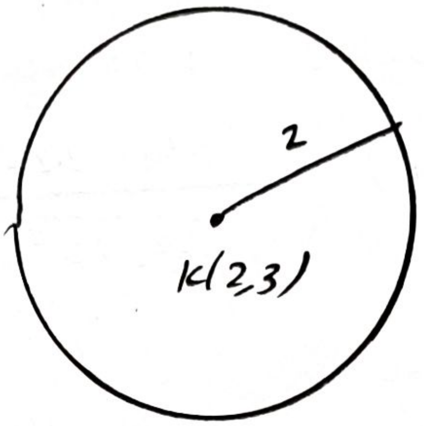
1. Να βρεθει η εξισωση του κυκλου

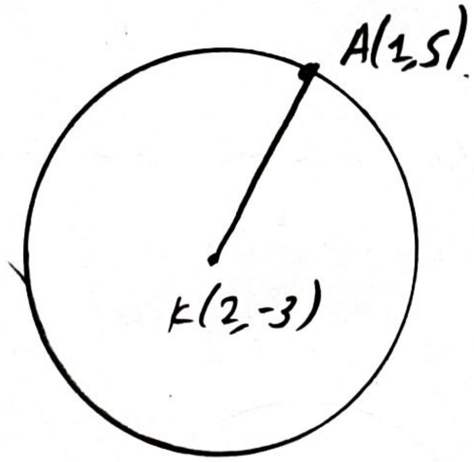
A Αν δινεται κεντρο $K(2,3)$ και ακτινα $\rho=2$.

$C: (x-2)^2+(y-3)^2=2^2$

$\boxed{C: (x-2)^2+(y-3)^2=4}$



B Αν δινεται κεντρο $K(2,-3)$ και ενα σημειο του κυκλου $A(1,5)$.



Αρχικα πρεπει να βρω την ακτινα.

$\vec{AK}=(2-1,-3-5)$

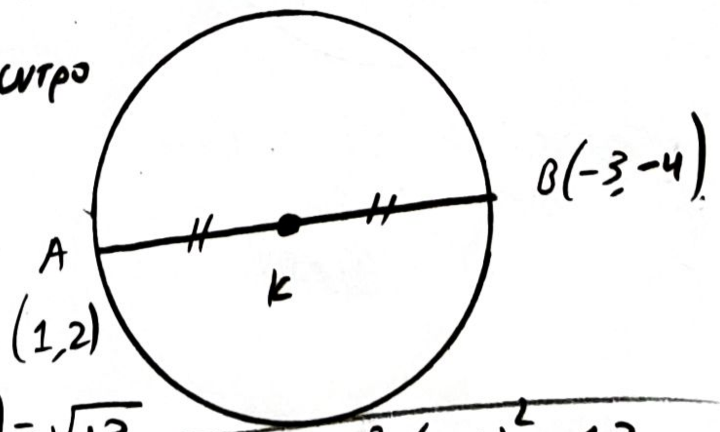
$\vec{AK}=(1,-8)$

αρα $\rho=|\vec{AK}|=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$.

$\boxed{C: (x-2)^2+(y+3)^2=65}$

Γ Αν δινονται δυο αντιδιαμετρικα σημεια. $A(1,2)$ $B(-3,-4)$

Το μεσον K του AB ειναι το κεντρο



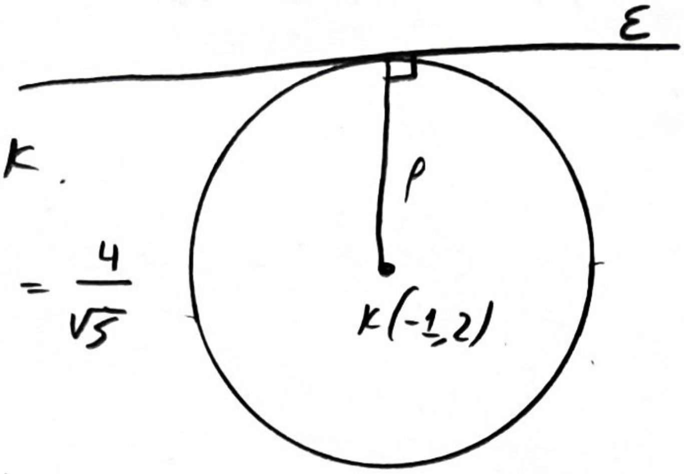
$K\left(\frac{1-3}{2},\frac{2-4}{2}\right)=(-1,-1)$

$\vec{KB}=(-3-(-1),-4-(-1))$

$\vec{KB}=(-2,-3)$ αρα $\rho=|\vec{KB}|=\sqrt{13}$

$C: (x+1)^2+(y+1)^2=13$

Δ Αν δινεται κεντρο $K(-1,2)$ και ευθεια $\varepsilon: y=-2x+4$ η οποια εφαπτεται στον κυκλο



Η ακτινα ρ ειναι η αποσταση της ευθειας ε απο το κεντρο K.

$$\rho = d(\varepsilon, K) = \frac{|2\cdot(-1)+1\cdot 2-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

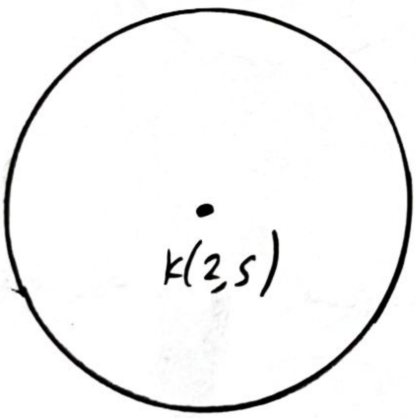
$\varepsilon: y=-2x+4 \Leftrightarrow 2x+y-4=0$

Αρα $\rho = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{C: (x+1)^2+(y-2)^2 = \frac{16}{5}}$$

Ε Αν δινεται κεντρο $K(2,5)$ και ο κυκλος εφαπτεται:

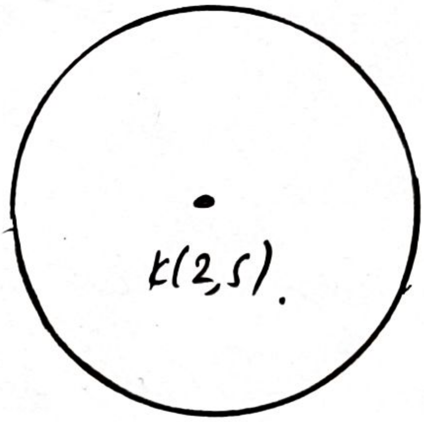
(i) στον $x'x$



Ακτινα: $\rho = |y| = |5| = 5$.

$$\boxed{C: (x-2)^2+(y-5)^2=25}$$

(ii) στον $y'y$.



Ακτινα: $\rho = |x| = |2| = 2$

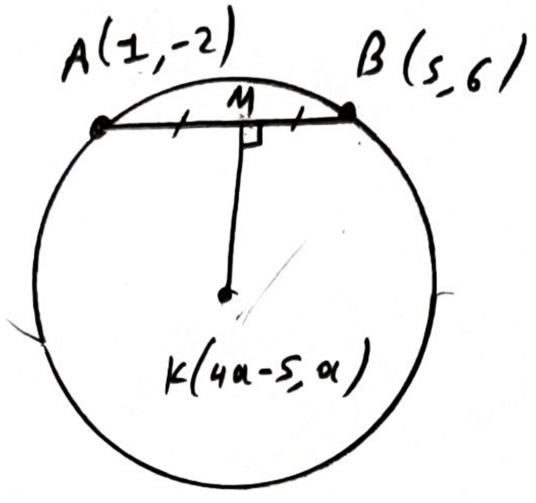
$$\boxed{C: (x-2)^2+(y-5)^2=4}$$

$\boxed{2}$ Αν δινονται δυο σημεια του κυκλου $A(1,-2)$ $B(5,6)$ και το κεντρο του με μια μεταβλητη. $K(4a-5, a)$.

Αρχικα φερνω τη χορδη AB

Το MK ειναι αποστημα αρα διχοτομει τη χορδη

Συνεπως το M μεσον του AB



$$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) \Leftrightarrow M(3,2)$$

Τωρα μπορω να βρω την ε_{MK}.

$$\varepsilon_{MK} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \lambda_{MK} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{MK} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{MK} = -\frac{1}{2}$$

$\vec{AB} = (5-1, 6-(-2)) = (4,8)$

$\lambda_{AB} = \frac{8}{4} = 2$

$\varepsilon_{MK}: y-2 = -\frac{1}{2}(x-3)$

$2y-4 = -x+3$

$$\boxed{\varepsilon_{MK}: x+2y-7=0}$$

Η ευθεια ε_{MK} διερχεται απο το K

αρα $(4a-5)+2\cdot(a)-7=0 \Leftrightarrow 4a-5+2a-7=0$

$6a=12$ $\boxed{a=2}$

Αρα $K(3,2)$.

Για να βρω την ακτινα ρ βρισκω $\vec{AK} = (3-1, 2-(-2))$

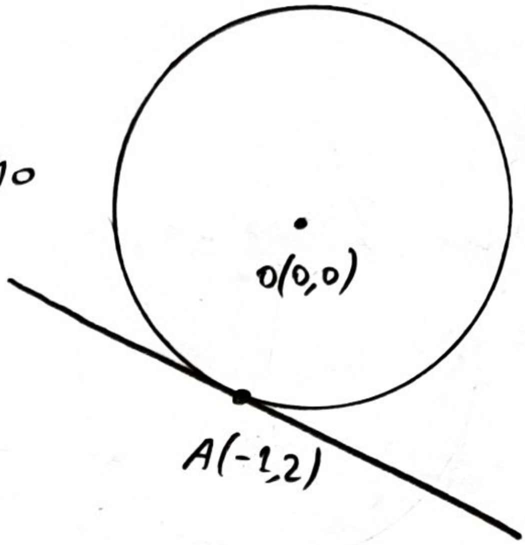
$\Leftrightarrow \vec{AK} = (2,4)$

$\rho = |\vec{AK}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.

$$\boxed{C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 20}.$$

2. Να βρεθει η εφαπτομενη του κυκλου

A Αν δινεται κυκλος $C: x^2+y^2=5$ στο σημειο του $A(-1,2)$.



Η εφαπτομενη δινεται απο τυπο

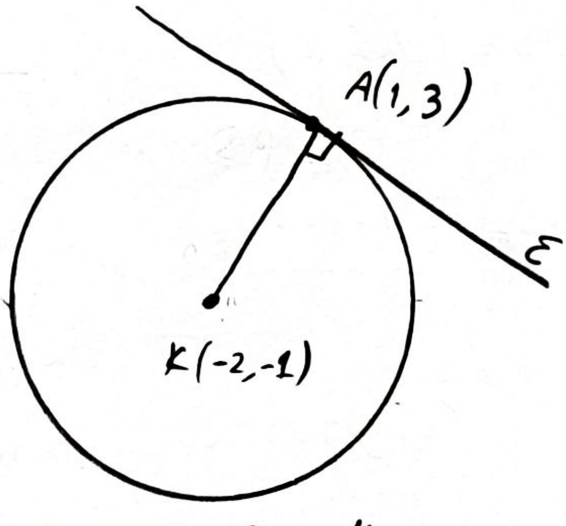
$$\varepsilon: x x_1 + y y_1 = \rho^2$$

Εδω $\varepsilon: x\cdot(-1)+y\cdot 2=\sqrt{5}^2$

$$-x+y=5$$

$$\boxed{\varepsilon: y=x+5}$$

B Αν δινεται κυκλος $C: x^2+y^2+4x+2y-20=0$ στο σημειο του $A(1,3)$



Αρχικα θα βρω το κεντρο.

$$K\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(-\frac{4}{2},-\frac{2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow K(-2,-1).$$

Η εφαπτομενη $\varepsilon \perp \vec{AK} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{AK}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\frac{4}{3}=-1.$

$\vec{AK}=(-2-1,-1-3)$

$\vec{AK}=(-3,-4)$

$\lambda_{AK}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

$$\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{4}$$

$$\varepsilon: y-3=-\frac{3}{4}(x-1) \Leftrightarrow 4y-12=-3(x-1)$$

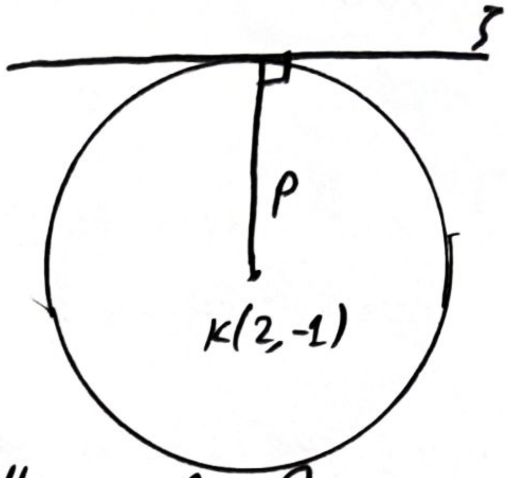
$$4y-12=-3x+3$$

$$\boxed{\varepsilon: 3x+4y-15=0}$$

$\boxed{\Gamma}$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 2021$.

και ο κύκλος είναι

$C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$.



$K(2,-1)$

$\rho = \sqrt{5}$

Η εφαπτομένη ζ που ψάχνω είναι $\zeta \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta$

$\Leftrightarrow 2 = \lambda_\zeta$

Άρα $\zeta: y = 2x + \beta \Leftrightarrow \boxed{-2x + y - \beta = 0}$

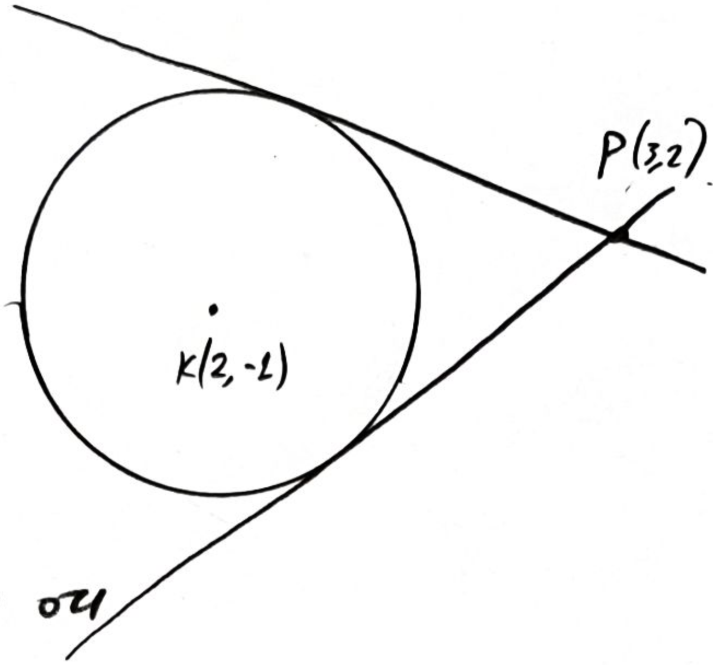
Πρέπει αφού η ζ εφαπτομένη, η απόσταση της από το κέντρο ισούται με την ακτίνα.

$$\rho = d(\zeta, K) \Leftrightarrow \frac{|-2\cdot 2 + 1\cdot(-1) - \beta|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \sqrt{5}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-3-\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |3+\beta| = 5 \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3+\beta = 5 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 2} \\ \text{ή} \\ 3+\beta = -5 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -8} \end{array}$$

$\boxed{\zeta: y = 2x + 2}$ ή $\boxed{\zeta: y = 2x - 8}$

Δ που διερχεται απο σημειο $P(3,2)$ και η εξισωση του κυκλου ειναι $C: (x-2)^2+(y+1)^2=1$.



Η εφαπτομενη ε που ψαχνω διερχεται απο το P αρα

$ε: y-2=λ(x-3)$

$y-2=λx-3λ$

$\Leftrightarrow \boxed{-λx+y+3λ-2=0}$

Αφου ειναι εφαπτομενη ισχυει οτι

$d(ε,K)=ρ$

$$\frac{|-λ\cdot 2+1\cdot(-1)+3λ-2|}{\sqrt{λ^2+1}}=1.$$

$\Leftrightarrow |-2λ-1+3λ-2|=\sqrt{λ^2+1}$

$\Leftrightarrow |λ-3|=\sqrt{λ^2+1}$

$λ^2-6λ+9=λ^2+1.$

$-6λ=-8 \Leftrightarrow λ=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$

$$\boxed{ε: -\frac{4}{3}x+y+2=0}$$

Επρεπε να βρω δυο εφαπτομενες αρα η δευτερη ειναι η κατακορυφη ευθεια που διερχεται $P(3,2)$.

$$\boxed{ε_1: x=3}.$$

3. Να βρεθουν τα κοινα σημεια δυο κυκλων

$$\begin{cases} C_1: (x+2)^2+(y+1)^2=25 \\ C_2: x^2+y^2-2x-10y+16=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x+4+y^2+2y+1=25 \\ x^2+y^2-2x-10y+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4x+2y-20=0 \\ x^2+y^2-2x-10y+16=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2-y^2-4x-2y+20=0 \\ x^2+y^2-2x-10y+16=0 \end{cases} \oplus \quad -6x-12y+36=0$$

$$x+2y-6=0$$

$$\boxed{x=6-2y}$$

$$(6-2y)^2+y^2-2(6-2y)-10y+16=0$$

$$36-24y+4y^2+y^2-12+4y-10y+16=0$$

$$5y^2-30y+40=0$$

$$y^2-6y+8=0$$

$y=2$ $\quad$ $y=4$

$x=2$ $\quad$ $x=-2$

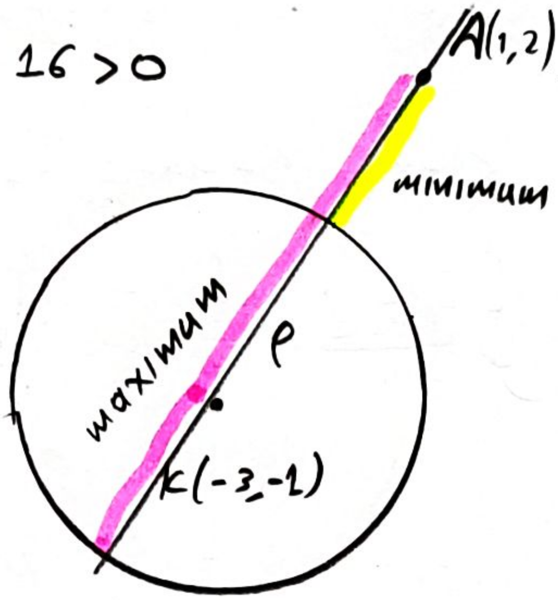
Οι δυο κυκλοι τεμνονται στα σημεια

$A(2,2)$ $\quad$ $B(-2,4)$

4. Μεγιστες - Ελαχιστες Αποστασεις.

A Να βρεθει η μεγιστη και η ελαχιστη αποσταση του κυκλου $C: x^2+y^2+6x+2y+6=0$ απο το σημειο $A(1,2)$

Αρχικα θα βρω το κεντρο και την ακτινα του κυκλου



$\alpha^2+\beta^2-4\gamma = 6^2+2^2-4\cdot 6 = 36+4-24 = 16 > 0$

$K\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{6}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (-3,-1)$

$\rho = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$$\boxed{C: (x+3)^2+(y+1)^2 = 4.}$$

$A \longrightarrow C : (1+3)^2+(2+1)^2 = 16+9 = 25 > 4$

Το A εξωτερικο του C.

Αρχικα θα βρω το μηκος AK.

$\vec{AK} = (-3-1, -1-2) = (-4,-3)$

$|\vec{AK}| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

$\text{minimum} = |\vec{AK}| - \rho = 5-2 = 3$

$\text{Maximum} = |\vec{AK}| + \rho = 5+2 = 7$

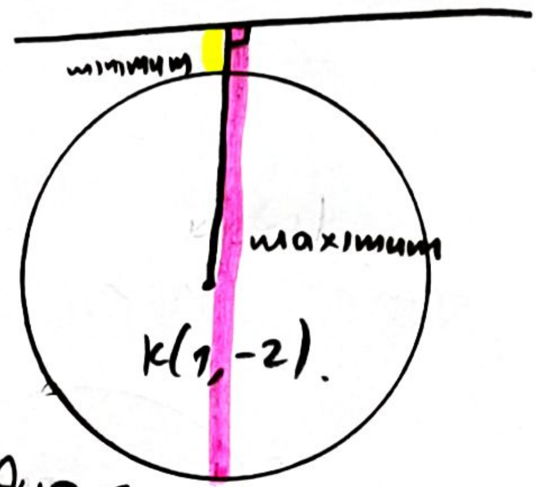
B Να βρεθει η μεγιστη και η ελαχιστη αποσταση της ευθειας $\varepsilon: 3x+4y-15=0$ απο τον κυκλο $C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Αρχικα θα βρω κεντρο και ακτινα του C.

$a^2+B^2-4\gamma = (-2)^2+4^2-4(-4) = 4+16+16 = 36>0$

$K\left(-\frac{a}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1,-2)$

$\rho = \frac{\sqrt{a^2+B^2-4\gamma}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$



Επειτα θα βρω την αποσταση του κεντρου $K(1,-2)$ απο την ευθεια ε.

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1\cdot 3-2\cdot 4-15|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3-8-15|}{5} = \frac{|-20|}{5} = 4>3=\rho.$$

αρα η ευθεια εξωτερικη του κυκλου.

minimum: $d(K,\varepsilon)-\rho = 4-3 = 1.$

Maximum: $d(K,\varepsilon)+\rho = 4+3 = 7.$

$\boxed{\Gamma}$ Να βρει την μεγιστη και την ελαχιστη αποσταση που εχουν δυο κυκλοι C_1 και C_2.

$C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 1$ $\quad K(2,0)$ $\quad \rho_1 = 1$.

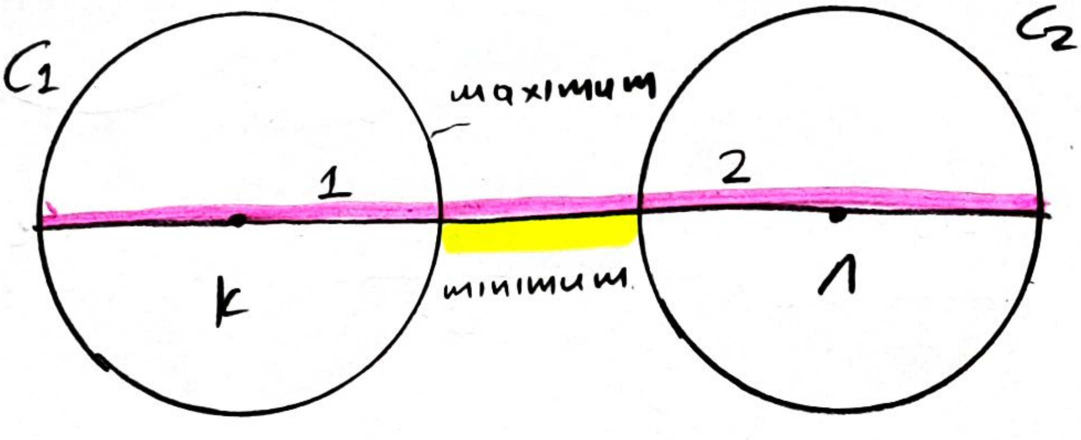
$C_2 : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ $\quad \Lambda(-2,3)$ $\quad \rho_2 = 2$.

Αρχικα θα βρω την αποσταση των δυο κεντρων.

$\vec{K\Lambda} = (-2-2, 3-0) = (-4,3)$.

$|\vec{K\Lambda}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

επειδη $|\vec{K\Lambda}| > \rho_1 + \rho_2$ γιατι $5 > 2+1 \Leftrightarrow 5 > 3$.



minimum: $|\vec{K\Lambda}| - \rho_1 - \rho_2 = 5 - 1 - 2 = 2$.

Maximum: $|\vec{K\Lambda}| + \rho_1 + \rho_2 = 5 + 1 + 2 = 8$.