

Θεματική Ενότητα

Το Θεώρημα
του Bolzano

Θεώρημα Bolzano

Εστω f φωνεση σε $[a, b]$

1. Αν f συνεχής σε $[a, b]$

2. Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$

τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$

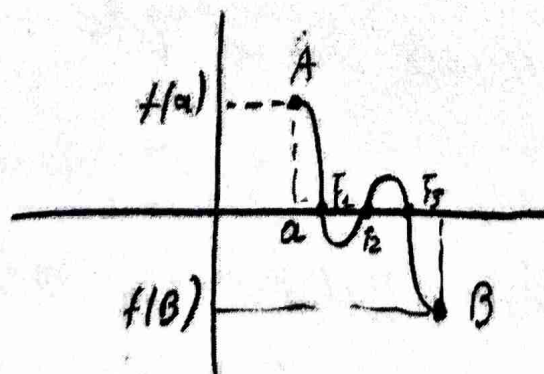
Γεωμετρική ερμηνεία Bolzano

Εάν τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$

βρισκονται εκατέρωθεν του x ' x τότε

η C_f τέμνει τον x ' x τουλάχιστον

μία φορά στο (a, b)



Προσοχή

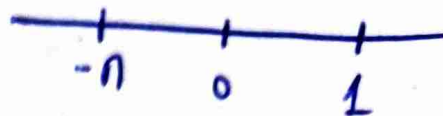
1. Το Θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$. Δεν μας λέει ποια είναι αυτή η ρίζα. Μπορεί να έχει περισσότερες από μια ρίζες στο (a,b) .

2. Το αντίστροφο του Bolzano δεν ισχύει. Αν υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω $f(\xi)=0$ αυτό δεν σημαίνει ότι $f(a) \cdot f(b) < 0$.

3. Αν η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Bolzano, αυτό δεν σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα.

4. Αν η f ορισμένη στο $[a,b]$, συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ τότε από Bolzano $\exists \xi \in [a,b]$ τ.ω $f(\xi)=0$. Δηλαδή εδώ το $\xi=a$ ή $\xi=b$ ή $\xi \in (a,b)$.

Άσκηση 1



$$\text{Δίνεται } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x + x^2 + 3x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ e^x - x + 3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Να ελέγξετε αν η $f(x)$ ικανοποιεί τις
προυποθέσεις του Βολζανο στο $[-\pi, 1]$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi, 0)$ και $(0, 1]$

ω/ πράξει συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi x + x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\pi x}{x} + x + 3 \right) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x + 3) = 4.$$

Αρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ και $f(0) = 4$ αρα συνεχής

στο 0 αφού $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Αρα Συνεχής στο $[-\pi, 1]$

Επίσης $f(-\pi) = \frac{\pi^2 - 3\pi}{-\pi} = 3 - \pi < 0$ και $f(1) = e + 2 > 0$
αρα $f(-\pi)f(1) < 0$ συνεπώς ικανοποιείται ο Βολζανο.

Άσκηση 2

Νόο η εξίσωση $3x + \ln x^4 = x^2 + 4$ έχει
για τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, e)$

$$3x + \ln x^4 - x^2 - 4 = 0$$

Θαρω $f(x) = 3x + \ln x^4 - x^2 - 4$ η οποία είναι
συνεχής στο $[1, e]$ ως προς / συνεχών
συναρτησιών

$$f(1) = -2$$

$$f(e) = 3e + 4 - e^2 - 4 = 3e - e^2 = e(3 - e) > 0$$

$$\text{Αρα } f(1)f(e) < 0$$

Συνεπώς από Bolzano $\exists \xi \in (1, e)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow 3\xi + \ln \xi^4 - \xi^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\xi + \ln \xi^4 = \xi^2 + 4, \quad \xi \in (1, e)$$

Άσκηση 3

Νόσο η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{e^x+1}{x-2} = 0$ έχει

μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$

Πολ/τω με το εκη των παρανομαστων, και έχω

$$(x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1) = 0$$

Θεωρώ $f(x) = (x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1)$ η οποία
είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξη/συνεχών
συναρτήσεων.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f(2) = e^2+1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(1)f(2) < 0 \text{ Βαλcano } \exists \xi \in (1,2) \\ \text{τ.ω } f(\xi) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (\xi^2+1)(\xi-2) + (\xi-1)(e^\xi+1) = 0$$

$$\frac{\xi^2+1}{\xi-1} + \frac{e^\xi+1}{\xi-2} = 0, \quad \xi \in (1,2)$$

Άσκηση 4

Δίνεται συνεχής $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου η f διαφέρει από το $A(a, -1)$. Νόσο $\exists x_0 \in (a, b)$
π.ω $x_0 (f(x_0) - 1) = B f(x_0) - a$

Θεωρώ την εξίσωση $x (f(x) - 1) = B f(x) - a$.

$$x (f(x) - 1) - B f(x) + a = 0.$$

Εστώ $g(x) = x (f(x) - 1) - B f(x) + a$ η οποία
είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως πράξη
συνεχών συναρτήσεων.

$$g(a) = a (f(a) - 1) - B f(a) + a = a f(a) - a - B f(a) + a$$

$$\Leftrightarrow g(a) = f(a) (a - B) = -(a - B) = B - a > 0$$

$$g(b) = b (f(b) - 1) - B f(b) + a = B f(b) - B - B f(b) + a$$

$$\Leftrightarrow g(b) = a - B < 0$$

Αρα $g(a)g(b) < 0$ Βόλτανο $\exists x_0 \in (a, b)$ π.ω $g(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) - B f(x_0) + a = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) = B f(x_0) - a$$

Άσκηση 5

Δίνονται $f(x) = 3x - e^x$ και $g(x) = x^2 - 4$

α) Νόο η f έχει ένα ταλλαχίστον κοινό σηκίω με τον x 'α, του οποίου η τετρημένη ανηκει στο $(0, 1)$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξη/συνέχων συνερευσών.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 3 - e > 0 \end{array} \right\} \text{Βολτανο } \exists \xi \in (0, 1) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0.$$

β) Νόο οι f και g έχουν ταλλαχίστον ένα κοινό σηκίω του οποίου η τετρημένη ανηκει στο $(-1, 0)$.

Τα κοινά σηκία των f, g προωπητούν από την ετίωση $f(x) = g(x)$, $\Leftrightarrow 3x - e^x = x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow 3x - e^x - x^2 + 4 = 0$$

Θαρω $\varphi(x) = 3x - e^x - x^2 + 4$ η οποία είναι
συνεχής στο $[-1, 0]$ ως ηρατική συνάρτηση
συνάρτησεων.

$$\varphi(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0$$

$$\varphi(0) = -1 + 4 = 3 > 0$$

Αρα Βολταίο $\exists \xi \in (-1, 0)$ τ.ω $\varphi(\xi) = 0$

$$(\Rightarrow) 3\xi - e^\xi - \xi^2 + 4 = 0$$

$$3\xi - e^\xi = \xi^2 - 4$$

$$f(\xi) = g(\xi)$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(-1) = 2k$

και $f(2) = -2$. Νόο $\exists \tau \in [-1, 2]$ τ.ω $k - f(\tau) = 2\tau$

Θαρω την επίλυση $k - f(x) = 2x$

$$\Leftrightarrow k - f(x) - 2x = 0$$

Εστω $\varphi(x) = k - f(x) - 2x$ η οποία είναι
συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πράξεις συνεχών
συναρτησιών.

$$\varphi(-1) = k - f(-1) + 2 = k - 2k + 2 = 2 - k$$

$$\varphi(2) = k - f(2) - 2 \cdot 2 = k + 2 - 2 \cdot 2 = k - 2$$

Αρα $\varphi(-1)\varphi(2) = -(k-2)^2 \leq 0$ αρα από Bolzano $\exists \tau \in [-1, 2]$.

$$\text{τ.ω } \varphi(\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow k - f(\tau) - 2\tau = 0$$

$$k - f(\tau) = 2\tau.$$

Άσκηση 7

Νόσο η εξίσωση $e^x = 3 - 2x$ έχει μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο $(0, 1)$

$$e^x - 3 + 2x = 0$$

Θα θεωρήσω $f(x) = e^x - 3 + 2x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ f(1) &= e - 1 > 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ f(1) &= e - 1 > 0 \end{aligned}} \right\} f(0) \cdot f(1) < 0$$

Βολταίο $\exists \xi \in (0, 1)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

Μονοτονία

$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ $\oplus$ $f(x_1) < f(x_2)$ άρα f αυξανει το ξ
 $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$
είναι μοναδική ρίζα της $f(x)$.

Άσκηση 8

Νόο η εξίσωση $x^4 - 2x^3 - x^2 + 4 = 0$
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Εδώ αν θεωρώ $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4$ τότε
θα δω ότι $f(2) = 0$ συνεπώς ο Βολτανο
δεν δουλεύει στο $(1, 2)$. Το 2 όμως
είναι ρίζα συνεπώς θα κάνω Horner.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & \textcircled{2} \\ & 2 & 0 & -2 & -4 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Αρα η εξίσωση γίνεται $(x-2)(x^3 - x - 2) = 0$.
και $\textcircled{x=2}$ ή $x^3 - x - 2 = 0$.

Θεωρώ $g(x) = x^3 - x - 2$ η οποία είναι συνεχής
στο $[1, 2]$ ως πολυώνυμο.

$g(1) = -2$ $g(2) = 4$ } $g(1)g(2) < 0$ ορα από Βολτανο
 $\exists \tau \in (1, 2)$ τ.ω $g(\tau) = 0 \Rightarrow \tau^3 - \tau - 2 = 0$.

Άσκηση 9

Εστω συνεχής $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $-1 < f(x) < 0$

$\forall x \in [0,1]$. Νόο $\exists x_0 \in (0,1)$ τ.ω

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$

$$f^2(x) = 2f(x) + 3x \quad (\Leftrightarrow) \quad f^2(x) - 2f(x) - 3x < 0$$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως η σύνθεση
συνεχών συναρτήσεων.

$$g(0) = f^2(0) - 2f(0) - 3 \cdot 0 = f(0) \overset{(-)}{(f(0) - 2)} > 0$$

$$\bullet \quad -1 < f(0) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad -3 < f(0) - 2 < -2$$

$$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = (f(1) - 3) \overset{(-)}{(f(1) + 1)} \overset{(+)}{< 0}$$

$$\bullet \quad -1 < f(1) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad -4 < f(1) - 3 < -3$$

$$\bullet \quad -1 < f(1) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 < f(1) + 1 < 1$$

Από $g(0)g(1) < 0$ από Bolzano $\exists x_0 \in (0,1)$

$$\text{τ.ω } g(x_0) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0.$$

Άσκηση 20

Νόσ. η εξίσωση $x^4 + bx^2 + \gamma x - 2022 = 0$

έχει μια ταλαχιστών θετική ρίζα.

Θαρω $f(x) = x^4 + bx^2 + \gamma x - 2022$ η οποία είναι
συνχρ/ στο $\mathbb{R}$ w/ πολυωνυμική.

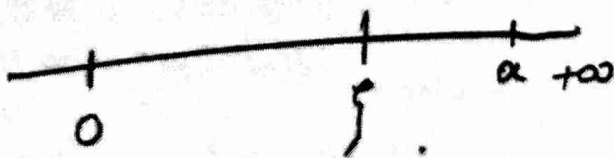
$$f(0) = -2022$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ από } \text{Γα} \text{ κοντά στο } +\infty$$

$$\text{τ.ω } f(a) > 0$$

$$f(0)f(a) < 0 \text{ από από Bolzano } \exists \xi \in (0, a) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0$$

$$\text{Από } \exists \xi > 0 \text{ τ.ω } \xi^4 + b\xi^2 + \gamma\xi - 2022 = 0.$$



Άσκηση 11

Νόο η εξίσωση $(3-x) \ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ έχει
δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(1, 4)$

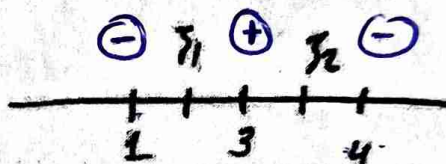
$$(3-x) \ln x - x^3 + 5x^2 - 5x = 0$$

Θαρω $f(x) = (3-x) \ln x - x^3 + 5x^2 - 5x$ η οποία
είναι συνεχής στο $[1, 4]$ ως πράξεις
συνεχών συναρτήσεων.

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(3) = 3 > 0$$

$$f(4) = -\ln 4 - 4 < 0$$



Αφού $f(1) f(3) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_1 \in (1, 3)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφού $f(3) f(4) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_2 \in (3, 4)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$.

Άρα η συνάρτηση $f(x)$ έχει δύο τουλάχιστον
ρίζες στο $(1, 4)$. Σκεπτόμενη η εξίσωση

$(3-x) \ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες
στο $(1, 4)$.

Άσκηση 12

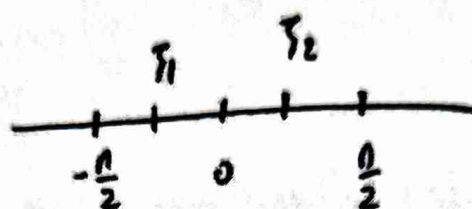
Νόσ η εξίσωση $x^2 = \sin x$ έχει απειρίτως δύο ρίζες στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Θεωρώ $f(x) = x^2 - \sin x$ η οποία είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ως γραμμική συνεχών συναρτήσεων.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$$



Από $f(-\frac{\pi}{2})f(0) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

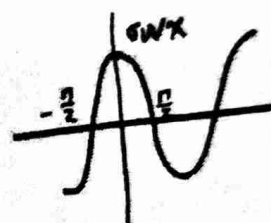
Από $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 < \sin x_2 \Rightarrow -\sin x_1 > -\sin x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow \text{ από } \xi_2 \text{ προς } \xi_1 \text{ στο } (-\frac{\pi}{2}, 0).$$



$$x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow -\sin x_1 < -\sin x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow \text{ από } \xi_2 \text{ προς } \xi_1 \text{ στο } (0, \frac{\pi}{2}).$$

Άσκηση 13

Νόο η εξίσωση $\ln x = x^2 - 4x + 2$ έχει μια ταλαχιστον λύση στο $(0,1)$.

$$\text{Θεωρώ } f(x) = \ln x - x^2 + 4x - 2$$

Είναι προφανές ότι το $f(0)$ δεν ορίζεται.

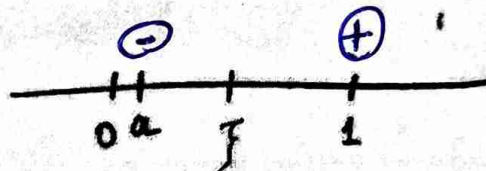
οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ άρα $\exists \alpha$ κοντά στο 0^+

τ.ω $f(\alpha) < 0$. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, 1]$

ως πρώτες συνεχών συναρτησεων

$$f(\alpha) < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$



Από $f(\alpha)f(1) < 0$ από Bolzano $\exists \zeta \in (\alpha, 1)$ τ.ω $f(\zeta) = 0$

Αντικαθιστώντας $\exists \zeta \in (0,1)$ τ.ω $\ln \zeta = \zeta^2 - 4\zeta + 2$.

Άσκηση 24

Νόσ η Εξίσωση $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ έχει ακριβώς
τρεις ρίζες στο $(-1, 2)$

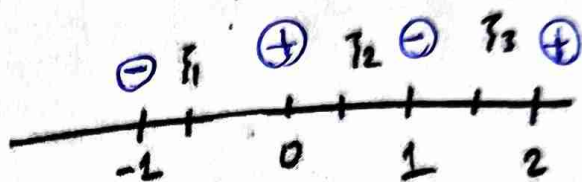
Θαφω $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ η οποία είναι συνεχής
στο $[-1, 2]$ ως γραφική συνεχών συναρτήσεων

$$f(-1) = -9 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = -2 < 0$$

$$f(2) = 9 > 0$$



Αφω $f(-1)f(0) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_1 \in (-1, 0)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφω $f(0)f(1) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_2 \in (0, 1)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

Αφω $f(1)f(2) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_3 \in (1, 2)$ τ.ω $f(\xi_3) = 0$

Η $f(x)$ είναι πολωνυμιο 3ου βαθμού άρα
έχει το πολύ τρεις ρίζες.

Συνολώς έχει ακριβώς τρεις.

Ευρεση Τύπου

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$
ψάχνω τύπο $h(x)$

Θέτω $x+1 = t$
 $x = t-1$ οπότε $f(t) = t e^{-(t-1)}$

$$f(t) = t e^{1-t}$$

$$\text{ή } \boxed{h(x) = x e^{1-x}}$$

2. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

• $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x, x > 0$

• $-f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \leq \ln x, x > 0$

Θέτω $\frac{x}{e} = t \Rightarrow x = te$

$$f(t) \leq \ln(te)$$

$$f(t) \leq \ln t + \ln e$$

$$f(t) \leq \ln t + 1$$

$$\underline{f(x) \leq \ln x + 1}$$

$$\boxed{h(x) = \ln x + 1}$$

Θέτω $\frac{1}{x} = t$

$$x = \frac{1}{t}$$

$$-f(t) + 1 \leq \ln \frac{1}{t}$$

$$-f(t) + 1 \leq \ln 1 - \ln t$$

$$-f(t) + 1 \leq -\ln t$$

$$f(t) - 1 \geq \ln t$$

$$\underline{f(x) \geq \ln x + 1}$$

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odd. $x^2 f(\frac{1}{x}) = n \cdot x \quad \forall x \neq 0.$

$\forall x \neq 0$ turn $f(x)$

Set $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

$$\left(\frac{1}{t}\right)^2 f(t) = n \cdot \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t^2} f(t) = n \cdot \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 n \cdot \frac{1}{t}$$

$$f(x) = x^2 n \cdot \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0$$

$f(0) \stackrel{\text{odd}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 n \cdot \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(0) = 0}}$

$$-1 \leq n \cdot \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 n \cdot \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right\} \text{Ans k.n. } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 n \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 n \cdot \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ smooth $f(0) = 1$.

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\psi_{\alpha \times \nu \omega}$ Tuno $f(x)$

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) + x^4 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(e^x f(x) - x^2)^2 = (x^2 + 1)^2$$

$$\underbrace{|e^x f(x) - x^2|}_{h(x)} = |x^2 + 1|$$

$$\underbrace{|h(x)|}_{\oplus} = x^2 + 1$$

Pild $h(x)$

$$h(x) = 0$$

$$|h(x)| = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

Atoro

$$h(x) \neq 0 \text{ can smooth}$$

$$h(x) > 0 \text{ w' } h(x) < 0$$

$$h(0) = e^0 f(0) - 0^2 = 1$$

$$h(x) > 0$$

$$h(x) = x^2 + 1$$

$$e^x f(x) - x^2 = x^2 + 1$$

$$e^x f(x) = 2x^2 + 1$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{e^x}$$

5. $\text{COTW } f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R} \text{ surjekt.}$

$$\forall x \quad x^2 + f^2(x) = 3x + 4 \quad \forall x \in [-1, 4]$$

$$f(0) = -2 \quad \forall x \neq 0 \text{ tutio } f(x)$$

$$f^2(x) = -x^2 + 3x + 4$$

$$f^2(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}^2$$

$$|f(x)| = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}^{\oplus}$$

$$|f(x)| = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}^{\ominus}$$

P.7d $f(x)$

$$f(x) = 0$$

$$|f(x)| = 0$$

$$\sqrt{-x^2 + 3x + 4} = 0$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = 4$$

x	-1	4
f(x)		

$$f(0) = -2$$

$$-f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$$

$$f(x) = -\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$$

Λύση

Πανελλήνιες 2026

$$\text{Έστω } f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2 \ln(x-1)$$

$$\text{Έστω } g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

$$\psi \alpha \chi \nu \omega \quad \tau \eta \quad (f \circ g)(x)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) \\ &= 2 \ln \sqrt{x-2} = \ln(x-2) \end{aligned}$$

$$\boxed{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f}$$

$$x \geq 2 \quad \sqrt{x-2} + 1 > 1$$

$$\sqrt{x-2} > 0$$

$$x-2 > 0$$

$$x > 2$$

$$D_{f \circ g} = (2, +\infty)$$

Πράξεις Συναρτήσεων

ημερ. 22/11/24

2024

Εστω $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \geq 1$

Εστω $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \geq 1$

$$\bullet (f \cdot g)(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [1, +\infty)$$

$$\bullet \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}^2 - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D_{g/f} = D_f \cap D_g \text{ και } f(x) \neq 0$$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$$

$$D_{g/f} = (1, +\infty)$$

$$\sqrt{x} \neq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x}^2 \neq 1$$

$$\boxed{x \neq 1}$$

$$\text{Εστω } f(x) = 4 - \frac{1}{x}, x > 0$$

Πανεπιστήμιο

2026

Εκπαιδευτική

$$\text{Εστω } g(x) = \frac{1}{4-x}, x < 4$$

$$\begin{aligned} \text{Ψαχνω } (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \\ &= 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x} \end{aligned}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, 4).$$

Αντίστροφη

Πανελλήνιος
2026

Εκπαιδευτική

Εστω $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$, $x > 0$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow 4 - \frac{1}{x_1} < 4 - \frac{1}{x_2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f \nearrow \Rightarrow f^{-1} \nearrow$$

f αντιστ.

Θετω $f(x) = y$

$$y = 4 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = 4 - y$$

$$\frac{1}{4-y} = x$$

$$4-y \neq 0$$

$$\underline{y \neq 4}$$

Θετω $x = f^{-1}(y)$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{4-y}$$

Αφού $x > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{4-y} > 0$$

$$4-y > 0$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4-x}$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 4)$$

$$\underline{y < 4}$$

$$f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Πανεπιστήμιο

2022

$$g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = \\ &= x^2 - 2x + 1 = \\ &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

$$x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & \sqrt{x} &\leq 1 \\ & & x &\leq 1 \end{aligned}$$

$$D_h = [0, 1]$$

Αντιστρέφουμε " $h(x)$;

$$h(x) = (x-1)^2$$

$$D_h = [0, 1]$$

$$\in \sigma \tau \omega \quad h(x_1) = h(x_2)$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

$$-x_1 + 1 = -x_2 + 1$$

$$x_1 = x_2$$

$$h(1) = 0$$

$$h(x) = y$$

$$y = (x-1)^2$$

$$\underline{\underline{y \geq 0}}$$

$$\sqrt{y}^2 = (x-1)^2$$

$$|\sqrt{y}^{\oplus}| = |x-1|^{\ominus}|$$

$$\sqrt{y} = 1-x$$

$$x = 1 - \sqrt{y}$$

$$h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$$

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1$$

$$0 \leq 1 - \sqrt{y}$$

can

$$1 - \sqrt{y} \leq 1$$

$$-\sqrt{y} \leq 0$$

can also

$$\sqrt{y} \leq 1$$

$$\underline{\underline{y \leq 1}}$$

$$D_{h^{-1}} = [0, 1],$$