

$$6. (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$7. \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

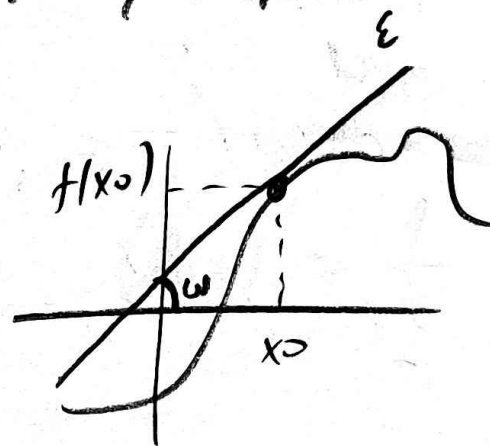
Προσοχή

1. Αν f αυξά τότε f' περλάει

2. Αν f περλάει τότε f' αυξά

εφαπτομένη στο $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\exists y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



1. $f'(x_0) \geq 0$ κλίση ή συντελεστής

διωθούσης της εφαπτομένης

2. Αν $f'(x_0) > 0$ η ε σχηματίζει οξεία γωνία με x'

3. Αν $f'(x_0) < 0$ η ε σχηματίζει αμβλύα γωνία με x'

$$4. f'(x_0) = \epsilon \varphi \omega$$

$$5. f'(x_0) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \epsilon // x'x$$

Προσοχή

Αν η εξ $y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη

της f στο $A(x_0, f(x_0))$ τότε

$$\begin{cases} f'(x_0) = \alpha \\ f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \end{cases}$$

κανονι D-L-H

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{DLH} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{DLH} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Μεγαλη προσοχη

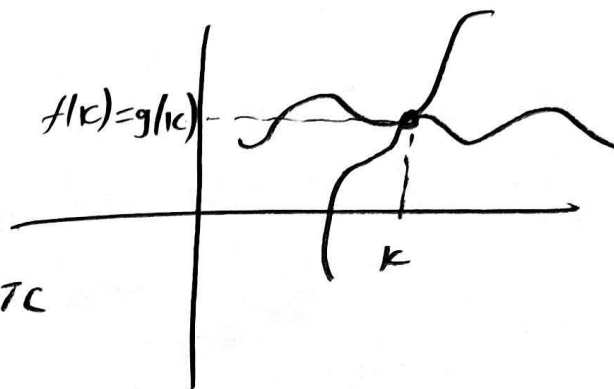
$$1. +\infty - \infty = +\infty + (-\infty) = +\infty \left(1 + \stackrel{DLH}{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)} \right)$$

$$2. 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ DLH}$$

κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο

Για να υπάρχει κοινή
εφαπτομένη σε κοινό σημείο
πρέπει να υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{cases} f(\kappa) = g(\kappa) \\ f'(\kappa) = g'(\kappa) \end{cases}$$

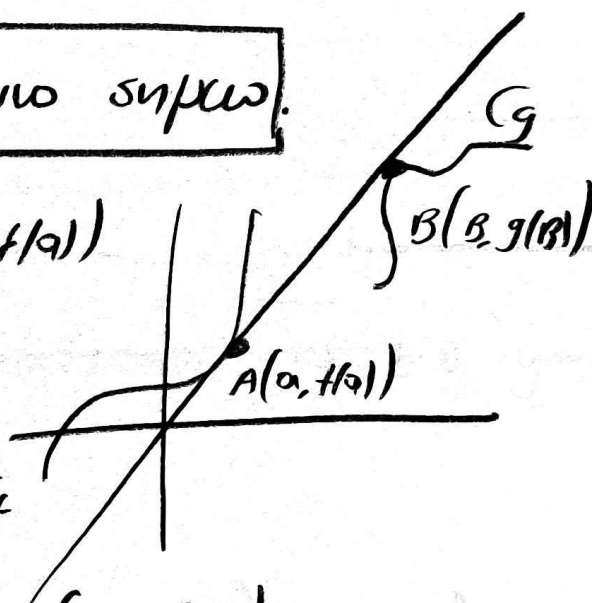


κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο.

Η εφαπτομένη της f στο $A(a, f(a))$

$$\varepsilon \approx y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = f'(a)x + f(a) - a f'(a)$$



Η εφαπτομένη της g στο $B(b, g(b))$

$$\varepsilon \approx y - g(b) = g'(b)(x - b)$$

$$y = g'(b)x + g(b) - b g'(b)$$

Προκύπτει για την ίδια εφαπτομένη οπωσδήποτε.

Άρα

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - a f'(a) = g(b) - b g'(b) \end{cases}$$

Άσκηση 20

Να βρεθεί η εφαπτομένη της f στο M

α) $f(x) = x^2 - 4x$ στο $M(3, f(3))$

$$\varepsilon: y - f(3) = f'(3)(x - 3) \quad (\Rightarrow) \quad y - (-3) = 2(x - 3)$$

$$y + 3 = 2x - 6$$

$$\varepsilon: y = 2x - 9$$

$$\bullet f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3$$

$$\bullet f'(x) = 2x - 4$$

$$\bullet f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2$$

β) $f(x) = x^3 - 1$ στο $M(0, f(0))$

$$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad (\Rightarrow) \quad y - (-1) = 0(x - 0)$$

$$\varepsilon: y = -1$$

$$f(0) = 0^3 - 1 = -1$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(0) = 0$$

ορίοντα εφαπτομένη.

$$\textcircled{y} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{atau } M(1, f(1))$$

$$\varepsilon \circ y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \xrightarrow[\text{DLH}]{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 2}{1} = 4$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x \cancel{x} + 1)}{x \cancel{- 1}} = 4$$

$$\text{apa } f'(1) = 4$$

$$\text{Zweites} \quad y - 3 = 4(x - 1)$$

$$y - 3 = 4x - 4$$

$$\boxed{\varepsilon \circ y = 4x - 1}$$

Ασκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης

α) η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης 5.

Εστω $M(k, f(k))$ σημείο επαφής

$$\Leftrightarrow y - f(k) = f'(k)(x - k)$$

ήδη $f'(k) = 5 \quad (\Rightarrow) -2k + 3 = 5 \quad (\Rightarrow) -2k = 2$
 $k = -1$

$$\boxed{f'(x) = -2x + 3}$$

Άρα $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$

$$y + 4 = 5(x + 1)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow y = 5x + 1}$$

β) η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία

$$\Gamma: y = x + 5$$

Εστω $M(k, f(k))$ σημείο επαφής

$$\Leftrightarrow y - f(k) = f'(k)(x - k)$$

$$\begin{aligned} \text{αφού } \epsilon // J & \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} = \lambda_J & \Leftrightarrow f'(k) = 1 \\ & -2k + 3 = 1 \\ & -2k = -2 \\ & k = 1, \end{aligned}$$

$$\epsilon \ni y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\boxed{\epsilon \ni y = x + 1}$$

β) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία

$$J \ni x - 3y + 12 = 0.$$

Εστω $M(k, f(k))$ σημείο επαφής.

$$\epsilon \ni y - f(k) = f'(k)(x - k)$$

$$\text{Αφού } \epsilon \perp J \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} \cdot \lambda_J = -1 \quad \Leftrightarrow f'(k) \cdot \left(\frac{-1}{-3} \right) = -1$$

$$\begin{aligned} f'(k) \cdot \frac{1}{3} &= -1 & \Leftrightarrow f'(k) &= -3 & \Leftrightarrow \begin{aligned} -2k + 3 &= -3 \\ -2k &= -6 \\ k &= 3 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\epsilon \ni y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

$$y - 0 = -3(x - 3)$$

$$\boxed{\epsilon \ni y = -3x + 9}$$

δ) η οποία είναι παράλληλη στον $x'x$.

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ το σημείο επαφής

$$\Leftrightarrow y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x - \kappa).$$

Πρέπει $f'(\kappa) = 0 \Leftrightarrow -2\kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = 2\kappa$
 $\kappa = \frac{3}{2}.$

αρα $\Leftrightarrow y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2})(x - \frac{3}{2})$

$$y - \frac{9}{4} = 0(x - \frac{3}{2})$$

$$\boxed{\Leftrightarrow y = \frac{9}{4}}$$

ε) η οποία σχηματίζει 135° με τον $x'x$

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ το σημείο επαφής

$$\Leftrightarrow y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x - \kappa).$$

Πρέπει $y - f(\kappa) = \varphi 135 \Leftrightarrow -2\kappa + 3 = -1$

$$\Leftrightarrow -2\kappa = -4 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

$$\Leftrightarrow y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y - 2 = -1(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Leftrightarrow y = -x + 4}$$

Άσκηση 22

Δίνεται $f(x) = x^2 + 6x$. Να βρούμε τη εφαπτομένη
η οποία διέρχεται (αγγίζει) από το σημείο
 $A(-3, -10)$.

Έστω $M(k, f(k))$ το σημείο επαφής

$$\varepsilon_8 \quad y - f(k) = f'(k)(x - k) \rightarrow A(-3, -10)$$

$$-10 - f(k) = f'(k)(-3 - k)$$

$$-10 - (k^2 + 6k) = (2k + 6)(-3 - k)$$

$$-10 - k^2 - 6k = -6k - 2k^2 - 18 - 6k$$

$$k^2 + 6k + 8 = 0 \quad (k = -2) \quad (f = -4)$$

$$\varepsilon_1 \quad y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$$

$$y + 8 = 2(x + 2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 \quad y = 2x - 4}$$

$$\varepsilon_2 \quad y - f(-4) = f'(-4)(x + 4)$$

$$y + 8 = -2(x + 4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 \quad y = -2x - 16}$$

Άσκηση 23

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισμένη. και

$$g(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) + x f(-x). \text{ Αν } \varepsilon: y = 2x + 1 \text{ εφαρτάται}$$

της C_f στο $x_1 = 1$ να βρούμε των

εφαρτάται στη C_g στο $x_2 = -1$.

Αφού η ε εφαρτάται στη C_f στο $x_1 = 1$

$$\text{ισχύει ότι } \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 2 \cdot 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

Η εφαρτάται στη C_g στο $x_2 = -1$

$$\text{Τότε } y - g(-1) = g'(-1)(x+1)$$

$$g'(x) = f'\left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} + f(-x) - x f'(-x)$$

$$\text{αρα } g'(-1) = f'(1) + f(1) + f'(1) = 7$$

$$g(-1) = f(1) - f(1) = 0$$

$$\text{Αρα } \text{Τότε } y - 0 = 7(x+1)$$

$$\text{Τότε } y = 7x + 7$$

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$

Η ευθεία $\varepsilon: y = 10x - 9$ εφαπτίζεται στη Γ

στο σημείο της $M(2, f(2))$

α) Να βρωσώ τα a, b .

$$\text{Ισχύει ότι } \begin{cases} f'(2) = 10 \\ f(2) = 10 \cdot 2 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2) = 10 \\ f(2) = 11 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{αρα } f'(2) = 12 + 4a + b = 10$$

$$\Rightarrow \boxed{4a + b = -2}$$

$$\text{ενίση } 8 + 4a + 2b + 3 = 11$$

$$4a + 2b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2a + b = 0}$$

$$\begin{cases} 4a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = -2 \\ -2a - b = 0 \end{cases} \quad (+)$$

$$2a = -2$$

$$\boxed{a = -1}$$

$$\boxed{b = 2}$$

$$\boxed{f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3}$$

(B) Νόσ η εστ $y=3x+2$ εφαρτάται εντ C_f

Αρκυ νό $\exists k \in \mathbb{R}$ τ.ω $\begin{cases} f'(k)=3 \\ f(k)=3k+2 \end{cases}$

εφούσον $f(x)=x^3-x^2+2x+3$

$$f'(x)=3x^2-2x+2$$

Αρα $\begin{cases} 3k^2-2k+2=3 \\ k^3-k^2+2k+3=3k+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2-2k-1=0 \\ k^3-k^2-k+1=0 \end{cases}$

• $3k^2-2k-1=0$

$$\Delta=4+12=16$$

$$k=\frac{2 \pm 4}{6} \rightarrow \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$k=1$ $k=-\frac{1}{3}$

• $k^3-k^2-k+1=0$

$$k^2(k-1)-(k-1)=0$$

$$(k-1)(k^2-1)=0$$

$k=1$ $k=1$ $k=-1$

Παρατηρώ οτι για $k=1$ εφαρτάται

το σύστημα εξισώσεων. Αυτό σημαίνει

οτι η εστ εφαρτάται εντ C_f στο $A(1, H(1))$.

Άσκηση 25

Δίνεται $f(x) = x^2 + \lambda x + 2$ και $\varepsilon \delta y = -x + 2$

Να βρούμε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ε να εφαρμόζεται
της C_f

Πρέπει να υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε $\begin{cases} f'(k) = -1 \\ f(k) = -k + 2 \end{cases}$

$$f'(x) = 2x + \lambda$$

αρα $\begin{cases} 2k + \lambda = -1 \\ k^2 + \lambda k + 2 = -k + 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = -1 - 2k}$

$$k^2 - (1 + 2k)k + 2 = -k - 1 - 2k$$

$$k^2 - k - 2k^2 + 2 = -3k - 1$$

$$-k^2 - k + 2 = -3k - 1$$

$$-k^2 + 2k + 3 = 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$\boxed{k = 3}$$

$$\downarrow$$
$$\boxed{\lambda = -7}$$

$$\boxed{k = -1}$$

$$\downarrow$$
$$\boxed{\lambda = 1}$$

Άσκηση 26

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\bullet f(x) = ax + bx^2$$

$$\bullet g(x) = x^2 + 2bx + a$$

Βρείτε τοι $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε f, g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμήριση $x_0 = 1$.

$$\text{Απαιτώ } \begin{cases} f'(1) = g'(1) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 + 2b \Rightarrow \boxed{a = 2} \\ b = 1 + 2b + a \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx$$

$$b = 1 + 2b + 2$$

$$\boxed{-3 = b}$$

$$g'(x) = 2x + 2b$$

Άσκηση 27

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\bullet f(x) = x^2 - 3x + 4$$

$$\bullet g(x) = x^2 + x + 4$$

α) Να βρεθεί το κοινό τους σημείο, να έχουν κοινή εφαπτομένη

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = x^2 + x + 4$$

$$\Leftrightarrow -3x = x$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

Άρα να $f'(0) \neq g'(0)$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$g'(x) = 2x + 1$$

$$\text{Άρα } f'(0) = -3$$

$$g'(0) = 1$$

β) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των f, g

Άρα να βρεθούν α, β ώστε

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3 = 2\beta + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - 3\alpha + 4 - 2\alpha^2 + 3\alpha = \beta^2 + \beta + 4 - 2\beta^2 - \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ -\alpha^2 + 4 = -\beta^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha^2 - \beta^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\alpha = 2 + \beta} \\ (2 + \beta)^2 - \beta^2 = 0 \end{cases}$$

$$4 + 4\beta + \beta^2 - \beta^2 = 0$$

$$\boxed{\beta = -1}$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

Συνεπώς $A(a, f(a))$ συντάσσεται $A(1, 2)$.

και η κοινή εφαπτομένη είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 2 = -(x - 1)$$

$$\boxed{y = -x + 3}$$