

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + x - 1$ (1).

α) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2, x_1 x_2$

και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\frac{1}{x_1} = -1$ και $\frac{1}{x_2} = 2$, να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τις $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 12)

α) $x_1 + x_2 = \frac{-1}{2}$

$x_1 x_2 = \frac{-1}{2}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2}} = -1$$

β) $x^2 - Sx + P = 0$

$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$

$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2$

$x^2 - (-1)x - 2 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$$

$$1 + 1 - 2 = 0$$

$$2 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\textcircled{\beta} x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\textcircled{2}$$

$$\textcircled{-1}$$

$$\textcircled{\gamma} A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x} = \frac{(x-2)(\cancel{x+1})}{x(\cancel{x+1})} = \frac{x-2}{x}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A+B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

(Μονάδες 9)

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \text{ i) } A+B &= \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} + \frac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \\ &= \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{10}{5^2-\sqrt{5}^2} = \frac{10}{20} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } A \cdot B &= \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{5^2-\sqrt{5}^2} = \\ &= \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

β) Ψάχνω την εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$

$$S = A+B = \frac{1}{2}$$

$$P = A \cdot B = \frac{1}{20}$$

$$\downarrow$$
$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=3$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

α) $|x-2|=3$

$$x-2=3$$

$$\vee \quad x-2=-3$$

$$\boxed{x=5}$$

$$\boxed{x=-1}$$

β) $x^2 - 5x + 9 = 0$

$$S = 5 + (-1) = 4$$

$$P = 5 \cdot (-1) = -5$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x^2 - 4x - 5 = 0}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

α) Για $x=1$ το τριώνυμο γίνεται

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$$

Ναι αναί!

$$\text{β)} \quad 2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x - 1\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5).$$

$$\Delta = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{4} \begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{-\frac{5}{2}} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

(Μονάδες 8)

α) $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-(-3) \pm 5}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\begin{matrix} \nearrow \textcircled{2} \\ \searrow \textcircled{-\frac{1}{2}} \end{matrix}$$

β) Για να ορίζεται η παράσταση K πρέπει

το $2x^2 - 3x - 2 \neq 0$ άρα $x \neq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 2$

γ) $K = \frac{(x-2) \cancel{1}}{(2x+1)(x-2)} = \frac{x-2}{2x+1}$

ΘΕΜΑ 2

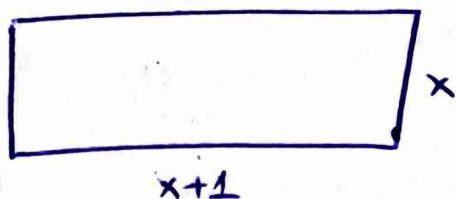
Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x+1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)



$$\textcircled{\alpha} \quad \Pi = 2(x+1) + 2x = 2x+2+2x = 4x+2$$

$$E = x(x+1) = x^2 + x$$

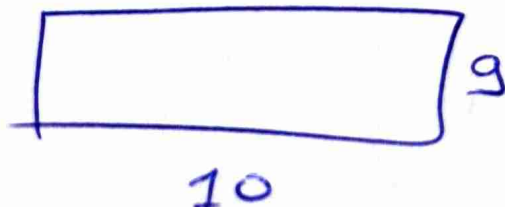
$$\textcircled{\beta} \quad E = 90$$

$$x^2 + x = 90$$

$$x^2 + x - 90 = 0$$

$$\Delta = 1 + 360 = 361$$

$$x = \frac{-1 \pm 19}{2} \rightarrow \begin{cases} \textcircled{9} \\ \textcircled{-10} \end{cases} \quad \underline{\underline{x=9}}$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64.$$

(Μονάδες 08)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 07)

$$\textcircled{\alpha} (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$12^2 = 272 + 2\alpha\beta$$

$$144 = 272 + 2\alpha\beta \quad (\Rightarrow) \alpha\beta = -64$$

$$\textcircled{\beta} x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = \alpha + \beta = 12$$

$$P = \alpha\beta = -64$$

$$\rightarrow x^2 - 12x - 64 = 0.$$

$$\textcircled{\gamma} x^2 - 12x - 64 = 0$$

$$\Delta = 144 + 4 \cdot 64$$

$$\Delta = 400$$

$$x = \frac{12 \pm 20}{2} \rightarrow \begin{cases} 16 \\ -4 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

(Μονάδες 8)

α) i) $\lambda = -2 \Rightarrow (\lambda-1)x - 2\lambda + 2 = 0$

$$x - 4 + 2 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x - 2 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\underline{x = 2}}$$

ii) Για $x=1$ έχω

$$\lambda - 1 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$-\lambda + 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\underline{\lambda = 1}}$$

β) $(\lambda-1)x = 2\lambda-2$

$$(\lambda-1)x = 2(\lambda-1)$$

Αν $\lambda = 1$ τότε $0x = 0$

αρα είναι ταυτότητα

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Για } \lambda \neq 1 \text{ τότε } x = \frac{(\cancel{\lambda-1})(\lambda+1)}{\cancel{\lambda-1}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \lambda + 1}}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \text{Για } \lambda = 1 \text{ έχω } 0x = 0 \text{ άρα ταυτότητα,}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 8)

α) Για $\lambda = 2$ έχω $(2-1)x = 2^2 - 1$
 $x = 3$

Για $\lambda = -1$ έχω $(-1-1)x = (-1)^2 - 1$
 $-2x = 0$
 $x = 0$

Για $\lambda = 1$ έχω $(1-1)x = 1^2 - 1$
 $0x = 0$.

β i). Για $\lambda \neq 1$ έχω μοναδική λύση

ii). Για $\lambda \neq 1$ είναι $x = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1}$

Αρα $x = 4 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 4$

$\lambda = 3$

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$$

$$\alpha \beta (\alpha + \beta) = 20$$

$$4(\alpha + \beta) = 20$$

$$\underline{\underline{\alpha + \beta = 5}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$S = \alpha + \beta = 5$$

$$P = \alpha \cdot \beta = 4$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x^2 - 5x + 4 = 0}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad \alpha_4 - \alpha_2 = 10 \longrightarrow \alpha_1 + 3\omega - (\alpha_1 + \omega) = 10$$

$$\boxed{\alpha_n = \alpha_1 + \omega(n-1)}$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$

$$\cancel{\alpha_1} + 3\omega - \cancel{\alpha_1} - \omega = 10$$

$$2\omega = 10$$

$$\underline{\underline{\omega = 5}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad S_3 = 33.$$

$$\frac{3}{2} (2 \cdot \alpha_1 + 5(3-1)) = 33$$

$$\frac{3}{2} (2\alpha_1 + 10) = 33$$

$$\frac{3}{2} \alpha_1 + \frac{3}{2} \cdot 10 = 33$$

$$3\alpha_1 + 15 = 33$$

$$3\alpha_1 = 18$$

$$\textcircled{\alpha_1 = 6}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2} (2\alpha_1 + \omega(n-1))}$$

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_v) είναι α₁ = 2 και α₅ = 14.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (α_v) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{a} \quad \boxed{\alpha_v = \alpha_1 + \omega(v-1)}$$

$$\alpha_v = 2 + \omega(v-1)$$

$$\alpha_5 = 2 + 4\omega$$

$$14 = 2 + 4\omega$$

$$12 = 4\omega \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\underline{\omega = 3}}$$

$$\textcircled{b} \quad \sum_v = 77$$

$$\frac{v}{2} (2\alpha_1 + \omega(v-1)) = 77$$

$$\frac{v}{2} (2 \cdot 2 + 3(v-1)) = 77$$

$$v(4 + 3v - 3) = 154$$

$$v(3v + 1) = 154$$

$$3v^2 + v - 154 = 0$$

$$\Delta = 1 + 12 \cdot 154 = 1849$$

$$v = \frac{-1 \pm 43}{6} \rightarrow \begin{cases} 7 \\ -\frac{44}{6} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{v = 7}}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραιών $1, 2, 3, \dots, n$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45.

(Μονάδες 13)

α) $a_1 = 1$
 $w = 1$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + w(n-1))$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2 \cdot 1 + 1(n-1))$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2 + n - 1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2} (n+1)}$$

β) $S_n = 45$

$$\frac{n}{2} (n+1) = 45$$

$$n(n+1) = 90$$

$$n^2 + n - 90 = 0$$

$$\Delta = 1 + 360 = 361$$

$$n = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

9
~~= 10~~

$$\underline{\underline{n=9}}$$

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ισχύουν: $a_1 = 2$ και $a_{25} = a_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

$$\textcircled{\alpha} \quad a_{25} = a_{12} + 39$$

$$\cancel{a_1 + 24\omega} = \cancel{a_1 + 11\omega} + 39$$

$$13\omega = 39$$

$$\underline{\underline{\omega = 3}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad a_n = a_1 + \omega(n-1)$$

$$\boxed{a_n = 2 + 3(n-1)}$$

$$0(n) = 152$$

$$2 + 3(n-1) = 152$$

$$3n - 3 = 150$$

$$3n = 153$$

$$n = 51$$

αρα $a_{51} = 152$.

$$\boxed{a_n = a_1 + \omega(n-1)}$$

ΘΕΜΑ 2

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο 20^{ος} όρος της προόδου ισούται με 97.

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 7 + 12 + \dots + 97$.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \omega \quad \text{ε) } 7 - 2 = 5 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\omega = 5}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \alpha_n = \alpha_1 + \omega(n-1)$$

$$\alpha_{20} = 2 + 5 \cdot 19$$

$$\alpha_{20} = 97$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \begin{array}{ccccccc} 2 & + & 7 & + & 12 & + & \dots & + & 97 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & & & \alpha_{20} \end{array}$$

$$\alpha_n = 97$$

$$\alpha_1 + \omega(n-1) = 97$$

$$2 + 5(n-1) = 97$$

$$5n - 5 = 95$$

$$5n = 100$$

$$\underline{\underline{n = 20}}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2 \cdot 2 + 5 \cdot 19)$$

$$S_{20} = 10 (4 + 95)$$

$$S_{20} = 990$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $1 - x$, $\frac{x}{2}$, $2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad 2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - x + 2x - 1 \quad (\Rightarrow) \quad x = x \quad \checkmark$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{σχισμα} \quad \frac{x}{2} - (1 - x) = 5$$

$$\frac{x}{2} - 1 + x = 5$$

$$\frac{x}{2} + x = 6$$

$$x + 2x = 12$$

$$3x = 12$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \frac{(x-3)(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} = x-3$$

$$\textcircled{f(x) = x-3}$$

$$\bullet \quad x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-(-2) \pm 4}{2} \begin{cases} \textcircled{3} \\ \textcircled{-1} \end{cases}$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(1) = 1-3 = -2 \neq -4 \quad \text{αρα η γραφική}$$

παράσταση της $f(x)$ δεν διέρχεται

από το $A(1, -4)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

α) Πρην $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$
 $A_f = \mathbb{R} - \{2\}$

β) i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad x = -1$

ii). $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$f(3) = \frac{3^2 - 1}{3 - 2} = \frac{9 - 1}{1} = 8$

γ) $\frac{x'x}{f(x) = 0}$

$x = 1 \quad x = -1$

$A(1, 0) \quad \Gamma(-1, 0)$

$\frac{y'y}{f(0) = \frac{1}{2}}$

$B(0, \frac{1}{2})$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $M(1, 3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

α) Πραγμ $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$A_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

β) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{\cancel{x-2}} = x+2$

$$f(x) = x+2$$

$f(1) = 1+2 = 3$ ΝΑΙ ανήκει!

γ)

$$\frac{x'x}{f(x) = 0}$$

$$x+2 = 0$$

$$x = -2$$

$$A(-2, 0)$$

$$\frac{y'y}{f(0) = 0+2 = 2}$$

$$f(0) = 0+2 = 2$$

$$B(0, 2)$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

α) Πρέπει $x - 3 \neq 0$, $x \neq 3$ $A_f = \mathbb{R} - \{3\}$

β) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = x - 2$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow \textcircled{3} \\ \searrow \textcircled{2} \end{matrix}$

$f(x) = x - 2$

$\frac{y'y}{f(0)} = 0 - 2$

$f(0) = -2$

$B(0, -2)$

γ) $\frac{x'x}{f(x) = 0}$

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$A(2, 0)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(-1) = 2(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$f(5) = 5^2 = 25$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0 \quad \text{αρα το } (0,0)$$

δεν ανήκει στην γραφική παράσταση

της $f(x)$.

$$\textcircled{\gamma} \quad \underline{y'y}$$

$$f(0) = -5$$

αρα το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα

$$A(0, -5)$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

$$\begin{aligned} \textcircled{\alpha} \quad f(-1) &= 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2 \\ f(3) &= 3 - 1 = 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2 \\ f(3) &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}} \right\} f(-1) = f(3)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \underline{x < 0}$$

$$f(x) = 0$$

$$2x + 4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$\underline{x = -2}$$

$$\underline{x \geq 0}$$

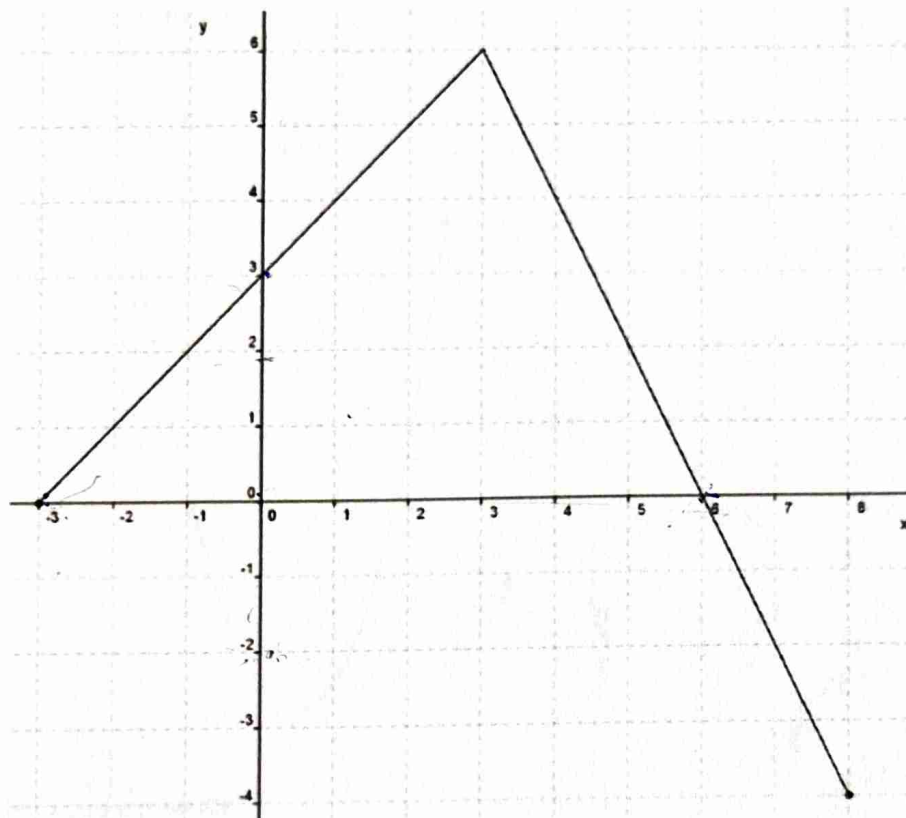
$$f(x) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\underline{x = 1}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

$$A_f = [-3, 6]$$

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

$$\frac{x'x}{A(-3,0) \quad B(6,0)}$$

$$\frac{y'y}{\Gamma(0,3)}$$

(Μονάδες 6)

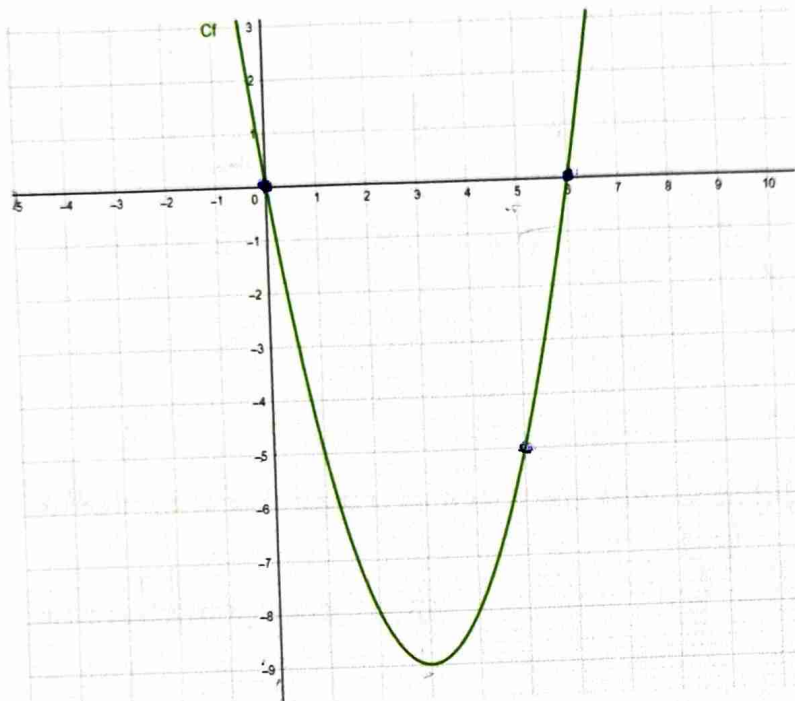
δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

$$\text{α) } A_f = [-3, 6) \quad x \in (-3, 6)$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

(Μονάδες 11)

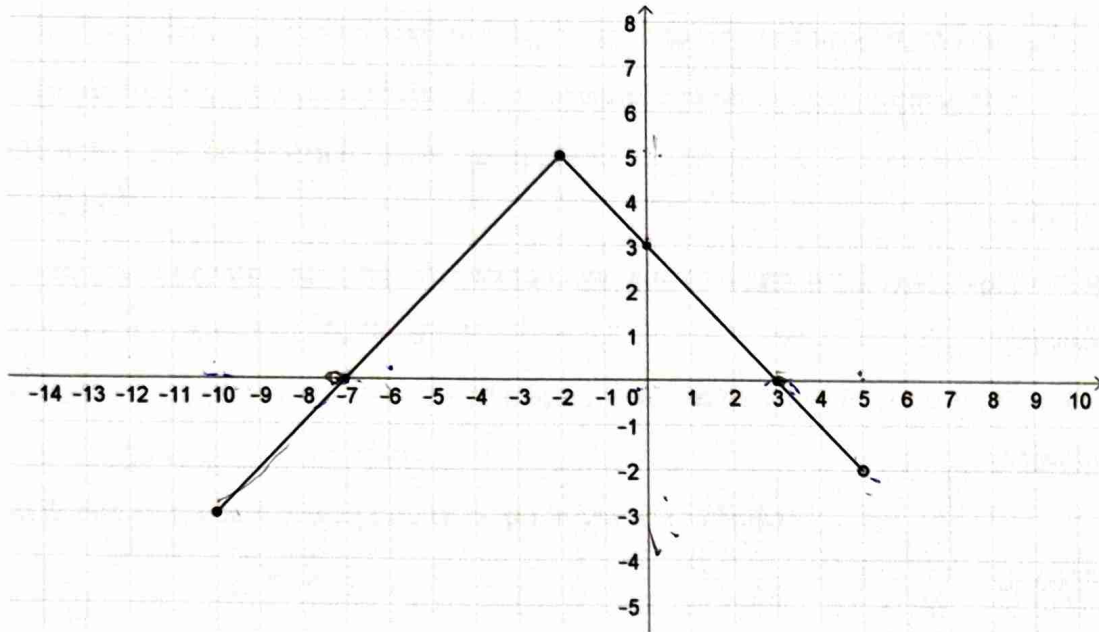
α) $f(0) = 0$ $f(1) = -5$ $f(3) = -9$ $f(5) = -5$

β) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $x = 6$

γ) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 6)$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.

(Μονάδες 4)

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} A_f = [-10, 5] \quad \text{ε} T_f = [-3, 5]$$

$$\textcircled{\beta} f(-2) = 5 \quad f(0) = 3 \quad f(3) = 0$$

$$\textcircled{\gamma} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7 \text{ και } x = 3$$

$$\textcircled{\delta} x \in [-10, -7) \cup (3, 5)$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

α) Αφού έχει κλίση -2 τότε $\alpha = -2$

Άρα $y = -2x + \beta \rightarrow (1, 1)$

$$1 = -2 \cdot 1 + \beta$$

$$1 = -2 + \beta$$

$$3 = \beta$$

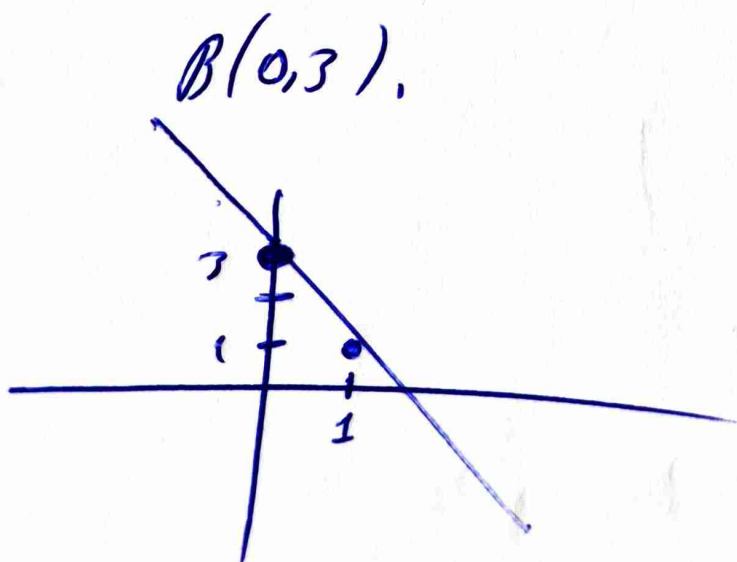
$$y = -2x + 3$$

β) $\frac{y'y}{x=0}$

$$y = -2 \cdot 0 + 3$$

$$y = 3$$

γ)



ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 8)

α) $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

$$\Delta = 2^2 - 4(-3) = 16$$

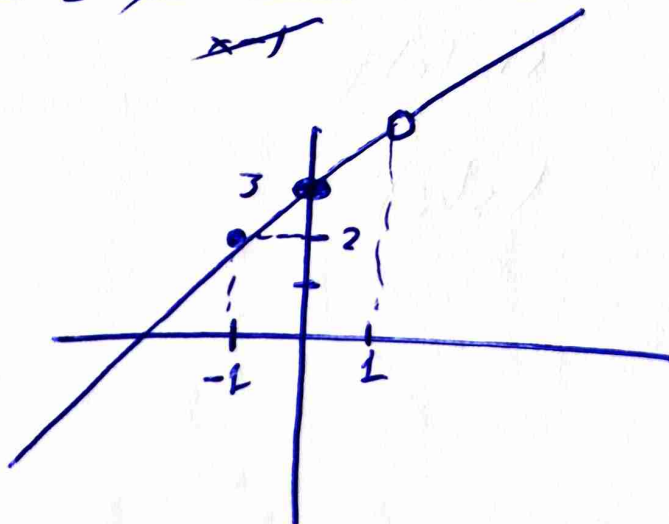
$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

β) i) αφού $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

ii) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = x + 3$

iii) $f(x) = x + 3$

x	0	-1
y	3	2



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β , αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$. Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ , αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad a = \varepsilon\varphi 45^\circ \quad (\Rightarrow) \quad a = 1$$

$$\text{αρα} \quad y = x + \beta \rightarrow A(0, 3)$$

$$3 = 0 + \beta$$

$$\beta = 3$$

αρα

$$\boxed{y = x + 3}$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Αρα είναι παράλληλη} \quad \lambda = 1.$$

$$\text{Αρα} \quad y = x + \kappa \rightarrow (2, 0)$$

$$0 = 2 + \kappa$$

$$\kappa = -2$$

$$\underline{\underline{y = x - 2}}$$

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

(Μονάδες 10)

$$-2 \leq x+1 \leq 2$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

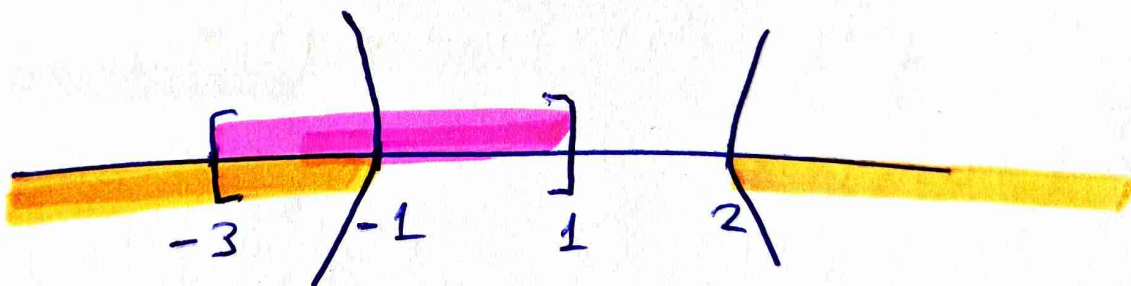
$$x \in [-3, 1]$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

x	-1	2
$x^2 - x - 2$	$+$	$+$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

③



korvid 25000 [-3, -1).

$$\textcircled{1} \cdot \begin{matrix} -3 \leq p_1 < -1 \\ -3 \leq p_2 < -1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \begin{matrix} -1 \geq p_1 \geq -3 \\ 3 \geq -p_2 \geq 1 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} -3 \leq p_1 < -1 \\ -3 \leq p_2 < -1 \end{matrix}} \right\} \textcircled{+} \begin{matrix} 2 \geq p_1 - p_2 \geq -2 \\ p_1 - p_2 \in [-2, 2] \end{matrix}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002).$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

(Μονάδες 9)

α)

x	-1	3
$f(x)$	-	+

β)

$$\underbrace{f(2,999)}_{\oplus} \cdot \underbrace{f(-1,002)}_{\ominus} < 0$$

γ)

$$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 = f(|\alpha|).$$

$$\text{Το } -3 < \alpha < 3 \Rightarrow |\alpha| < 3 \Rightarrow 0 < |\alpha| < 3$$

$$\text{Αρα } -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

α) $\Delta = k^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = k^2 + 48 > 0.$

β) $P = -\frac{4}{3} < 0$ ετερόσημα.

γ)

x	α	x_1	0	x_2	β
$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

$$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0,$$

$\ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$,

(Μονάδες 4)

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

(Μονάδες 5)

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2)$

$$\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

β) Διότι είδα δηλαδή

$$\text{Προτιμ} \Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0$$

$$2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) i) $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$$

$$2x_1 < x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 < 2x_2$$

$$x_1 < x_2$$

$$x_1 < x_2$$

ισχύει.

ισχύει.

11)

x	x_1	$\frac{x_1+x_2}{2}$	x_2
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

$$f(x_2) \quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad f(x_2+1).$$

"
0

⊖

⊕

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2+1).$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{a} \Delta = 36 - 4(\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda$$

$$\textcircled{b} \Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow 12 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 12$$

$$\lambda \in (-\infty, 12).$$

γ) i) Για να σχη δυο ριζη θετικη και αυτιση ρρη

- $\Delta > 0$ που ισχυει για $\lambda < 12$
- $P > 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 > 0 \Rightarrow \lambda > 3$ που ισχυει,
- $S > 0 \Leftrightarrow 6 > 0$ που ισχυει.

ii).

x	κ	0	$\overset{+}{x_1}$	ρ	$\overset{+}{x_2}$
$f(x)$		+	+	-	+

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \rho \cdot f(\rho) > 0$$

$$\ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \ominus$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda = 4(1 - \lambda) > 0$$

γιατί $\lambda < 1$

$$\textcircled{\beta} x_1 + x_2 = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

$$\textcircled{\gamma} |x_1 - 2| = |x_2 + 2|$$

$$i) |x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 + 2 \quad \text{ή} \quad x_1 - 2 = -x_2 - 2$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\underline{\underline{x_1 - x_2 = 4}}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

Αδυνατών.

$$ii) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{+} 2x_1 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 3}}$$

$$\downarrow$$

$$3 + x_2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -1}}$$

Για $x = x_2 = -1$ η εξίσωση γίνεται $9 - 6 + \lambda = 0$

$$\underline{\underline{\lambda = -3}}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (\lambda - \lambda^2)$
 $\Delta = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$

β) Αφού $\Delta \geq 0$ έχω πραγματικές ρίζες.

Αν $\Delta = 0$ τότε έχω διηλτη ρίζα

οπότε $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

Άρα όταν $\lambda = \frac{1}{2}$ η $\Delta = 0$ και έχω διηλτη ρίζα

Άρα για να έχω δύο ρίζες άνισες πρέπει $\Delta > 0$

$\Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$

γ) $0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm (2\lambda - 1)}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{1 + 2\lambda - 1}{2} = \frac{2\lambda}{2} = \lambda \\ x_2 = \frac{1 - 2\lambda + 1}{2} = \frac{2 - 2\lambda}{2} = 1 - \lambda \end{cases}$$

Άρα $0 < |\lambda - 1 + \lambda| < 2 \Leftrightarrow 0 < |2\lambda - 1| < 2$

$$0 < |2\lambda - 1| < 2$$

$$0 < |2\lambda - 1| \quad \text{or} \quad |2\lambda - 1| < 2$$

$$\rightarrow 2\lambda - 1 = 0$$

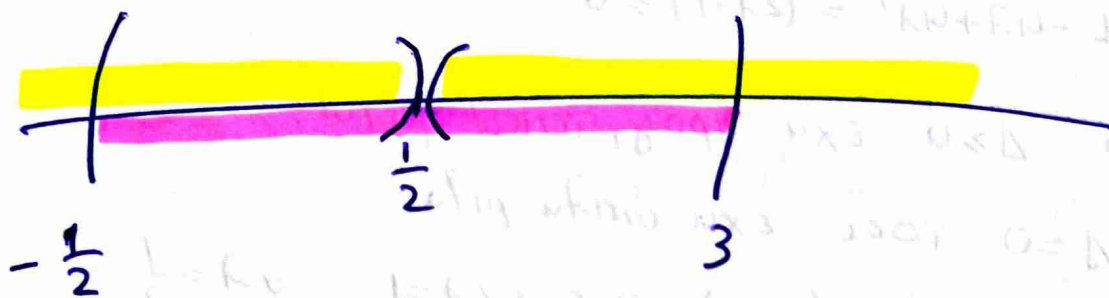
$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$-2 < 2\lambda - 1 < 2$$

$$-1 < 2\lambda < 3$$

$$-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$$



$$\text{konkl. Result: } \lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$$

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x .

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18.$$

(Μονάδες 7)

α) i) $x^2 + 9x + 18$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 18$$

$$\Delta = 81 - 72 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{2}$$

$$\begin{matrix} \nearrow (-3) \\ \searrow (-6) \end{matrix}$$

ii) $|x+3| + |x^2+9x+18| = 0$

$$\begin{cases} x+3=0 & x=-3 \\ x^2+9x+18=0 & x=-3, x=-6 \end{cases}$$

Άρα $x=-3$

β) i)

x	-6	-3
$x^2+9x+18$	$+$	$+$

ii). $|x^2+9x+18| = -x^2-9x-18 \Rightarrow x \in [-6, -3]$

ΘΕΜΑ 4

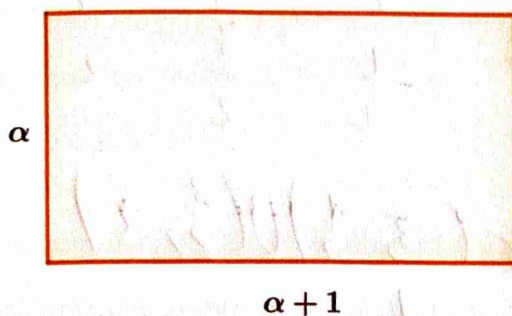
α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha + 1$.



Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει

$E < 6$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

α) $x^2 + x - 6 < 0$

x	-3	2
$x^2 + x - 6$	$+$	$-$

$x \in (-3, 2)$

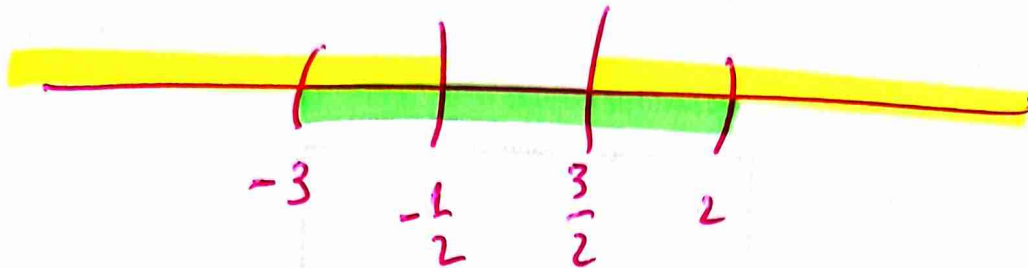
β) $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1 \Rightarrow x - \frac{1}{2} > 1 \quad \vee \quad x - \frac{1}{2} < -1$

$x > \frac{3}{2} \quad \vee \quad x < -\frac{1}{2} \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

$$\textcircled{1} \text{ i) } |E| < 6 \Rightarrow |a/a+1| < 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 < 0$$

$$a \in (-3, 2)$$

$$\text{ενίσημι } a \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$



$$a \in (-3, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2)$$

↓
απορρίπται

⇒ α πληρα
ορθογώνια

$$a \in (\frac{3}{2}, 2)$$

$$\text{ii) } \Pi = 2a + 2/a + 1$$

$$\Pi = 2a + 2a + 2$$

$$\Pi = 4a + 2$$

$$\frac{3}{2} < a < 2$$

$$4 \cdot \frac{3}{2} < 4a < 4 \cdot 2$$

$$6 < 4a < 8$$

$$8 < 4a + 2 < 10$$

$$8 < \Pi < 10$$

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

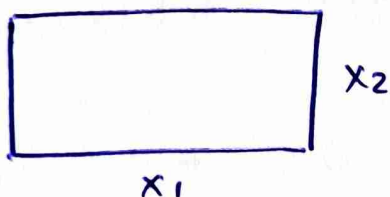
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)



$$\textcircled{\alpha} \text{ i) } \Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot \frac{4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)}{1} = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Pi = 8\lambda + \frac{8}{\lambda}$$

$$\text{ii) } E = x_1 x_2 = \frac{16}{\lambda} = 16$$

$$\textcircled{\beta} \text{ Από } \Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0.$$

$$\textcircled{\gamma} \Pi = 16 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}$$

Αν $\lambda = 1$ τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 - 4 \cdot 2x + 16 = 0$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Άρα $x_1 = x_2 = 4$ άρα
είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α .

(Μονάδες 10)

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \Delta = [-(\alpha^2 - 1)]^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (-\alpha)$$

$$\Delta = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$$

$$\textcircled{\beta} \rho_{1,2} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm \alpha^2 + 1}{2\alpha}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha \\ \rho_2 &= \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = \frac{-2}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

$\rho_1 = \alpha$
 $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$

$$\textcircled{\gamma} |\rho_1 - \rho_2| = 2$$

$$\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| = 2$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$$

$$\alpha^2 + 1 = 2\alpha$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)^2 = 0$$

$$\alpha = 1$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2$$

$$\alpha^2 + 1 = -2\alpha$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha + 1)^2 = 0$$

$$\alpha = -1$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 4(\lambda - 1)$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (2\lambda - 4)^2$$

$$\textcircled{\beta} \Delta = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{διπλή ρίζη.}$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2 \quad 2 \text{ ανιστ. ρίζες.}$$

$$\textcircled{\gamma} \text{ Για } x = 2 \text{ έχω } 2^2 - 2\lambda \cdot 2 + 4(\lambda - 1) = 0$$

$$4 - 4\lambda + 4\lambda - 4 = 0$$

$$0 = 0,$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

(Μονάδες 3)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

α) Για $\lambda = -2$ έχω $x^2 + 4x - 3 = 0$
 $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$
 $\Delta = 28 > 0$ 2 ρίζες.

Για $\lambda = 3$ έχω

$$x^2 - 6x + 17 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 17 = 36 - 68 = -32 < 0 \text{ καμία ρίζα.}$$

β) i) Για $\lambda = 5$ έχω $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$$

αρα έχω διπλή ρίζα.

ii). $\Delta = 0$

$$(-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 0$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-5) = 16 + 20 = 36$$

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm 6}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

5
-1

$$\textcircled{1} |x^2 - 4x - 5| = 4x - x^2 + 5$$

$$\text{Αρα } x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$\Rightarrow \Delta < 0$$

Αρα αδιαφορ.

ΘΕΜΑ 4

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm

α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(Μονάδες 6)

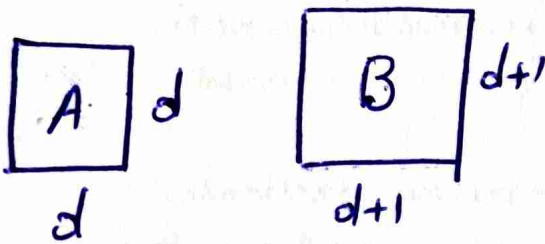
β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

(Μονάδες 12)

ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Μονάδες 7)



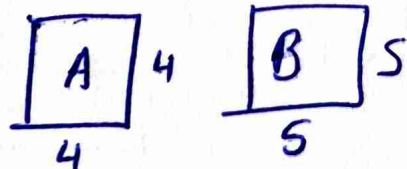
$$\textcircled{a} \quad E_A = d^2, \quad E_B = (d+1)^2 = d^2 + 2d + 1$$

$$\textcircled{b} \quad \text{i) } 200 E_A = 128 E_B \Leftrightarrow 200 d^2 = 128 (d^2 + 2d + 1)$$

$$\Leftrightarrow 100 d^2 = 64 (d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow 25 d^2 = 16 (d+1)^2$$

$$(5d)^2 = [4(d+1)]^2 \Leftrightarrow |5d| = |4(d+1)|$$

$$5d = 4d + 4 \Leftrightarrow \underline{d = 4}$$

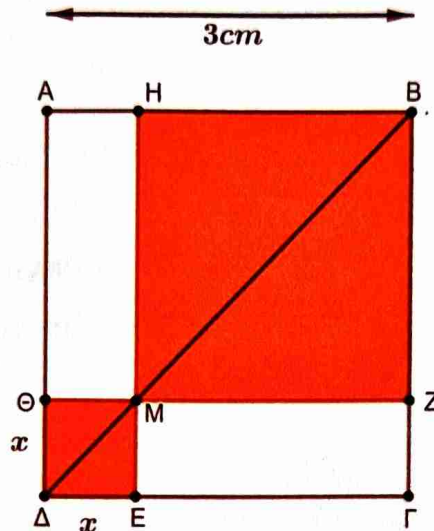


$$\text{ii). } E_{\text{τοίχου}} = 200 E_A = 200 \cdot 4^2 = 200 \cdot 16 \Leftrightarrow$$

$$E_{\text{τοίχου}} = 3200.$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο $B\Delta$ εσωτερικά (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta ME\Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι

$$E(x) \geq \frac{9}{2}, \text{ για κάθε } x \in (0, 3).$$

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια θέση του M πάνω στη $B\Delta$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με

$$\frac{9}{2}; \text{ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.}$$

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} . E = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9$$

$$\textcircled{\beta} . E(x) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9$$

$$4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq 0 \checkmark$$

$$\textcircled{\gamma} E(x) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

α) Πραγμα $3 - |x| \neq 0 \Leftrightarrow 3 \neq |x| \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ κ' } x \neq -3.$

$A_f = \mathbb{R} - \{3, -3\}.$

β) $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|} = \frac{9-|x|^2}{3-|x|} = \frac{(3-|x|)(3+|x|)}{3-|x|} = 3+|x|$

γ) $\frac{x'x}{f(x)=0}$
 $3+|x|=0$
 Αδυνατούν.

$\frac{y'y}{f(0)=3}$
 $A(0,3).$

δ) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3+|x| = 3-x^2 \Leftrightarrow |x| = -|x|^2$

$|x|^2 + |x| = 0 \Leftrightarrow |x|(|x|+1)=0$

$|x|=0$
 $\underline{\underline{x=0}}$

$|x|+1=0$
 Αδυνατούν.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$
 προση $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

$D_g = \mathbb{R}$.

x	-1	5
$x^2 - 4x - 5$	$+0$	$+0$

$x \in (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$
 $\downarrow$
 A_f

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = |x + 3|$

$x^2 - 4x - 5 = x^2 + 6x + 9$

$-10x = 14$

$x = -\frac{7}{5}$

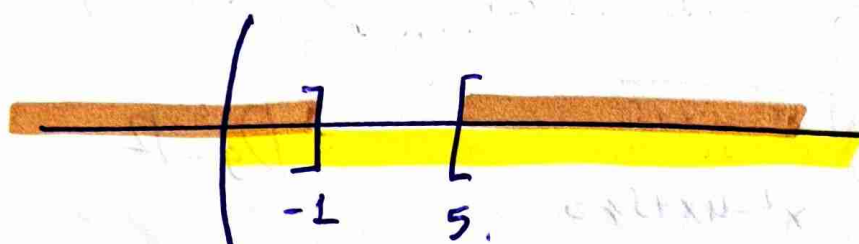
$A(-\frac{7}{5}, \frac{8}{5})$.

$$⑧ \quad f(x) < g(x)$$

$$-10x < 14$$

$$x > -\frac{7}{5}$$

$$\text{Answer } D_f = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$$



$$-\frac{7}{5}$$

$$\text{Kornd } x \in (-\frac{7}{5}, -1] \cup [5, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$$

$$f(x) = 3|x - 4| - 2|x - 4| - 3|x^2 - 16|$$

$$\bullet |x| \leq 4 \quad \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \quad (\Leftrightarrow -8 \leq x - 4 \leq 0)$$

$$\bullet |x| \leq 4 \quad \Rightarrow |x|^2 \leq 16 \quad \Rightarrow x^2 \leq 16 \quad \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0$$

$$f(x) = -3(x - 4) + 2(x - 4) + 3(x^2 - 16)$$

$$f(x) = -3x + 12 + 2x - 8 + 3x^2 - 48$$

$$f(x) = 3x^2 - x - 44$$

$$\textcircled{\beta} \quad i) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$$

$$A(4, 0)$$

$$\frac{y'}{y}$$

$$f(0) = -44$$

$$B(0, -44)$$

$$11) f(p+1) = 3(p+1)^2 - (p+1) - 44 = -20$$

$$3(p^2 + 2p + 1) - p - 1 - 44 = -20$$

$$3p^2 + 6p + 3 - p - 45 = -20$$

$$3p^2 + 5p - 42 + 20 = 0$$

$$3p^2 + 5p - 22 = 0$$

$$\Delta = 25 + 12 \cdot 22$$

$$\Delta = 289$$

$$p = \frac{-5 \pm 17}{6}$$

$$p = 3 \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{\frac{-22}{6}}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 8)

α) πρην $x^3 - 2x^2 + x \neq 0$

$x(x^2 - 2x + 1) \neq 0$

$x(x-1)^2 \neq 0$

$A_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

β) $f(x) = \frac{x}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{1}{(x-1)^2}$

γ) $f(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow 1 = (x-1)^2$

$x-1=1$

$x=2$

ή $x-1=-1$

~~$x=0$~~

$$(8) f(x) > 1 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow 1 > (x-1)^2$$

$$|1| > |x-1|$$

$$|x-1| < 1$$

$$-1 < x-1 < 1$$

$$\underline{\underline{0 < x < 2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$(1) \text{ Given } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$(12) \text{ Given } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x(x-2) + 1 = 0$$

$$x(1-x) = 1$$

$$\frac{1}{x(1-x)} = 1$$

$$1-x = 1-x$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$1-x = 1-x$$

$$(x-1)^2 = 0$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$.

(Μονάδες 05)

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \lambda x - \lambda + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - \lambda + 3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

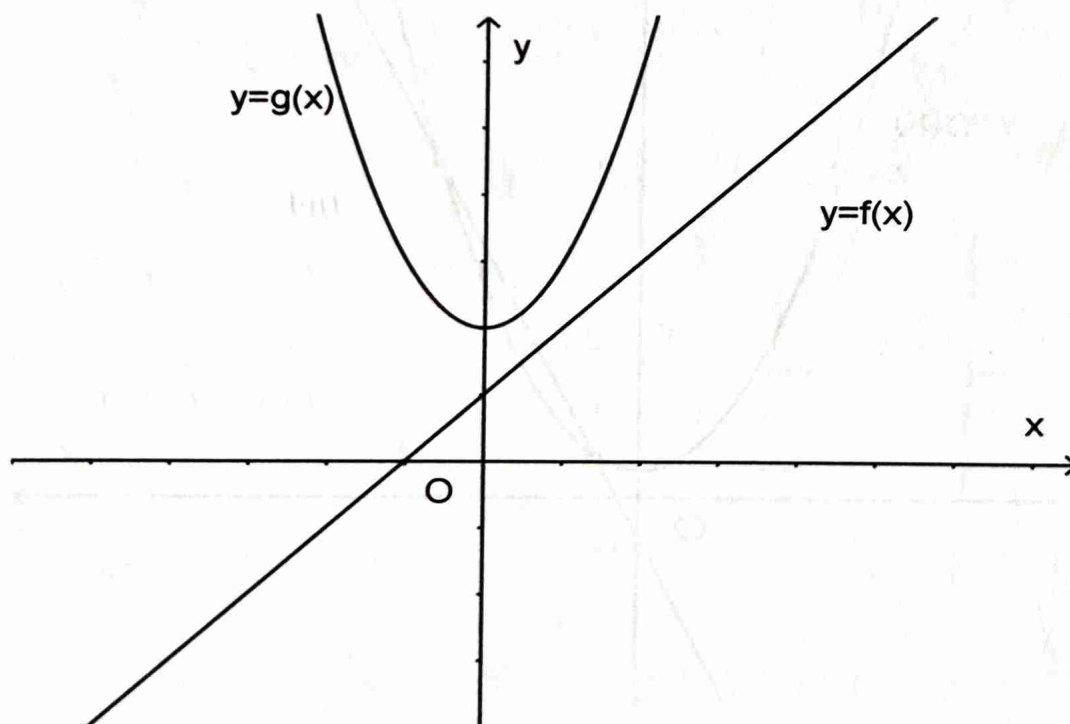
i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$.

(Μονάδες 05)

ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

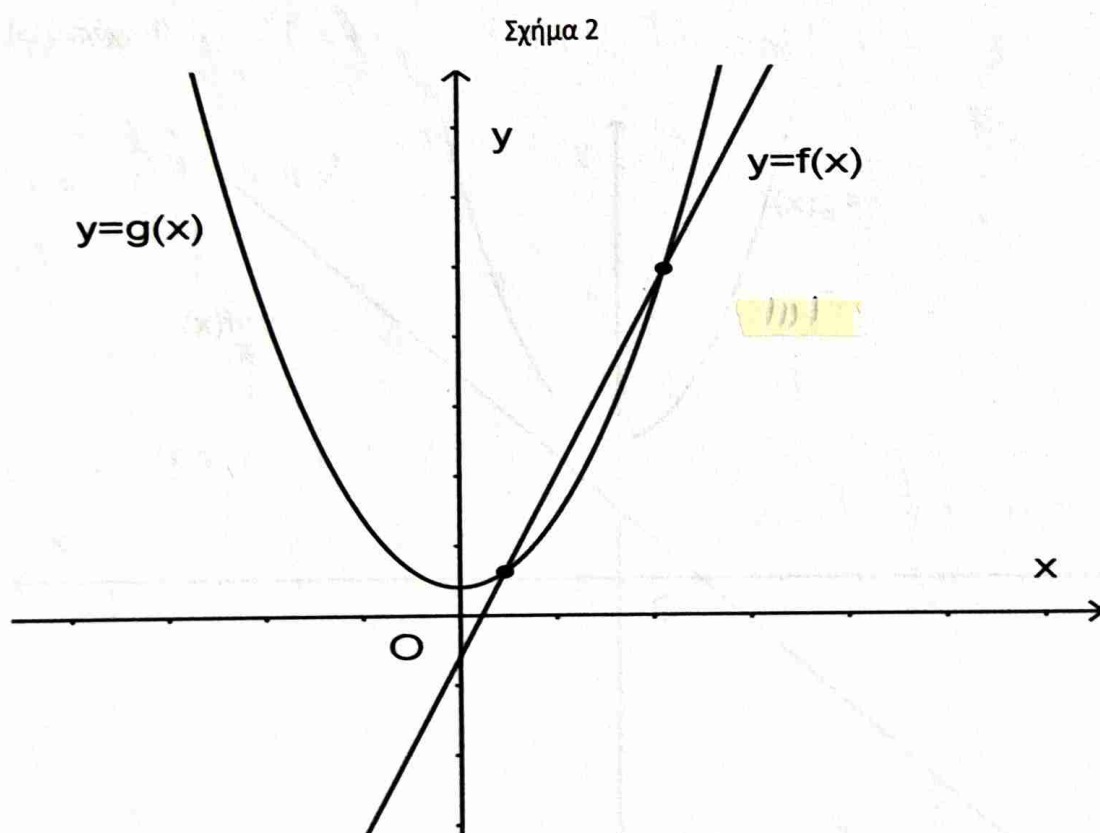
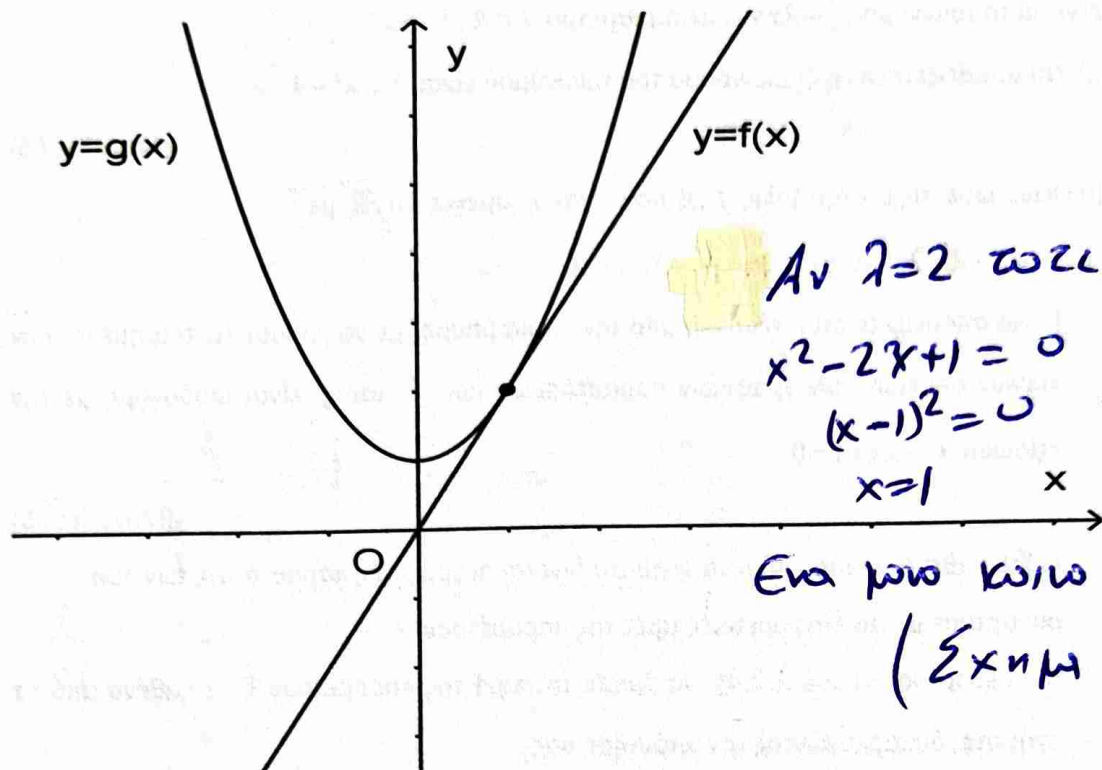


Σχήμα 1

α) $\Delta = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4$

β) i) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \lambda x - \lambda + 2 = x^2 - \lambda + 3 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + 1 = 0$

11) Αν $\lambda=1$ τότε $x^2-x+1=0$ όπου $\Delta=-3<0$
 άρα η εξίσωση είναι αδύνατη άρα δεν έχουν
 κοινά σημεία (Σχήμα 1)



Σχήμα 3

Αν $\lambda=4$ τότε $x^2-4x+1=0$ άρα $\Delta=12>0$
 άρα έχουν 2 κοινά σημεία (Σχήμα 3)

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

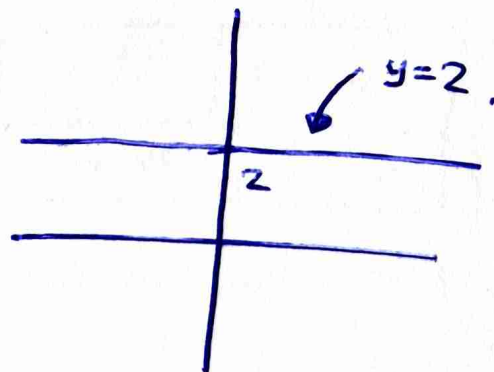
δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad 2 = (\lambda+1) \cdot 0^2 - (\lambda+1) \cdot 0 + 2$$

$$2 = 2 \quad \text{αρα} \quad \text{η } f(x) \text{ διέρχεται από } A(0,2).$$

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Για } \lambda = -1 \quad \text{έχω} \quad f(x) = 2.$$



$$\textcircled{\gamma} \quad \text{Για } x=2 \text{ και } y=0 \quad \text{έχω}$$

$$0 = 4(\lambda+1) - 2(\lambda+1) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\lambda+1) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda+1+1=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda=-2}}$$

$$\text{Για } \lambda = -2 \quad \text{έχω} \quad f(x) = -x^2 + x + 2$$

$$\frac{x'x}{f(x)=0}$$

$$f(x)=0$$

$$-x^2+x+2=0$$

$$x=2$$

$$x=-1$$

⑧ Για $\lambda=1$ έχω $f(x)=2x^2-2x+2$

$$\Delta = 4 - 16 = -12$$

Αφού $\Delta < 0$ έχω

σταθερό πρόσημο

ορισμένου πω σε (του 2)

Αρα $f(x) > 0$, $f(x) = 2$ (α)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε

την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

(Μονάδες $5 + 5 = 10$)

$$\textcircled{a} \quad f(2) = g(2) \quad \Leftrightarrow 4 - 8 + \alpha = 2\alpha - 5 \quad \Leftrightarrow \alpha - 4 = 2\alpha - 5$$

$$\boxed{1 = \alpha}$$

$$\textcircled{b} \quad \text{i) } f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \quad \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\boxed{x=2} \quad \boxed{x=3}$$

$$\text{ii) } f(x) \geq g(x) \quad \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq x - 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

x	2	3
$x^2 - 5x + 6$	+	-

$$x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty).$$

$$\textcircled{+} \quad |f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

$$x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

(Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 4)

ii) Για $\alpha = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha = 3$, $\alpha = -2$, $\alpha = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \text{ Για } x=1 \text{ και } y=2 \text{ έχω } 2 = \alpha - \alpha + 2 \\ 2 = 2$$

$$\textcircled{\beta} \text{ i) } f(1) = g(1) \Leftrightarrow 2 = 1 + 3 - \alpha \Leftrightarrow 2 = \alpha$$

$$\text{ii) } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ (x-1)^2 = 0$$

$$\textcircled{\gamma} f(x) = g(x) \Leftrightarrow \alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \quad \underline{\underline{x=1}}$$

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

- i) Για $\alpha = 3$ τότε $x^2 - 3x + 1 = 0$ $\Delta = 5 > 0$ δύο κοινά σημεία.
 ii) Για $\alpha = -2$ τότε $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Delta = 0$ 1 κοινό σημείο.
 iii) Για $\alpha = 1$ τότε $x^2 - x + 1 = 0$ $\Delta < 0$ κανένα κοινό

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

(Μονάδες 10)

ⓐ Прими $|x| - 3 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq 3$ или $x \neq -3$

$$D_f = A_f = R - \{3, -3\}.$$

$$(B) f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{|x|^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x| - 2)(|x| - 3)}{|x| - 3}$$

$$f(x) = |x| - 2$$

$$(y) \quad (f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0.$$

$$(|x|-2+2)^2 - 4(|x|-2) - 5 = 0$$

$$|x|^2 - 4|x| + 8 - 5 = 0$$

$$|x|^2 - 4|x| + 3 = 0$$

$|x| = 3$
 ~~$x = 3$~~ ~~$x = -3$~~

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{a} f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)^2 > 4$$

$$(x-1)^2 > 2^2 \quad \Leftrightarrow |x-1| > \overset{+}{2} \quad \Leftrightarrow |x-1| > 2$$

$$\begin{array}{l} x-1 > 2 \quad \vee \quad x-1 < -2 \\ x > 3 \quad \quad \quad x < -1 \end{array}$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

$$\textcircled{b} \text{ Αρκεί να } g(x) > 0 \quad \Rightarrow |x-1| + 2 > 0$$

που είναι αληθές

$$\left. \begin{array}{l} \bullet |x-1| \geq 0 \\ \bullet 2 > 0 \end{array} \right\} \textcircled{+} |x-1| + 2 > 0$$

$$\textcircled{g} f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2$$

$$|x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\textcircled{|x-1|=t}$$

$$\textcircled{t=3}$$

$$\textcircled{t=-2}$$

$$\begin{array}{l} |x-1|=3 \\ x-1=3 \quad \vee \quad x-1=-3 \\ \textcircled{x=4} \quad \vee \quad \textcircled{x=-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |x-1|=-2 \\ \text{Απορριπτό!} \end{array}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}} \right]^3 \cdot (x^2-16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

α) Πρέπει $x^2 - x - 12 > 0$

x	-3	4
$x^2 - x - 12$	$-$	$+$

$$A_g = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty).$$

$$\beta) g(x) = \frac{1^3}{\sqrt[3]{x^2-x-12}^3} \cdot (x^2-16) = \frac{1}{x^2-x-12} (x^2-16)$$

$$g(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+3)} = \frac{x+4}{x+3}$$

$$\delta) \frac{x'x}{g(x)} = 0$$

$$\frac{x+4}{x+3} = 0$$

$$x = -4$$

$$K(-4, 0).$$

$$\frac{y'y}{y}$$

$$\text{Το } 0 \notin A_g$$

αρα δν τμνν

τον $y'y$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|a| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

α) $f(2) = 2 + \frac{1}{2}$

$g(2) = 2 - \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2$

$A = 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2$

$A = 4 - 1 = 3$

β) $f^2(x) - g^2(x) = 4 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$

$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 4$

$\cancel{x^2} + 2 + \frac{1}{\cancel{x^2}} - \cancel{x^2} + 2 - \frac{1}{\cancel{x^2}} = 4$

$4 = 4$

⑧ Αφού έχω κοίτα σημαίνει η εξίσωση
 $f(x)=a$ έχει λύση

$$x + \frac{1}{x} = a \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 + 1 = ax$$

$$x^2 - ax + 1 = 0$$

Απαιτώ $\Delta \geq 0$

$$a^2 - 4 \geq 0$$

$$a^2 \geq 4$$

$$|a| \geq 2$$

$$a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + a$. Να δείξετε ότι:

- Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.
- Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}} \quad A(-1, 0)$$

$$\textcircled{\beta} \text{ i) } f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + a \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 2 - a = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(2-a) = 4 - 8 + 4a = 4a - 4 = 4(a-1)$$

$$\text{αφού } a > 1 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

αρα η εξίσωση έχει 2 λύσεις.

$$\text{ii) } f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - a = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(a-1)$$

$$\text{αν } a < 1 \Rightarrow a - 1 < 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

και δεν έχουν
κοινά σημεία.
αρα αλυσάει

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = g(x) \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 2x = 3x - 4 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{x=4}$$

$$A(1, -1) \quad B(4, 8).$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) < g(x) \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 2x < 3x - 4.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$$

x	1	4
$x^2 - 5x + 4$	+	-

$$x \in (1, 4).$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \text{Αρκεί νδο} \quad f(x) > \alpha \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 2x > \alpha$$

$$x^2 - 2x - \alpha > 0 \quad \text{Αρκεί νδο} \quad \Delta < 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha)$$

$$\Delta = 4 + 4\alpha = 4(1 + \alpha) < 0 \quad \text{γιατι} \quad \alpha < -1$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \text{ οπου για } \alpha = 1 \text{ γίνεται}$$

$$x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \quad \boxed{x=0} \quad \boxed{x=1}$$

$$A(0, 1) \quad B(1, 2)$$

$$\textcircled{\beta} f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \alpha = 0$$

$$\text{Απαιτω } \Delta > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - \alpha) > 0$$

$$1 - 4(1 - \alpha) > 0 \Leftrightarrow 1 - 4 + 4\alpha > 0$$

$$4\alpha - 3 > 0 \Rightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{\gamma} P = \frac{y}{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{1} < 0 \text{ για } \alpha > 1$$

αρα αρα $P < 0$ ετερόσημα!

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$, παράμετρος.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f , C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f , C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f , C_g , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \lambda x + (1 - \lambda) \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0 \quad \text{αρα}$$

έχει τουλάχιστον μια λύση.

$$\textcircled{\beta} \quad \text{Αν } \Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ έχω}$$

μοναδικά κοινά σημεία.

$$\text{Η μοναδική λύση } x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{\lambda}{2} \stackrel{\lambda=2}{=} \frac{2}{2} = 1.$$

$$A(1, 1)$$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \\ x_1 + x_2 = \lambda. \end{array}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad (x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - |\lambda| + 2 = 0$$

$$|\lambda| = 2 \quad \wedge \quad |\lambda| = -1$$

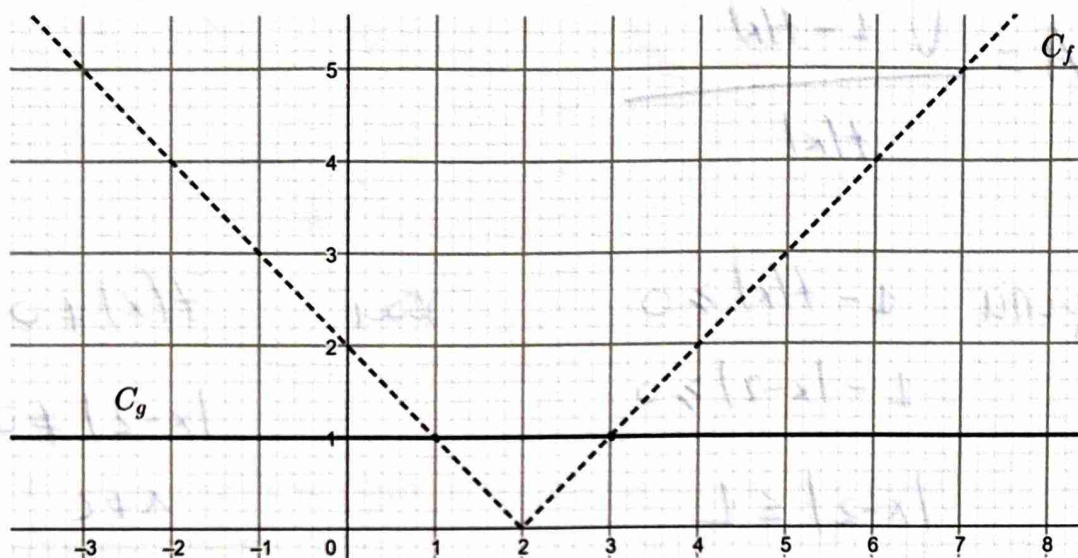
$$\lambda = 2 \quad \wedge \quad \lambda = -2$$

Απορρ.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g .

(Μονάδες 5)

ii. τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

(Μονάδες 5)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αι) και αιι).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 5)

α) i) $A(1,1) \quad B(3,1)$

ii) $x \in (1,3)$.

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x-2=1 \vee x-2=-1$
 $x=3 \qquad x=1$

$B(3,1) \quad A(1,1)$

$$11) |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

$$x \in (1, 3)$$

$$12) A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

$$\text{нрчу } 1 - f(x) \geq 0$$

$$\text{или } f(x) \neq 0$$

$$1 - |x-2| \geq 0$$

$$|x-2| \neq 0$$

$$|x-2| \leq 1$$

$$x \neq 2$$

$$x \in [1, 3]$$

$$x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

$$(1, 2) \cup (2, 3)$$

$$x \in (1, 3)$$

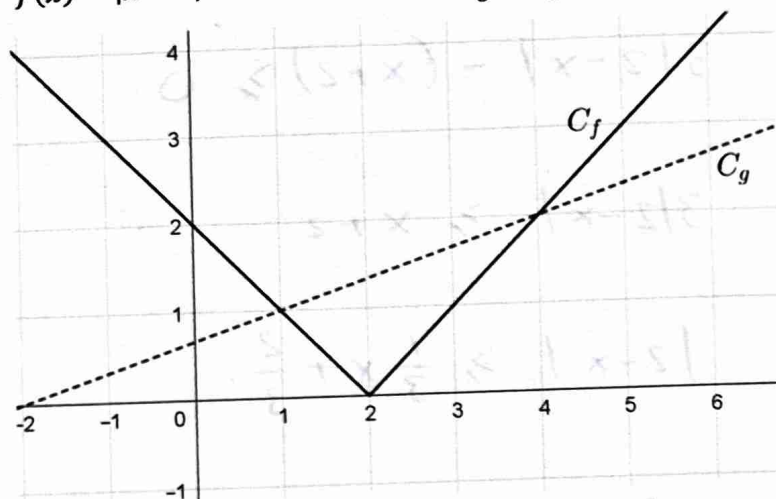
$$13) f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad g(x) = \sqrt{1-x^2} \quad h(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}.$$

(Μονάδες 5)

α) $A(1, 1) \quad B(4, 2)$

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3|x - 2| = x + 2$

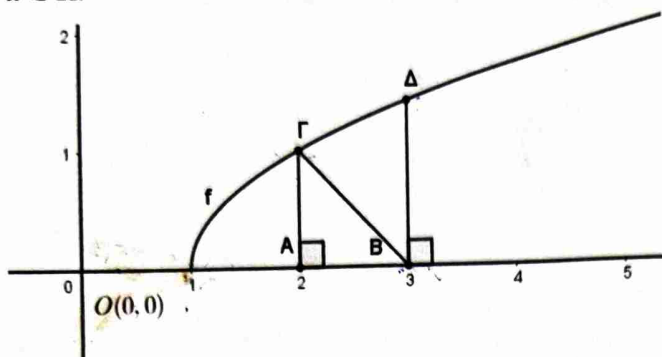
$$\boxed{x + 2 \geq 0}$$

$$\begin{aligned} 3(x - 2) &= x + 2 & \vee & \quad 3(x - 2) = -x - 2 \\ 3x - 6 &= x + 2 & & \quad 3x - 6 = -x - 2 \\ 2x &= 8 & & \quad 4x = 4 \\ x &= 4 & & \quad x = 1 \end{aligned}$$

$A(1, 1) \quad B(4, 2)$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-a}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

γ)

i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 4)

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

$$\textcircled{a} \quad f(1)=0 \Leftrightarrow 0 = \sqrt{1-a} \Leftrightarrow 0=1-a \Leftrightarrow \boxed{a=1}$$

β) Πρην $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ αρ $A_f = [1, +\infty)$.

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x-1}}$$

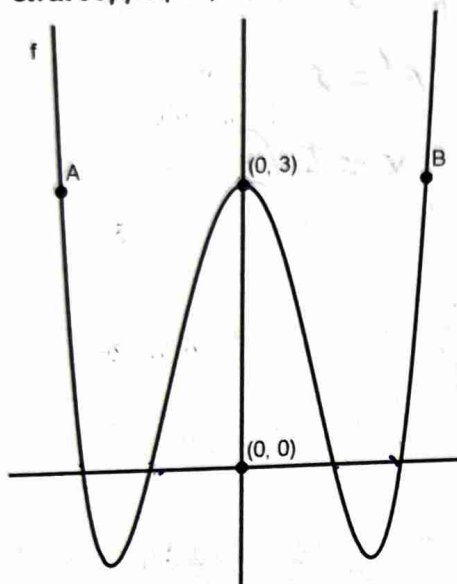
$$\textcircled{\gamma} \text{ i) } f(2) = \sqrt{2-1} = 1 \quad \Gamma(2,1) \\ f(3) = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \quad \Delta(3,\sqrt{2})$$

$$\text{ii) } AB^2 + AG^2 = BG^2 \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 = BG^2 \Leftrightarrow BG^2 = 2$$

$$\text{iii) } BG = \sqrt{2} \text{ και } BD = \sqrt{2} \text{ αρ ισοσκελ Δ } \quad BG = \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

α) $f(0) = 3 \Leftrightarrow \gamma = 3$

β) $a^2 - 3 = -(5 - 3a) \Leftrightarrow a^2 - 3 = -5 + 3a \Leftrightarrow$

$a^2 - 3a + 2 = 0$

$a = 1$

~~$a = 2$~~

γιατί $A \in \mathbb{Z}_0$ τριάρ.

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

$$\textcircled{8} \quad |f(x)| = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = 1$$

$$t = 3$$

$$x^2 = 1$$

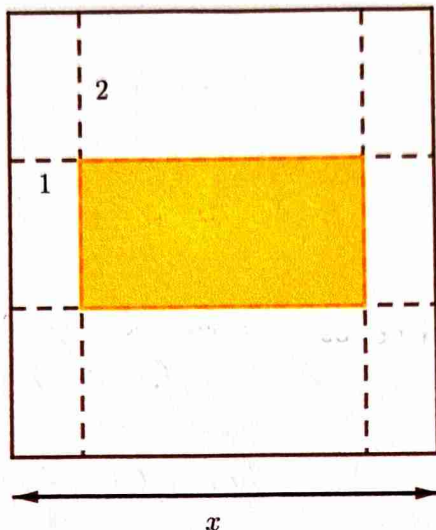
$$x^2 = 3$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$\textcircled{9} \quad x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$$

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x \text{ cm}$ ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά.


$$E(x) = (x-2)(x-4), \quad 5 \leq x \leq 10.$$

β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

① $E(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$

$\textcircled{\beta} E(x) = 35 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 35 \Rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$
 $\textcircled{x=9} \quad \cancel{x=-3}$

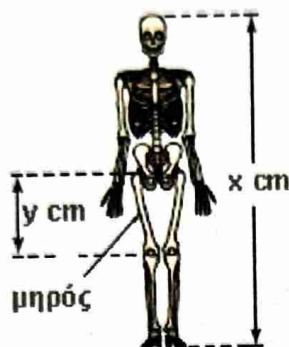
⑧ $E(x) \geq 24 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 6x + 8 \geq 24 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 6x - 16 \geq 0$

x	-2	0	8
$E(x)$	+	-	+

$$x \in [8, 10].$$

ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



$$\text{Γυναίκα: } y = 0,43x - 26$$

$$\text{Άνδρας: } y = 0,45x - 31$$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{a} \text{ Για } y = 38,5 \text{ έχω } 38,5 = 0,43x - 26$$

$$38,5 + 26 = 0,43x$$

$$64,5 = 0,43x$$

$$x = 150 \text{ cm}$$

$$\textcircled{b} \text{ Αν } y = 42,8 \text{ τότε } 42,8 = 0,45x - 31$$

$$42,8 + 31 = 0,45x$$

$$73,8 = 0,45x$$

$$x = 161,7$$

$$\neq 164 \text{ άρα όχι.}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} y = 0,43x - 26 \\ y = 0,45x - 31 \end{cases}$$

$$0,43x - 26 = 0,45x - 31$$

$$31 - 26 = 0,45x - 0,43x$$

$$5 = 0,02x$$

$$x = 250 \text{ cm.}$$

Αρα αν υπάρχει ζευγάρι
αντρα και γυναίκα ταντο χρόν
τότε και ,