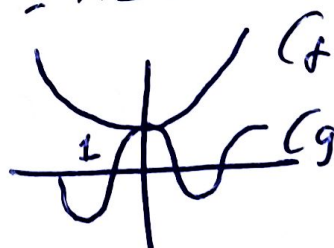
$$\Leftrightarrow |x| \geq 0 \quad \text{που ισχύει.}$$

$$f(0) = 1 \quad \text{αρα} \quad \min f = 1.$$

$$\textcircled{\gamma} \quad f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$



$$\textcircled{\delta} \quad f(x) = g(x)$$



$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 1 \\ g(x) \leq 1 \end{array} \right\} \text{Το μοναδικό κοινό σημείο για } x=0$$

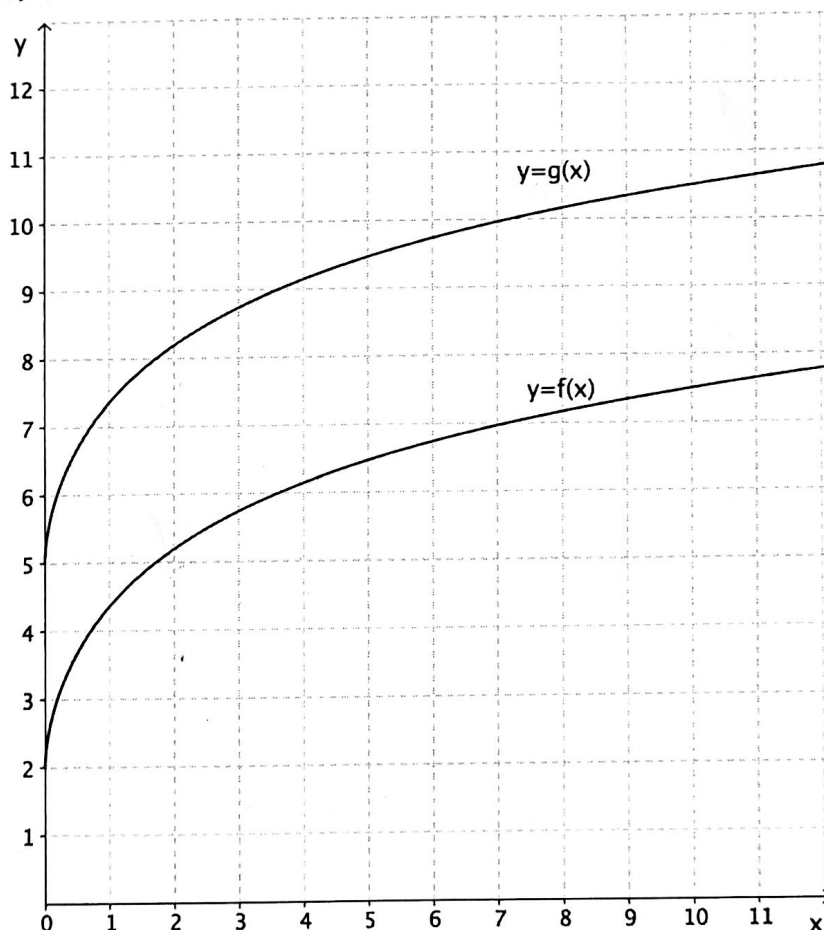
ΘΕΜΑ 4

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = a\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

(Μονάδες 8)

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^ο μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε:

υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad 2 = \alpha \sqrt{\ln 1} + \ln 1 + B$$

$$\boxed{2 = B}$$

$$2\sqrt{2} + 4 = \alpha \sqrt{\ln(e^2 - 1 + 1)} + \ln(e^2) + 2$$

$$2\sqrt{2} + 4 = \alpha \sqrt{2} + 4$$

$$\boxed{\alpha = 2}$$

$$H(x) = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 2$$

$$G(x) = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 5$$

β) Περίπου 1,8 μηνών είναι η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους.

$$f(x) = 5$$

$$2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 2 = 5$$

$$\ln(x+1) = t.$$

$$2\sqrt{t} + t - 3 = 0$$

$$2\sqrt{t} = 3 - t$$

$$t \geq 0 \quad \text{και} \quad 3 - t \geq 0$$

$$3 \geq t$$

$$4t = (3 - t)^2$$

$$4t = 9 - 6t + t^2$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t \neq 9$$

$$t = 1$$

$$\ln(x+1) = 1$$

$$x+1 = e$$

$$x = e - 1.$$

⑧

Υπερβαρο

γιατα η μάζα του φυσιολογικη ηδη

ειναι περισσο 11 kg.