supersos αποδειξη

1. Εστω f ορισμενη σ'ενα κλειστο διαστημα $[a,B]$

- f συνεχης στο $[a,B]$

- $f(a) \neq f(B)$

τοτε για καθε αριθμο n μεταξυ των $f(a)$ και $f(B)$ νδο υπαρχει τουλαχιστον ενα $x_0 \in (a,B)$ τ.ω $f(x_0)=n$

Αποδειξη

Εστω οτι $f(a) < n < f(B)$

Η $g(x) = f(x) - n$ συνεχη $[a,B]$ ως π.σ.σ

$g(a) = f(a) - n < 0$

$g(B) = f(B) - n > 0$

Αρα $g(a)g(B) < 0$ Bolzano $\exists x_0 \in (a,B)$

τ.ω $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = n$

2. Νδο αν η f είναι παρ/μη στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0

Απόδειξη

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \quad x \neq x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x)-f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right]$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)-f(x_0)\right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{συνεχής στο } x_0$$

3. Έστω $f(x) = c$. Νδο $f'(x) = 0$

Απόδειξη

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

4. Έστω $f(x) = x$. Νδο $f'(x) = 1$

Απόδειξη

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

5. Έστω $f(x) = \sqrt{x}$. Νδο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Απόδειξη

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x_0}^2}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

6. Αν f, g παρ/μη στο x_0 νδο $f+g$ παρ/μη στο x_0

και $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

<u>Αποδειξη</u>

$h(x) = f(x) + g(x)$

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = f'(x_0) + g'(x_0)$$

7. Νδο αν $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ παρ/μη στο $\mathbb{R}^*$

τοτε $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

<u>Αποδειξη</u>

Αν $x > 0$ τοτε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Αν $x < 0$ τοτε $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

8 Εστω f συνεχ. στο Δ και $f'(x) = 0$

για καθε εσωτερικο x του Δ

Νδο η f σταθερη στο Δ.

<u>αποδειξη</u>

Αρκει νδο $f(x_1) = f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \Delta$

$\rightarrow$ Αν $x_1 = x_2$ τοτε $f(x_1) = f(x_2)$

$\rightarrow$ Αν $x_1 < x_2$ τοτε η f ικανοποιει το ΘΜΤ

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ομως $f'(x) = 0$ αρα $f'(\xi) = 0$ $\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\rightarrow$ Αν $x_1 > x_2$ ομοιως.

Αρα $f(x_1) = f(x_2)$ $\forall x_1, x_2$

9. Εστω f, g συνεχεί στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για καθε εσωτερικο x του Δ

Νδο $f(x) = g(x) + c$

<u>Αποδειξη</u>

Αφου $f'(x) = g'(x)$

$$f'(x) - g'(x) = 0$$

$$[f(x) - g(x)]' = 0$$

$$f(x) - g(x) = c$$

$$f(x) = g(x) + c$$

10. Εστω f συνεχ. στο Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε καθε εσωτερικο x του Δ νδο $f \nearrow$

<u>Αποδειξη</u>

Αν $x_1 < x_2$ τοτε η f ικανοποιει το ΘΜΤ

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και ολιγου $f'(x) > 0$

Τοτε $f'(\xi) > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$

$f(x_2) > f(x_1)$

$f \nearrow$

11. Εστω f παρ/μη στο (α, β) με εξαιρεση ισως ενα σημειο x_0 στο οποιο η f ειναι συνεχ.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) νδο το $f(x_0)$ τοπικο μεγιστο της f.

<u>Αποδειξη</u>

x	α	x_0	β
f'	$+$	$-$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	

$x \le x_0$: $f \nearrow$, $f(x) \le f(x_0)$

$x \ge x_0$: $f \searrow$, $f(x) \le f(x_0)$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{f(x) \le f(x_0)}$$

αρα το $f(x_0)$ το πιο μεγιστο

12. Εστω f παρ/μη στο (α,β) με εξαιρεση ισως ενα σημειο στο οποιο ειναι συνεχης.

Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0), $f'(x)>0$ στο (x_0,β) νδο το $f(x_0)$ τοπικο ελαχιστο

Αποδειξη

x	α	x_0	β
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

$$\underbrace{\begin{array}{cc} x\le x_0 & x\ge x_0 \\ f\downarrow & f\nearrow \\ f(x)\ge f(x_0) & f(x)\ge f(x_0) \end{array}}$$

$f(x)\ge f(x_0)$

αρα το x_0 τοπικο ελαχιστο

13. Εστω f παρ/μη στο (α,β) με εξαιρεση ενα x_0 στο οποιο η f συνεχ. Αν η $f'(x)$ διατηρει προσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ νδο το $f(x_0)$ δεν ειναι ακροτατο και οτι η f γν. μονοτονη στο (α,β)

Αποδειξη

x	α	x_0	β
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	

Εστω $f'(x)>0$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} x_1<x_0 & x_0<x_2 \\ f\nearrow & f\nearrow \\ f(x_1)<f(x_0) & f(x_0)<f(x_2) \end{array}}$$

$f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$

Το $f(x_0)$ δεν ειναι ακροτατο

Αφου $f\nearrow$ στο $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$

και $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ η $f\nearrow$ στο (α,β).

14. Εστω συναρτηση ορισμενη στο Δ
Αν η F παραγωγα της f στο Δ
τοτε ολη οι συναρτησεις της μορφης

$G(x) = F(x) + c$ ειναι παραγωγα της f στο Δ και καθε αλλη παραγωγα G της f στο Δ ειναι της μορφης

$G(x) = F(x) + c$.

<u>Αποδειξη</u>

- $G'(x) = F'(x) + c'$
  $G'(x) = f(x)$ αρα η $G(x)$ παραγωγα της f.
- Εστω $G(x)$ μια αλλη παραγωγα της f.

$$\left.\begin{array}{l} G'(x) = f(x) \\ F'(x) = f(x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} G'(x) = F'(x) \\ G(x) = F(x) + c. \end{array}$$

15. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

Αν η G παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$

τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Απόδειξη

Έστω $G(x)$ παράγουσα της $f(x)$

Έστω $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ παράγουσα της $f(x)$

$$G'(x) = F'(x)$$

$$G(x) = F(x) + c$$

$$\xrightarrow{x = a}$$

$$G(a) = F(a) + c$$

$$G(a) = \int_{a}^{a} f(t)\,dt + c$$

$$G(a) = c$$

$$G(x) = F(x) + G(a)$$

$$\xrightarrow{x = \beta}$$

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a)$$

$$G(\beta) - G(a) = \int_{a}^{\beta} f(t)\,dt.$$