Γενικη

Επαναληψη

Διαγωνισματα 5

$\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Ασκηση 1

$\frac{0}{0}$

Να υπολογιστούν τα όρια.

(α) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+4x-6}{x^2-4x+5} = \frac{3^3-5\cdot 3^2+4\cdot 3-6}{3^2-4\cdot 3+5} = -6$

(β) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-2x-8} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2+2x-3)}{(x+2)(x-4)}$

$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x-3}{x-4} = \frac{1}{2}$

(γ) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}^2-3^2}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{2\cdot 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(δ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x-1} - 1} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x+3}^{\,2} - \sqrt{5-x}^{\,2}\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}^{\,2} - 1^2\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(x+3-5+x\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{\left(2x-2\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-2)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x-1} + 1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(ε) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\overset{\ominus}{|x-3|} - |x^2 - \overset{\oplus}{7x} + 9| + 4 - 3x}{x^2 - x} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x+3-\left(x^2-7x+9\right)+4-3x}{x^2-x} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^2+3x-2}{x^2-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-\cancel{(x-1)}(x-2)}{x\cancel{(x-1)}} = 1.$$

③ $$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-x|+|-x^2-2x+3|+x^3-1}{x^2-1-|1-x|}$$

Το οριο δεν υπαρχει!

x		-3		0		1	
x^2-x	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$-x^2-2x+3$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$1-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$

Με ενδιαφερει η περιοχη κοντα στο 1.

$$\to \lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-x|+|-x^2-2x+3|+x^3-1}{x^2-1-|1-x|}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+x-x^2-2x+3+x^3-1}{x^2-1-1+x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2(x-2)-(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-2)\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=-\frac{2}{3}$$

$$\to \lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-x|+|-x^2-2x+3|+x^3-1}{x^2-1-|1-x|}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+x^2+2x-3+x^3-1}{x^2-1+1-x}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+2x^2+x-4}{x^2-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+3x+4)}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$=8.$$

(η) Σω

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2x-2ημx}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{ημx}{x}\,ημx-2\,\frac{ημx}{x}}{x+1}=$$

$$=\frac{1\cdot 0-2\cdot 1}{0+1}=\frac{-2}{1}=-2$$

Σως

(θ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{\sqrt{x^2+x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{(συνx-1)\left(\sqrt{x^2+x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(συνx-1)\left(\sqrt{x^2+x+4}+2\right)}{\sqrt{x^2+x+4}^{\,2}-2^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(συνx-1)\left(\sqrt{x^2+x+4}+2\right)}{x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(συνx-1)\left(\sqrt{x^2+x+4}+2\right)}{x\,(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+4}+2}{x+1}$$

$$=0\cdot\frac{4}{1}=0.$$

Σως

(ι)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-συνx)(1+συνx)}{x^2(1+συνx)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-συν^2x}{x^2(1+συνx)}=\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2x}{x^2(1+συνx)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+συνx}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Β' τρόπος

μηδενική × φραγμένη.

x	-1	0
x^2+x	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$	

(κ) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}$

Ισχύει ότι $\quad -1 \le \text{συν}\,\frac{1}{x} \le 1$

1. Αν $x<0$ τότε $\quad -x^2-x \ge (x^2+x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x} \ge x^2+x$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to 0^-}(-x^2-x)=0 \\ &\bullet \lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Από Κ.Π} \quad \lim_{x\to 0^-}(x^2+x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}=0$$

2. Αν $x>0$ τότε $\quad -x^2-x \le (x^2+x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x} \le x^2+x$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to 0^+}(-x^2-x)=0 \\ &\bullet \lim_{x\to 0^+}(x^2+x)=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Από Κ.Π} \quad \lim_{x\to 0^+}(x^2+x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}=0.$

Ασκηση SOS

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \eta\mu\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{χαοτικο}]{\eta\mu\infty} 0$

$$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$$

$$\boxed{-x^4 \le x^4\eta\mu\frac{1}{x} \le x^4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} -x^4 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} x^4\eta\mu\frac{1}{x} = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^3\,\eta\mu\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{χαοτικο.}]{\eta\mu(\infty)}$

$\boxed{1\eta}$ Αν $x<0$

$$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$$

$$\boxed{-x^3 \ge x^3\eta\mu\frac{1}{x} \ge x^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} -x^3 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^-} x^3\eta\mu\frac{1}{x} = 0$$

$\boxed{2_4}$ Αν $x>0$ τοτε $-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$

$$\boxed{-x^3 \le x^3\eta\mu\frac{1}{x} \le x^3.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} -x^3 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} x^3\eta\mu\frac{1}{x} = 0$$

Αρα $\lim\limits_{x\to 0} x^3\eta\mu\frac{1}{x} = 0,$

Β' τροπος (Μ×Φ)

$$\lim_{x\to 0} x^3\eta\mu\frac{1}{x} \overset{M\times\Phi}{=\!=} 0$$

$\to \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$

$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$

$|\eta\mu\frac{1}{x}| \le 1$

$|x^3||\eta\mu\frac{1}{x}| \le 1\cdot|x^3|$

$|x^3\eta\mu\frac{1}{x}| \le |x^3|$

$$\boxed{-|x^3| \le x^3\eta\mu\frac{1}{x} \le |x^3|}$$

$\lim\limits_{x\to 0} -|x^3| = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} |x^3| = 0$

Απο Κ.Π

Οροι $\frac{\alpha}{0}$

1. Παραγοντοποιω τα παντα.
2. Χωριζω τοιλους ταικους.
3. Κοιταω αν ο παρονομαστης που μηδενιζεται ειναι θετικη ή αρνητικη ποσοτητα.
4. Αν δεν ξερω τι ειναι παιρνω περιπτωσεις.

Ασκηση 2

$$\frac{\alpha}{0}$$

Να υπολογιστουν τα παρακατω ορια

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

(α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

(β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}$ Το όριο δεν υπαρχει

x	0
x^3	$-$ 0 $+$

→ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

→ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$

(γ) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty.$

(δ) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{|x+3|} = +\infty$

(ε) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sigma v x - 1} = -\infty$

Ισχυει οτι $\sigma v x \leq 1 \iff \sigma v x - 1 \leq 0$

ζ) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{4-x}$ Το οριο δεν υπαρχει

→ $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{4-x} = +\infty$

x	4
4-x	+ 0 -

→ $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{4-x} = -\infty$

η) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-5}{x^3-6x^2+9x} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-5}{x(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-5}{x} \cdot \dfrac{1}{(x-3)^2}$

$= \dfrac{-2}{3} \cdot +\infty = -\infty$

θ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-6}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x-2}$

→ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-6}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{-4}{3} \cdot (-\infty) = +\infty$

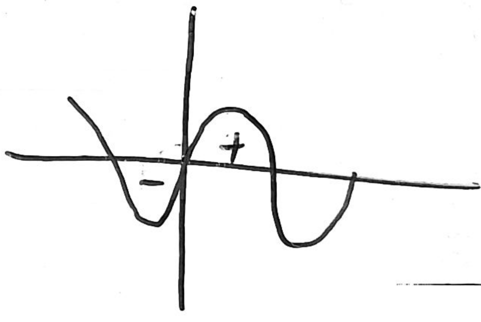
x	2
x-2	- 0 +

→ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-6}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{4}{3}(+\infty) = -\infty$

Το οριο δεν υπαρχει!

x	0
x	- 0 +
ημx	- 0 +
xημx	+ | +

ι) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\underbrace{x\,ημx}_{+}} = +\infty$



(ζ) $\lim_{x \to 4} \frac{1}{4-x}$ Το όριο δεν υπάρχει

$\to \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{4-x} = +\infty$

x	4
$4-x$	$+ \ 0 \ -$

$\to \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{4-x} = -\infty$

(η) $\lim_{x \to 3} \frac{x-5}{x^3-6x^2+9x} = \lim_{x \to 3} \frac{x-5}{x(x-3)^2} = \lim_{x \to 3} \frac{x-5}{x} \cdot \frac{1}{(x-3)^2}$

$= \frac{-2}{3} \cdot +\infty = -\infty$

(θ) $\lim_{x \to 2} \frac{x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x-6}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}$

$\to \lim_{x \to 2^-} \frac{x-6}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{-4}{3} \cdot (-\infty) = +\infty$

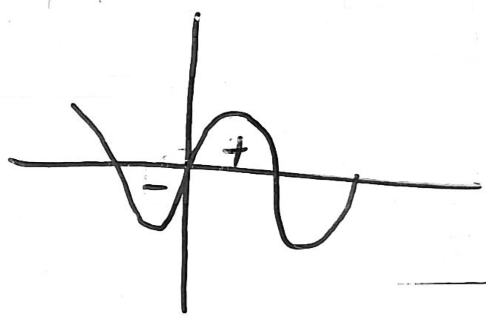
x	2
$x-2$	$- \ 0 \ +$

$\to \lim_{x \to 2^+} \frac{x-6}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2} = -\frac{4}{3} (+\infty) = -\infty$

Το όριο δεν υπάρχει!

x	0	
x	$-$ 0	$+$
ημx	$-$ 0	$+$
xημx	$+$	$+$

(ι) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\underbrace{x\,\eta\mu x}_{(+)}} = +\infty$



Ασκηση 3

Ορια

$x \to \infty$

Να υπολογιστουν τα ορια

ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4) = +\infty$

ⓑ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$

ⓖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^6) = +\infty$

ⓓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^5}\right) = 0$

ⓔ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-5x^2+7x-6) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3) = +\infty$

ⓩ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3-3x^2+5}{2x^3+7x-6} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3}{2x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2} = 3$

ⓗ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|\overset{+}{x^4+6x^3-5x+6}|-x^4}{|\underset{+}{4x^3+2x^2-3x}|+x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+6x^3-5x+6-x^4}{4x^3+2x^2-3x+x^3}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3-5x+6}{5x^3+2x^2-3x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3}{5x^3} = \dfrac{6}{5}.$

θ $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x+5}+x\right]=+\infty$$

ι $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+2}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-3x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\overset{\oplus}{|x|}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-3x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-3\right)\right]=+\infty(1-3)=-\infty.$$

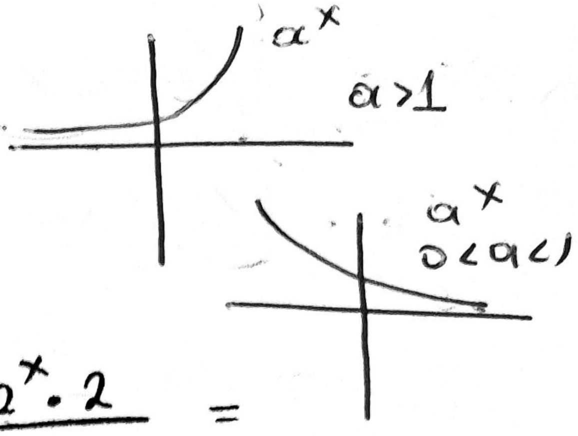
κ $$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{4x^2-5x+2}+2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-5x+2}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-5x+2}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-5x+2}^{\,2}-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-5x+2}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-5x+2-4x^2}{\sqrt{4x^2-5x+2}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+2}{-x\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-5+\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}$$

$$=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$$

λ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x = +\infty$



ρ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{7^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^x = 0$

ν) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x + 2^x \cdot 2}{3^x \cdot 9 + 2^x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x\left(1 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{3^x\left(9 + \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)} = \frac{1}{9}$

ξ) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5^x \cdot 5 + 2^x \cdot 8}{5^x - 2^x \cdot 2}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2^x\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot 5 + 8\right)}{2^x\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x - 2\right)} = \frac{8}{-2} = -4$

ο) $\lim_{x\to0^+} \frac{6\ln^2 x - 5\ln x + 4}{3\ln^2 x + 2\ln x - 1} = \lim_{k\to-\infty} \frac{6k^2 - 5k + 4}{3k^2 + 2k - 1} =$

Θέτω $\ln x = k$
Όταν $x \to 0^+$
τότε $k \to -\infty$

$= \lim_{k\to-\infty} \frac{6k^2}{3k^2} = 2.$

(π) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^3-5x) - 2\ln(x+2)\right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^3-5x) - \ln(x+2)^2\right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^3-5x}{(x+2)^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^3-5x}{x^2+4x+4}\right)$

$= \lim\limits_{\kappa\to+\infty} \ln\kappa = +\infty.$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Θέτω } \dfrac{x^3-5x}{x^2+4x+4} = \kappa \\ \text{όταν } x\to+\infty \text{ το } \kappa\to+\infty \\ \text{γιατί } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-5x}{x^2+4x+4}\right) = +\infty \end{array}}$$

(ρ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1) - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - \ln e^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x}\right) = 0.$

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x} = 1.$

σ) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x}\,\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{\cancel{x}} = 1.$

επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

τ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,\eta\mu x}{x^2+1}.$

<u>Β' τρόπος</u>

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}\,\eta\mu x = 0$ (Μ×Φ)

Ισχύει ότι $-1\le\eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+1}\le\frac{\eta\mu x}{x^2+1}\le\frac{1}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1}\le\frac{x\,\eta\mu x}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}$

- $\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{x^2+1}=0$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$

Από κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,\eta\mu x}{x^2+1}=0.$

υ) $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2-\eta\mu x}{x}\right)=-\infty.$

Ισχύει ότι $-1\le\eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow 1\ge-\eta\mu x\ge-1 \Leftrightarrow$

$3\ge 2-\eta\mu x\ge 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x}\ge\frac{2-\eta\mu x}{x}\ge\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Από Κ.Π $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\eta\mu x}{x}=0$

Μηδενικη x φραγμενη

Μια ειδικη περιπτωση οριου ειναι η παρακατω

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Εστω οτι θελω να υπολογισω το $\lim_{x \to x_0} f(x)\,\eta\mu g(x)$

Τοτε $-1 \leq \eta\mu g(x) \leq 1$

$$|\eta\mu g(x)| \leq 1$$

$$|f(x)|\,|\eta\mu g(x)| \leq 1 \cdot |f(x)|$$

$$|f(x)\,\eta\mu g(x)| \leq |f(x)|$$

$$-|f(x)| \leq f(x)\,\eta\mu g(x) \leq |f(x)|$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \lim_{x \to x_0} -|f(x)| = 0 \\ \rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to x_0} f(x)\,\eta\mu g(x) = 0$$

Μνημονικος κανονας

1. $e^0 = 1$ $\quad \ln e = 1$

$e^1 = e$ $\quad \ln 1 = 0$

2. $e^{-\infty} = 0$ $\quad \ln 0 = -\infty$

$e^{+\infty} = +\infty$ $\quad \ln +\infty = +\infty$

3. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$ Απροσδιοριστιες.

4. $\frac{0}{\infty} = 0$ $\qquad \frac{\alpha}{\infty} = 0$

5. $\frac{\alpha}{0} = \alpha \cdot \frac{1}{0} = \alpha \cdot \infty = \infty$

$\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$

Ασκηση SOS

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^4 ημ\frac{1}{x} \overset{\text{ημ}\infty}{\underset{\text{χαοσιμο}}{=\!=}} 0$

$-1 \le ημ\frac{1}{x} \le 1$

$$\boxed{-x^4 \le x^4 ημ\frac{1}{x} \le x^4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} -x^4 = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} x^4 ημ\frac{1}{x} = 0 .$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^3 ημ\frac{1}{x} \overset{\text{ημ}(\infty)}{\underset{\text{χαοσιμο.}}{=\!=}}$

$\boxed{1η}$ Αν $x<0$

$-1 \le ημ\frac{1}{x} \le 1$

$$\boxed{-x^3 \ge x^3 ημ\frac{1}{x} \ge x^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} -x^3 = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 ημ\frac{1}{x} = 0$$

$\boxed{2\eta}$ Αν $x>0$ τότε $-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$

$$\boxed{-x^3 \le x^3\eta\mu\frac{1}{x} \le x^3.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} -x^3 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} x^3\eta\mu\frac{1}{x} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} x^3\eta\mu\frac{1}{x} = 0$,

Β' τρόπος (Μ×Φ)

$$\lim_{x\to 0} x^3\eta\mu\frac{1}{x} \overset{\text{Μ×Φ}}{=} 0$$

$\to \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$

$$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1$$

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le 1$$

$$|x^3|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le 1\cdot|x^3|$$

$$\left|x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x^3|$$

$$\boxed{-|x^3| \le x^3\eta\mu\frac{1}{x} \le |x^3|}$$

$\lim\limits_{x\to 0} -|x^3| = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} |x^3| = 0$

Από Κ.Π

1. Παραγοντοποιηση τριωνυμου.

i) $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$

οπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma > 0$

και $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

ii). $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-x_1)^2$

οπου $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma=0$

και $x_1 = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$

iii) $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ <u>δεν</u> παραγοντοποιειται

οταν $\Delta<0$.

2. Εστω οτι θελω να παραγοντοποιησω

ενα πολυωνυμο 3ου βαθμου.

$2x^3-x^2-5x-2 = (x+1)(2x^2-3x-2)=$

$=(x+1)(2x+1)(x-2)$.

2	−1	−5	−2	−1
↓	−2	3	2	
2	−3	−2	0	

Διαιρετες −2

±1 ±2

3. Χρησιμα ταυτοτητα.

$$a^3+\beta^3=(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)$$

$$a^3-\beta^3=(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)$$

$$(a+\beta)^3=a^3+3a^2\beta+3a\beta^2+\beta^3$$

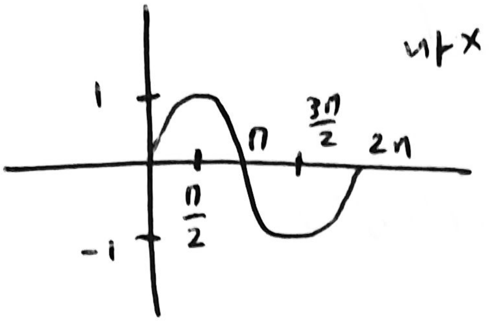
$$(a-\beta)^3=a^3-3a^2\beta+3a\beta^2-\beta^3$$

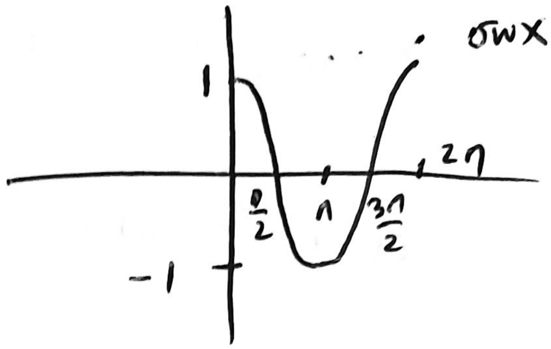
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}=1$ ενω $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{ημx}{x}=0$ Νχφ

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{συνx-1}{x}=0$

5. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{ημ f(x)}{f(x)}=1 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{συν f(x)-1}{f(x)}=0\end{array}\right\}$ μονο οταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

6.





$$\boxed{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1}$$

Συνεχεια Συναρτησης

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \boxed{\ell}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

$$f(x_0) = \boxed{\ell}$$

Τοτε $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

και f συνεχης στο x_0.

Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

όταν είναι συνεχής στο (α,β)

συνηθως ως Π.Σ.Σ

και $f(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$

$$f(\beta)=\lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Ασκηση 6

Δινεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχης για την οποια ισχυει

οτι $(x-2)f(x) = \sqrt{x^2+5} - 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογιστει το $f(2)$ και να βρεθει ο τυπος της $f(x)$

Για $x \neq 2$ η $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$
Τυπος $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Αφου η $f(x)$ συνεχης $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{2}{3}$

Τυπος

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}, & x \neq 2 \\ \dfrac{2}{3}, & x = 2 \end{cases}$$

Ασκηση 7

9

Δινεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχης ωστε

$$x f(x) \leq \eta\mu x + x^2 - 4x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογιστει το $f(0)$

Αν $x < 0$ τοτε $f(x) \geq \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$

Αρα $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \geq \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \geq -3.$$

Αν $x > 0$ τοτε $f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$

Αρα $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + x - 4$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \leq -3$$

Αφου η f συνεχης το $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ αρα

Το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ υπαρχει συνεπως $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Αρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$

$$\Rightarrow f(0) = -3.$$

Άσκηση 8

Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + 2x \leq 2x f(x) + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Νδο η $f(x)$ είναι συνεχής στο 1.

$f^2(x) - 2x f(x) \leq -2x + 1 \iff f^2(x) - 2x f(x) + x^2 \leq x^2 - 2x + 1$

$[f(x) - x]^2 \leq (x-1)^2 \iff |f(x) - x| \leq |x-1|$

$-|x-1| \leq f(x) - x \leq |x-1| \iff \boxed{x - |x-1| \leq f(x) \leq x + |x-1|}$

Για $x = 1$ έχω ότι $1 \leq f(1) \leq 1$ άρα $f(1) = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1} x - |x-1| = 1 \\ &\lim_{x \to 1} x + |x-1| = 1 \end{aligned}\right\} \text{Από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

Επειδή $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$ είναι

συνεχής στο 1.

Ασκηση 10 (γ)

Δινεται συνεχης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ωστε $\left| \frac{f(x) - 3x}{x-1} \right| \leq x^2 +$

$\forall x \neq 1$. Να υπολογισει το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

$\boxed{\text{Για } x<1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$

$$\left| \frac{f(x) - 3x}{x-1} \right| \leq x^2 + 1$$

$$-x^2 - 1 \leq \frac{f(x) - 3x}{x-1} \leq x^2 + 1$$

$\boxed{\text{Για } x>1}$

$$-(x^2+1)(x-1) \leq f(x) - 3x \leq (x^2+1)(x-1)$$

$$\boxed{-(x^2+1)(x-1) + 3x \leq f(x) \leq (x^2+1)(x-1) + 3x}$$

$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x \to 1^+} -(x^2+1)(x-1) + 3x = 3 \\ \\ \bullet \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2+1)(x-1) + 3x = 3 \end{array}\right\}$ Απο κριτηριο Παρεμβολης

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3.$

Επισης για $x=1$ εχω $3 \leq f(1) \leq 3 \Rightarrow f(1) = 3$

Συνεπως η $f(x)$ συνεχης στο 1.

Ασκηση 12

Δινεται $f:(0,+\infty)\longrightarrow R$

• $2x\sqrt{x} \le f(x) \le x^2+x$

Να υπολογιστουν τα ορια

(α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \lim_{x\to 1}(2x\sqrt{x})=2 \\ &\cdot \lim_{x\to 1}(x^2+x)=2 \end{aligned}\right\} \text{ Απο κριτηριο παρεμβολης } \lim_{x\to 1} f(x)=2.$$

(β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x-1}$

$$2x\sqrt{x} \le f(x) \le x^2+x \iff 2x\sqrt{x}-2 \le f(x)-2 \le x^2+x-2$$

<u>Για $x>1$</u>

$$\frac{2(x\sqrt{x}-1)}{x-1} \le \frac{f(x)-2}{x-1} \le \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$\cdot \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x^3-1)}{(x-1)(x\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x\sqrt{x}+1)} = \frac{6}{2}=3$$

$$\cdot \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+2 = 3$$

Απο κριτηριο παρεμβολης $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 3$

Για $x<1$ ομοιως με διαφορετικη φορα ανισοτητας

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3$$

Αρα $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 3$

Ασκηση 13

Δινεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ωστε $(x^2-4x+4)f(x) \le x-5$ $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$. Να υπολογισει $\lim_{x\to 2} f(x)$

$$\hookrightarrow (x-2)^2 f(x) \le x-5$$

$$f(x) \le \frac{x-5}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \le \lim_{x\to 2} \frac{x-5}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \le -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = -\infty.$$

Ασκηση 18 5α

Δινεται συνεχης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ωστε $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-2}{x^2-4} = 3$

Να υπολογιστουν

Αφου η f συνεχης το $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$

ⓐ το $f(2)$

Αρκει να βρω το $\lim_{x \to 2} f(x)$

Θεωρω Βοηθητικη συναρτηση $g(x) = \frac{f(x)-2}{x^2-4}$

Προφανως $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$

ομως $g(x)(x^2-4) = f(x)-2 \iff \boxed{f(x) = g(x)(x^2-4)+2}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x)(x^2-4)+2 = 2.$$

Αφου η $f(x)$ συνεχης

Αρα $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

ⓑ $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) + x^2 - 3x}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{g(x)(x^2-4)+2+x^2-3x}{\sqrt{x+2}-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{g(x)(x-2)(x+2)+(x-2)(x-1)}{\sqrt{x+2}^2 - 2^2} (\sqrt{x+2}+2)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)[g(x)(x+2)+x-1]}{x-2} (\sqrt{x+2}+2) = [3 \cdot 4 + 1]4 = 52$$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(2x)-2}{x-1} = \lim\limits_{k\to 2} \dfrac{f(k)-2}{\frac{k}{2}-1} =$

$2x = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}$

$x \to 1$

$k \to 2$

$= \lim\limits_{k\to 2} 2\,\dfrac{f(k)-2}{k-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} 2\,\dfrac{f(x)-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} 2\,\dfrac{g(x)(x^2-4)+2-2}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} 2\,\dfrac{g(x)\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 2\cdot(3\cdot 4) = 24$

Ασκηση 4

Να εξετασεις αν οι παρακατω συναρτησεις ειναι συνεχεις στο x_0.

ⓐ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$.

• $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)} = 2$

• $f(1) = 2$. Αφου $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ τοτε συνεχης στο 1.

ⓑ $g(x) = \begin{cases} 3x^2-4x, & x<2 \\ 7, & x=2 \\ 5x-6, & x>2 \end{cases}$ στο $x_0 = 2$

• $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x^2-4x) = 4$

• $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (5x-6) = 4$

$\Big\}\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

ομως $f(2) = 7$ συνεπως $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

Αρα η $f(x)$ οχι συνεχης στο 2.

(γ) $h(x) = \begin{cases} x^3-3x, & x \le -1 \\ x^2+x, & x > -1 \end{cases}$ στο $x_0 = -1$

• $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^3-3x) = 2$

• $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2+x) = 0$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$

το $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$ δεν υπάρχει συνεπώς

η $h(x)$ δεν είναι συνεχής στο -1.

(δ) $\varphi(x) = \begin{cases} x^3-5x^2+9x+6, & x \le 2 \\ \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+7}-3}, & x > 2 \end{cases}$ στο $\mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x\to 2^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^3-5x^2+9x+6) = 12$

• $\lim\limits_{x\to 2^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+7}-3} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+7}+3)}{\cancel{x-2}} = 12$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} \varphi(x) = \varphi(2)$ συνεπώς η $\varphi(x)$ συνεχής στο 2.

Η $\varphi(x)$ συνεχής στο $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως πράξεις

συνεχών συναρτήσεων. Άρα η $\varphi(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5

Να βρεθούν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^3+\beta x^2+2x+1 & , x<2 \\ \alpha & , x=2 \\ \dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x-2} & , x>2 \end{cases}$$

• $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^3+\beta x^2+2x+1) = 8+4\beta+4+1 = 13+4\beta$

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$.

Συνεπώς $13+4\beta = \alpha$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x-2} = \alpha$.

$f(x) = \dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x-2} \Leftrightarrow f(x)(x-2) = x^2+\beta x+\gamma$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)(x-2) = \lim\limits_{x\to 2} x^2+\beta x+\gamma$

$\Leftrightarrow 0 = 4+2\beta+\gamma \Leftrightarrow \boxed{\gamma = -4-2\beta}$

Άρα $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+Bx-4-2B}{x-2} = 13+4B$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)+B(x-2)}{x-2} = 13+4B$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\cancel{(x-2)}[x+2+B]}{\cancel{x-2}} = 13+4B$

$4+B = 13+4B$

$-9 = 3B$

$\boxed{B=-3}$

$\boxed{\gamma=2}$

$\boxed{a=1}$

Επαναληψη

1ου

Διαγωνισματος

(II)

Bolzano

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ f \text{ συνεχη } [\alpha,\beta] \\ 2.\ f(\alpha)\cdot f(\beta)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in (\alpha,\beta) \text{ τ.ω } f(\xi)=0$$

ΘΕΤ

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{συνεχη } [\alpha,\beta] \\ 2.\ f(\alpha) \neq f(\beta) \end{array}\right\} \text{ Τοτε } \forall \eta \in (f(\alpha), f(\beta)) \ \exists \xi \in (\alpha,\beta) \text{ τ.ω } f(\xi)=\eta .$$

ΘΜΕΤ

1. συνεχη $[\alpha,\beta]$

Τοτε $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$.

Προσοχη

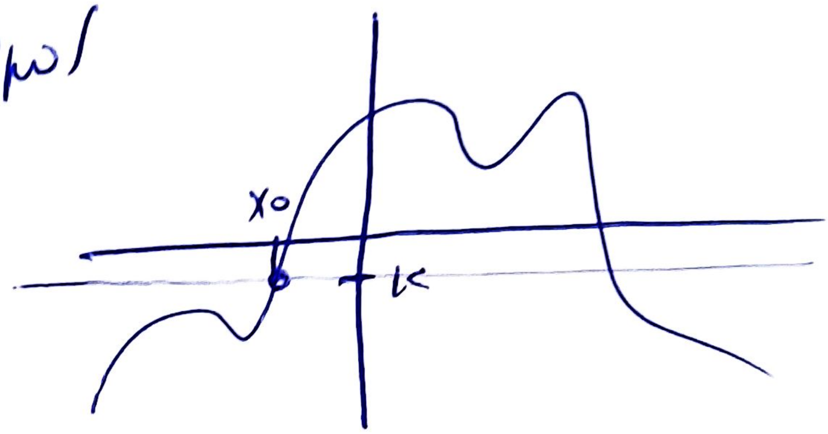
$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{Αν } f \text{ συνεχη} \\ \quad f(x)\neq 0 \\ \quad \text{στο } \Delta \end{array}\right\} f(x)>0 \text{ ή } f(x)<0 \quad \forall x \in \Delta$$

2. Η $f(x)$ διατηρει σταθερο προσημο αναμεσα σε διαδοχικες ριζες.

Ισχυρο εργαλειο

Οταν αναλ αριθμος

$\kappa \in \Sigma T_f$



Τοτε $\exists x_0 \in D_f$

τ.ω $f(x_0) = \kappa$.

Ασκηση 1

Δινεται $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ημx + x^2 + 3x}{x}, & -π \le x < 0 \\ e^x - x + 3, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Να εξετασεις αν η $f(x)$ ικανοποιει τις προυποθεσεις του Bolzano στο $[-π, 1]$

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[-π, 0)$ και $(0, 1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

• $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{ημx + x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{ημx}{x} + x + 3 \right) = 4$

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^x - x + 3) = 4.$

Αρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 4$ και $f(0) = 4$ αρα συνεχης

στο 0 αφου $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$

Αρα Συνεχης στο $[-π, 1]$

Επισης $f(-π) = \dfrac{π^2 - 3π}{-π} = 3 - π < 0$ και $f(1) = e + 2 > 0$

αρα $f(-π) f(1) < 0$ συνεπως ικανοποιειται ο Bolzano.

Ασκηση 2

ΝΔΟ η εξισωση $3x+\ln x^4 = x^2+4$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(1,e)$

$3x+\ln x^4 - x^2 - 4 = 0$

Θεωρω $f(x) = 3x+\ln x^4 - x^2 - 4$ η οποια ειναι συνεχη/ στο $[1,e]$ ω/ πραξει/ συνεχων συναρτησεων

$f(1) = -2$

$f(e) = 3e + 4 - e^2 - 4 = 3e - e^2 = e(3-e) > 0$

Αρα $f(1)f(e) < 0$

Συνεπω/ απο Bolzano $\exists \xi \in (1,e)$ τ.ω $f(\xi)=0$

$\Leftrightarrow 3\xi + \ln \xi^4 - \xi^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3\xi + \ln \xi^4 = \xi^2 + 4, \quad \xi \in (1,e).$

Ασκηση 3

Νδο η εξισωση $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{e^x+1}{x-2} = 0$ εχει

μια τουλαχιστον ριζα στο $(1,2)$

Πολ/ζω με το ΕΚΠ των παρονομαστων. και εχω

$(x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1) = 0$

Θεωρω $f(x) = (x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1)$ η οποια

ειναι συνεχης στο $[1,2]$ ως πραξ/ συνεχων

συναρτησεων.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f(2) = e^2+1 \end{array}\right\} \; f(1)f(2)<0 \quad \text{Bolzano} \quad \exists \xi \in (1,2) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0$$

$\Leftrightarrow (\xi^2+1)(\xi-2) + (\xi-1)(e^\xi+1) = 0$

$$\frac{\xi^2+1}{\xi-1} + \frac{e^\xi+1}{\xi-2} = 0 \quad , \xi \in (1,2)$$

Ασκηση 4

Δινεται συνεχης $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ οπου η C_f διερχεται απο το $A(\alpha, -1)$. Ν.δ.ο $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $x_0 (f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - \alpha$

Θεωρω την εξισωση $x(f(x) - 1) = \beta f(x) - \alpha$.

$x(f(x) - 1) - \beta f(x) + \alpha = 0$.

Εστω $g(x) = x(f(x) - 1) - \beta f(x) + \alpha$ η οποια ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$g(\alpha) = \alpha(f(\alpha) - 1) - \beta f(\alpha) + \alpha = \alpha f(\alpha) - \alpha - \beta f(\alpha) + \alpha$

$\Rightarrow g(\alpha) = f(\alpha)(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha > 0$

$g(\beta) = \beta(f(\beta) - 1) - \beta f(\beta) + \alpha = \beta f(\beta) - \beta - \beta f(\beta) + \alpha$

$\Rightarrow g(\beta) = \alpha - \beta < 0$

Αρα $g(\alpha) g(\beta) < 0$ Bolzano $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $g(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) - \beta f(x_0) + \alpha = 0$

$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - \alpha$

Ασκηση 5

Δινονται $f(x) = 3x - e^x$ και $g(x) = x^2 - 4$

ⓐ ΝΔο η C_f εχει ενα τουλαχιστον κοινο σημειο με τον $x'x$, του οποιου η τετμημενη ανηκει στο $(0,1)$.

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[0,1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 3 - e > 0 \end{array}\right\} \text{Bolzano} \ \exists\, \xi \in (0,1) \ \text{τ.ω} \ f(\xi) = 0.$$

ⓑ ΝΔο οι C_f και C_g εχουν τουλαχιστον ενα κοινο σημειου του οποιου η τετμημενη ανηκει στο $(-1,0)$.

Τα κοινα σημεια των C_f, C_g προκυπτουν απο την εξισωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - e^x = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 3x - e^x - x^2 + 4 = 0$

Θεωρω $\varphi(x) = 3x - e^{x} - x^2 + 4$ η οποια ειναι συνεχης στο $[-1,0]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$\varphi(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0$

$\varphi(0) = -1 + 4 = 3 > 0$

Αρα Bolzano $\exists \xi \in (-1,0)$ τ.ω $\varphi(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow 3\xi - e^{\xi} - \xi^2 + 4 = 0$

$3\xi - e^{\xi} = \xi^2 - 4$

$f(\xi) = g(\xi)$

Ασκηση 6

Δινεται συνεχης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ωστε $f(-1) = 2k$

και $f(2) = -\lambda$. Νδο $\exists \xi \in [-1,2]$ τ.ω $k - f(\xi) = \lambda\xi$

Θεωρω την εξισωση $k - f(x) = \lambda x$

$\Leftrightarrow k - f(x) - \lambda x = 0$

Εστω $\varphi(x) = k - f(x) - \lambda x$ η οποια ειναι

συνεχης στο $[-1,2]$ ως πραξεις συνεχων

συναρτησεων.

$\varphi(-1) = k - f(-1) + \lambda = k - 2k + \lambda = \lambda - k$

$\varphi(2) = k - f(2) - 2\lambda = k + \lambda - 2\lambda = k - \lambda$

Αρα $\varphi(-1)\varphi(2) = -(k-\lambda)^2 \leq 0$ αρα απο Bolzano $\exists \xi \in [-1,2]$

τ.ω $\varphi(\xi) = 0$ $\Leftrightarrow k - f(\xi) - \lambda\xi = 0$

$k - f(\xi) = \lambda\xi$.

Ασκηση 7

Νδο η εξισωση $e^x = 3-2x$ εχει μοναδικη ριζα η οποια ανηκει στο $(0,1)$

$e^x - 3 + 2x = 0$

Θεωρω $f(x) = e^x - 3 + 2x$ η οποια ειναι συνεχ στο $[0,1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησ

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ f(1) &= e-1>0 \end{aligned}\right\} f(0)f(1)<0$$

Bolzano $\exists\ \xi \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi)=0$

$f'(x) = e^x + 2 > 0$ αρα $f \nearrow$ συνεπως το ξ ειναι μοναδικη ριζα της $f(x)$.

Ασκηση 8

Νδο η εξισωση $x^4 - 2x^3 - x^2 + 4 = 0$

εχει μια τουλαχιστον λυση στο $(1,2)$.

Εδω αν θεσω $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4$ τοτε

θα δω οτι $f(2) = 0$ συνεπως ο Bolzano

δεν δουλευει στο $(1,2)$. Το 2 ομως

ειναι ριζα συνεπως θα κανω Horner.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ \downarrow & 2 & 0 & -2 & -4 & \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Αρα η εξισωση γινεται $(x-2)(x^3 - x - 2) = 0$.

$\Leftrightarrow \boxed{x=2}$ ή $x^3 - x - 2 = 0$.

Θεωρω $g(x) = x^3 - x - 2$ η οποια ειναι συνεχης

στο $[1,2]$ ως πολυωνυμικη.

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = -2 \\ g(2) = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g(1)g(2) < 0 \text{ αρα απο Bolzano} \\ \exists \xi \in (1,2) \text{ τ.ω } g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^3 - \xi - 2 = 0. \end{array}$$

Ασκηση 9

Εστω συνεχης $f: [0,1] \to R$ με $-1 < f(x) < 0$ $\forall x \in [0,1]$. Νδο $\exists\ x_0 \in (0,1)$ τ.ω

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$

$$f^2(x) = 2f(x) + 3x \iff f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0$$

Θεωρω συναρτηση $g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x$ η οποια ειναι συνεχης στο $[0,1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$$g(0) = f^2(0) - 2f(0) = \overset{\ominus}{f(0)}\,(\overset{\ominus}{f(0) - 2}) > 0$$

- $-1 < f(0) < 0 \iff -3 < f(0) - 2 < -2$

$$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = (\overset{\ominus}{f(1) - 3})(\overset{\oplus}{f(1) + 1}) < 0$$

- $-1 < f(1) < 0 \iff -4 < f(1) - 3 < -3$
- $-1 < f(1) < 0 \iff 0 < f(1) + 1 < 1$

Αρα $g(0)g(1) < 0$ απο Bolzano $\exists\, x_0 \in (0,1)$ τ.ω $g(x_0) = 0 \Rightarrow f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$.

Ασκηση 10

Νδο η εξισωση $x^4+\beta x^2+\gamma x-2022=0$ εχει μια τουλαχιστον θετικη ριζα.

Θεωρω $f(x)=x^4+\beta x^2+\gamma x-2022$ η οποια ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμικη.

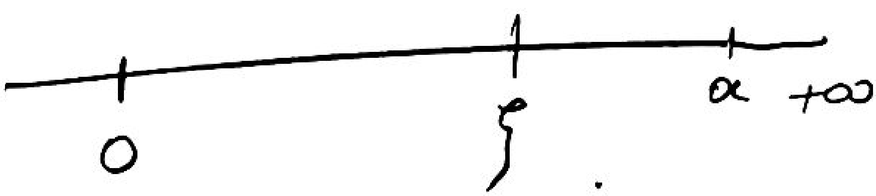
$f(0)=-2022$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ αρα $\exists\,\alpha$ κοντα στο $+\infty$

τ.ω $f(\alpha)>0$

$f(0)f(\alpha)<0$ αρα απο Bolzano $\exists\,\xi\in(0,\alpha)$ τ.ω $f(\xi)=0$

Αρα $\exists\,\xi>0$ τ.ω $\xi^4+\beta\xi^2+\gamma\xi-2022=0$.



Ασκηση 11

Νδο η εξισωση $(3-x)\ln x = x^3-5x^2+5x$ εχει δυο τουλαχιστον ριζες στο $(1,4)$

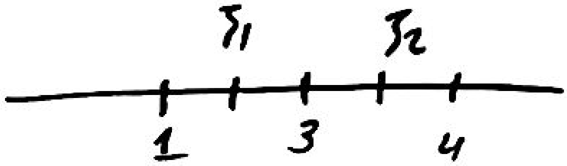
$(3-x)\ln x - x^3 + 5x^2 - 5x = 0$

Θεωρω $f(x) = (3-x)\ln x - x^3 + 5x^2 - 5x$ η οποια ειναι συνεχης στο $[1,4]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$f(1) = -1 < 0$

$f(3) = 3 > 0$

$f(4) = -\ln 4 - 4 < 0$



Αφου $f(1)f(3) < 0$ απο Bolzano $\exists \xi_1 \in (1,3)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφου $f(3)f(4) < 0$ απο Bolzano $\exists \xi_2 \in (3,4)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$.

Αρα η συναρτηση $f(x)$ εχει δυο τουλαχιστον ριζες στο $(1,4)$. Συνεπως η εξισωση $(3-x)\ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ εχει δυο τουλαχιστον ριζες στο $(1,4)$

Ασκηση 12

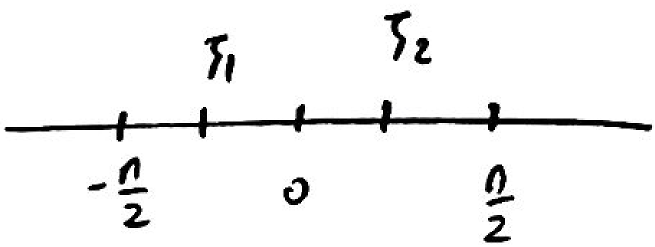
Νδο η εξισωση $x^2=\sigma\upsilon\nu x$ εχει ακριβως δυο ριζες στο $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Θεωρω $f(x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x$ η οποια ειναι συνεχης στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}>0$

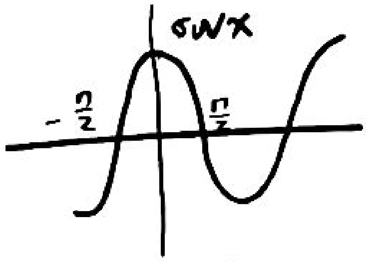
$f(0)=-1<0$

$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}>0$



Αφου $f(-\frac{\pi}{2})f(0)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_1 \in(-\frac{\pi}{2},0)$ τ.ω $f(\xi_1)=0$

Αφου $f(0)f(\frac{\pi}{2})<0$ απο Bolzano $\exists \xi_2 \in(0,\frac{\pi}{2})$ τ.ω $f(\xi_2)=0$



$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$

$\cdot\ x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2$

$\cdot\ x_1<x_2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_1<\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1>-\sigma\upsilon\nu x_2$

$f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow f\downarrow$ αρα ξ_1 μοναδικη στο $(-\frac{\pi}{2},0)$.

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\cdot\ x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2$

$\cdot\ x_1<x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1<-\sigma\upsilon\nu x_2$

$f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f\uparrow$ αρα ξ_2 μοναδικη στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

Ασκηση 13

Νδο η εξισωση $\ln x = x^2-4x+2$ εχει μια τουλαχιστον λυση στο $(0,1)$.

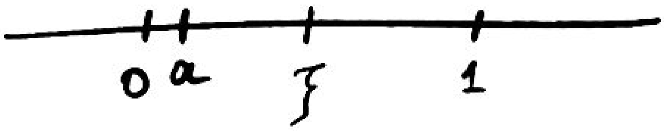
Θεωρω $f(x) = \ln x - x^2+4x-2$

Ειναι προφανες οτι το $f(0)$ δεν οριζεται.

ομως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ αρα $\exists\, \alpha$ κοντα στο 0^+ τ.ω $f(\alpha)<0$. Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[\alpha,1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$f(\alpha)<0$

$f(1)=1>0$



Αφου $f(\alpha)f(1)<0$ απο Bolzano $\exists\,\xi\in(\alpha,1)$ τ.ω $f(\xi)=0$

Δηλαδη $\exists\,\xi\in(0,1)$ τ.ω $\ln\xi = \xi^2-4\xi+2$.

Ασκηση 14

Νδο η εξισωση $4x^3-6x^2+1=0$ εχει ακριβως τρεις ριζες στο $(-1,2)$

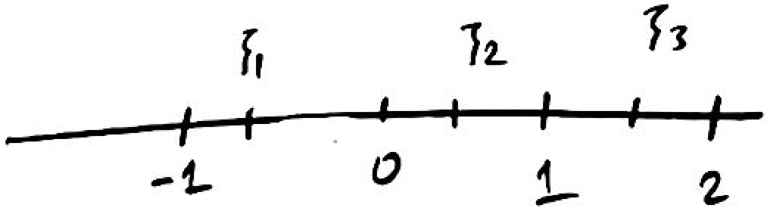
Θεωρω $f(x)=4x^3-6x^2+1$ η οποια ειναι συνεχης στο $[-1,2]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$f(-1)=-9<0$

$f(0)=1>0$

$f(1)=-1<0$

$f(2)=9>0$



Αφου $f(-1)f(0)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_1 \in (-1,0)$ τ.ω $f(\xi_1)=0$

Αφου $f(0)f(1)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_2 \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi_2)=0$

Αφου $f(1)f(2)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_3 \in (1,2)$ τ.ω $f(\xi_3)=0$

Η $f(x)$ ειναι πολυωνυμο 3ου βαθμου αρα εχει το πολυ τρεις ριζες.

Συνεπως εχει ακριβως τρεις.

Ασκηση 14

Νδο η εξισωση $4x^3-6x^2+1=0$ εχει ακριβως τρεις ριζες στο $(-1,2)$

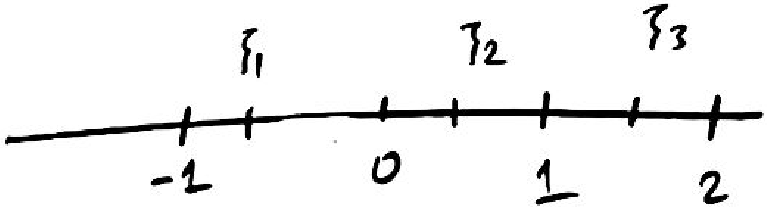
Θεωρω $f(x)=4x^3-6x^2+1$ η οποια ειναι συνεχης στο $[-1,2]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$f(-1)=-9<0$

$f(0)=1>0$

$f(1)=-1<0$

$f(2)=9>0$



Αφου $f(-1)f(0)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_1 \in (-1,0)$ τ.ω $f(\xi_1)=0$

Αφου $f(0)f(1)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_2 \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi_2)=0$

Αφου $f(1)f(2)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_3 \in (1,2)$ τ.ω $f(\xi_3)=0$

Η $f(x)$ ειναι πολυωνυμο 3ου βαθμου αρα εχει το πολυ τρεις ριζες.

Συνεπως εχει ακριβως τρεις.

Ασκηση 15

Δινεται $f : [1,5] \to R$ συνεχης. ΝΔΟ $\exists\, x_0 \in [1,5]$

τ.ω $f(x_0) = \dfrac{3f(2) + 5f(3) + 7f(4)}{15}$.

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[1,5]$ αρα απο

ΘΜΕΤ $\exists\, m, M$ τ.ω $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [1,5]$.

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet\ m \leq f(2) \leq M \iff 3m \leq 3f(2) \leq 3M \\
&\bullet\ m \leq f(3) \leq M \iff 5m \leq 5f(3) \leq 5M \\
&\bullet\ m \leq f(4) \leq M \iff 7m \leq 7f(4) \leq 7M
\end{aligned}\right\} \oplus$$

$$15m \leq 3f(2) + 5f(3) + 7f(3) \leq 15M$$

$$m \leq \frac{3f(2) + 5f(3) + 7f(4)}{15} \leq M.$$

Αφου $m \leq f(x) \leq M$ το $ΣΤf = [m, M]$

ο αριθμος $\dfrac{3f(2) + 5f(3) + 7f(4)}{15} \in ΣΤf$

αρα $\exists\, x_0$ τ.ω $f(x_0) = \dfrac{3f(2) + 5f(3) + 7f(4)}{15}$.

Ασκηση 20

Να βρεθει το προσημο της συναρτησης

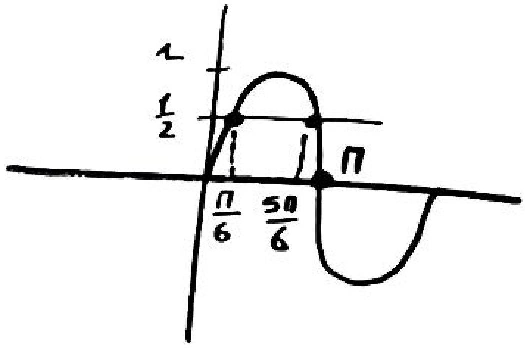
$f(x) = 2ημx - 1 \quad , \ x \in [0, π]$

Αρχικα βρισκω τις ριζες της $f(x)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow 2ημx = 1$

$ημx = \frac{1}{2} \quad , \ x \in [0, π]$

$\boxed{x = \frac{π}{6}}$ ή $\boxed{x = \frac{5π}{6}}$



x	0		$\frac{π}{6}$		$\frac{5π}{6}$		$π$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Για να βρω τα προσημα ανα διαστημα μπορω να παρω αντιπροσωπους του εκαστοτε διαστηματος

$f(0) = 2ημ0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{π}{2}\right) = 2ημ\frac{π}{2} - 1 = 1$

$f(π) = 2ημπ - 1 = -1$

Άσκηση 21

Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ⓐ Ν.δ.ο. η εξίσωση $x f(x) + 2 = x(x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,1)$

$x f(x) + 2 = x(x+1) \Leftrightarrow x f(x) + 2 - x(x+1) = 0$

Θεωρώ $\boxed{g(x) = x f(x) + 2 - x(x+1)}$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[-2,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,

$g(-2) = -2 f(-2) + 2 - (-2)(-1) = -2 f(-2)$

$g(1) = f(1) + 2 - 2 = f(1)$

Άρα $g(-2) g(1) = -2 \underbrace{f(-2) f(1)}_{+} < 0$ Από Bolzano $\exists \xi \in (-2,1)$ τ.ω $g(\xi) = 0$.

Αφού η $f(x)$ συνεχής και $f(x) \neq 0$ τότε $f(x) > 0$

ή $f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Άρα $f(-2)$ και $f(1)$ θα είναι ομόσημοι

άρα $f(-2) f(1) > 0$

Ⓑ Αν $\lim_{x\to 0} \dfrac{x f(x) + 7ημx}{5x - 2ημx} = 2$ να υπολογιστει

το οριο $\lim_{x\to -\infty} \left(f(π)\, x^3 + 5x^2 - 3\right)$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(f(π)x^3 + 5x^2 - 3\right) = \lim_{x\to -\infty} \left[f(π)\, x^3\right] = f(π)(-\infty)$$

Γνωριζω οτι $\lim_{x\to 0} \dfrac{x f(x) + 7ημx}{5x - 2ημx} = 2$

Θεωρω βοηθητικη συναρτηση $h(x) = \dfrac{x f(x) + 7ημx}{5x - 2ημx}$

αρα $\lim_{x\to 0} h(x) = 2$

Λυνω ως προς $f(x)$ και εχω

$$h(x)\left[5x - 2ημx\right] = x f(x) + 7ημx$$

$$h(x)\left[5x - 2ημx\right] - 7ημx = x f(x)$$

$$\boxed{f(x) = h(x)\,\frac{5x - 2ημx}{x} - \frac{7ημx}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[h(x)\cdot\left(\frac{5x - 2ημx}{x}\right) - \frac{7ημx}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[h(x)\cdot\left(\frac{5x}{x} - \frac{2ημx}{x}\right) - 7\,\frac{ημx}{x}\right].$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\cdot(5-2) - 7$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ και επειδη $f(x)$ συνεχης

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = -1$$

Αφου $f(0) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(π) < 0.$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2\cdot(5-2) - 7$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$$ και επειδή $f(x)$ συνεχής.

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) \Leftrightarrow f(0) = -1$$

Αφού $f(0) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(n) < 0.$

Άρα $$\lim_{x \to -\infty} \left(f(n)\, x^3 \right) = \underset{\ominus}{f(n)}\,(-\infty) = +\infty .$$

Ασκηση 23

Εστω $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τυπο $f(x)=\frac{1}{x}-x+1$

ⓐ Να βρεθει το συνολο τιμων.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x_1<x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \\ \cdot\ x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1+1>-x_2+1 \end{array}\right\} \oplus\ f(x_1)>f(x_2) \text{ αρα } f \downarrow.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \end{array}\right\} \Sigma T_f=\mathbb{R} \text{ αφου } f\downarrow$$

ⓑ Αν η f^{-1} συνεχης να υπολογισθουν τα ορια

i) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)} \underset{\substack{x=f(t)\\ x\to+\infty\\ t\to 0}}{\overset{\text{θετω } f^{-1}(x)=t}{=\!=\!=}} \lim_{t\to 0}\frac{t-f(t)}{f(t)+t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\left(\frac{1}{t}-t+1\right)}{\frac{1}{t}-t+1+t}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{1}{t}+t-1}{\frac{1}{t}+1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-1+t^2-t}{1+t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2-t-1}{t+1}=-1.$$

ii) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)} \underset{\substack{x=f(t)\\ x\to-\infty\\ t\to+\infty}}{\overset{\text{θετω } f^{-1}(x)=t}{=\!=\!=}} \lim_{t\to+\infty}\frac{t-\left(\frac{1}{t}-t+1\right)}{\frac{1}{t}-t+1+t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t-\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1}=+\infty$$

Ασκηση 24

Να βρεθει το συνολο τιμων της συναρτησης

$$f(x) = 5 - \sqrt{x-1} - \ln x$$

$D_f = [1, +\infty)$.

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x_1 - 1} > -\sqrt{x_2 - 1}$

$\Leftrightarrow 5 - \sqrt{x_1 - 1} > 5 - \sqrt{x_2 - 1}$ $\quad (+)$

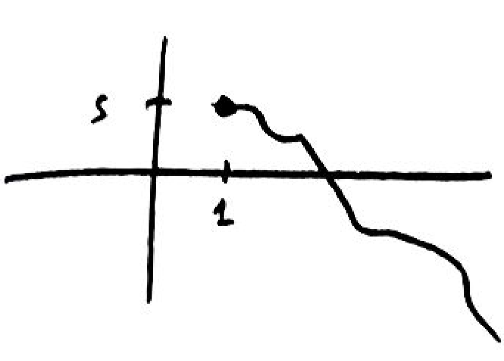
• $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$

$$\underbrace{5 - \sqrt{x_1 - 1} - \ln x_1}_{f(x_1)} > \underbrace{5 - \sqrt{x_2 - 1} - \ln x_2}_{f(x_2)}$$

Αρα η $f(x)$ γν. φθινουσα.

• $f(1) = 5$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



Σ $T_f = (-\infty, 5]$.

Ασκηση 25

Νδο η εξισωση $e^x + \ln x = 2020$

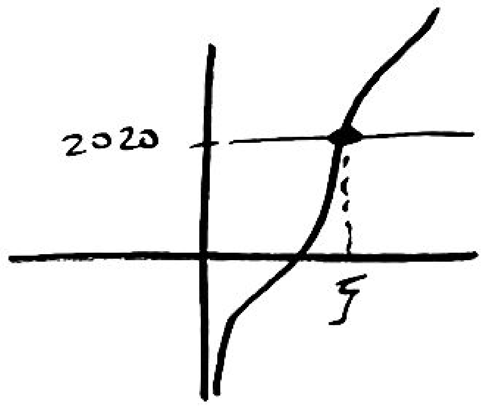
εχει μοναδικη θετικη ριζα.

Θεωρω συναρτηση $f(x) = e^x + \ln x$ με $D_f = (0, +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \end{array}\right\} \underbrace{e^{x_1} + \ln x_1}_{f(x_1)} < \underbrace{e^{x_2} + \ln x_2}_{f(x_2)}$$

αρα $f \nearrow$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \\ \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Sigma_T f = \mathbb{R}.$$



Συμπερασματα

1. f συνεχης στο $(0, +\infty)$
2. $f \nearrow$
3. $\Sigma T_f = \mathbb{R}$
4. Το $2020 \in \Sigma T_f$ αρα $\exists \xi \in (0, +\infty)$ τ.ω $f(\xi) = 2020$ οπου λογω μονοτονιας ειναι μοναδικο.

Άσκηση 27

Δινεται η συναρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-x+1}-x-2, & x\leq 1 \\ \ln x + x - 3, & x>1 \end{cases}$

α) Νδο η f συνεχης και να βρεθει το συνολο τιμων της

$\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$

$\cdot \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

$\Big\}\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2 = f(1)$ αρα η f συνεχης στο 1.

Επισης η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $(-\infty, 1)$ και στο $(1, +\infty)$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$x \leq 1$

$\cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1+1 > -x_2+1 \Leftrightarrow e^{-x_1+1} > e^{-x_2+1}$

$\cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1-2 > -x_2-2$

$\oplus\ f(x_1) > f(x_2)$

$f \downarrow$

$x > 1$

$\cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

$\cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3$

$\Big\}\ \oplus\ f(x_1) < f(x_2)$

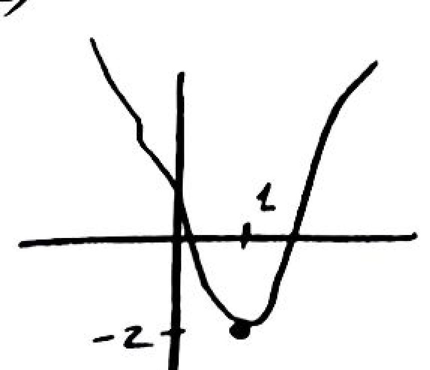
$f \uparrow$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

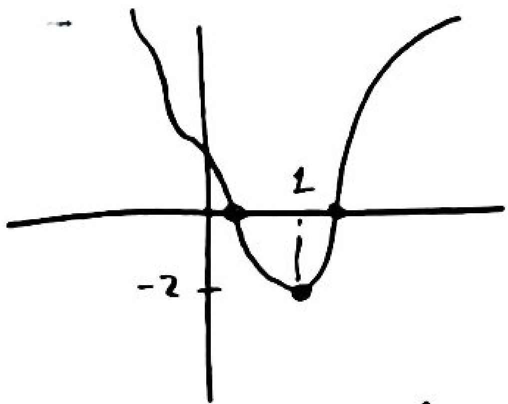
$f(1) = -2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$



$\Sigma T_f = [-2, +\infty)$

(β) Νδο η $f(x)$ εχει ακριβως δυο ριζες.



$x \in (-\infty, 1]$

- f συνεχης
- $f \downarrow$
- $\Sigma T_f = [-2, +\infty)$
- το $0 \in \Sigma T_f$ αρα $\exists \xi_1 \in (-\infty, 1)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$ και λογω μονοτονιας μοναδικο

$x \in (1, +\infty)$

- f συνεχης
- $f \uparrow$
- $\Sigma T_f = [-2, +\infty)$
- το $0 \in \Sigma T_f$ αρα $\exists \xi_2 \in (1, +\infty)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$ και λογω μονοτονιας μοναδικο.

(γ) Νδο η εξισωση

$$\frac{f(a)+2}{x-1} + \frac{f(\beta)+2}{x-2} = 0$$

εχει τουλαχιστον μια λυση στο $(1,2)$ $\forall a, \beta \in \mathbb{R} - \{1\}$

Θεωρω $g(x) = (f(a)+2)(x-2) + (f(\beta)+2)(x-1)$

η οποια ειναι συνεχης στο $(1,2)$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$g(1) = -f(a) - 2 < 0$

$g(2) = f(\beta) + 2 > 0$

Αφου $\Sigma T_f = [-2, +\infty)$ $\Rightarrow f(x) \geq -2$

αρα $f(a) \geq -2$ $\Rightarrow 0 \geq -2 - f(a)$

και $f(\beta) \geq -2$ $\Rightarrow f(\beta) + 2 \geq 0$

Αρα $g(1)g(2) < 0$ αρα απο Bolzano $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $g(\xi) = 0$.

Επανάληψη

1ου

Διαγωνίσματος

(ΙΙΙ)