Προετοιμασια Διαγωνισματος

8/2/26

Θεωρια

1.1	1.22	
1.3	1.28	3.5
1.11	1.31	3.6
1.12	1.34	3.7
1.13	1.36	3.9
1.14	1.40	3.10
1.15	1.42	3.16
1.18	1.43	3.18
1.21	1.44	3.19.
Ορισμοι.		Αποδειξεις.

3.5 Νδο αν η f παρ/μη στο x_0

Τοτε ειναι και συνεχης στο x_0

Αποδειξη

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right)$$

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = f'(x_0) \cdot 0$$

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Συνεχης στο x_0

3.6 ΝΔΟ $(c)' = 0$

Απόδειξη

Έστω $f(x) = c$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

3.7 ΝΔΟ $(x)' = 1$

Απόδειξη

Έστω $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x - x_0}}{\cancel{x - x_0}} = 1$$

3.9 ΝΔΟ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Απόδειξη

Έστω $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x_0}^2}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x - x_0}}{\cancel{(x - x_0)}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

3.10 Ndo $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Απόδειξη

Έστω $h(x) = f(x) + g(x)$

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x) - (f(x_0)+g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

3.16 Έστω f ορισμένη στο Δ.

Αν η f συνεχής στο Δ και αν

$f'(x)=0$ $\forall x$ εσωτερικό του Δ.

Τότε νδο $f(x)$ σταθερή.

Απόδειξη

Αρκεί νδο $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ η $f(x_1)=f(x_2)$

→ $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

→ $x_1 < x_2$

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

όμως $f'(x)=0$ άρα $f'(\xi)=0$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

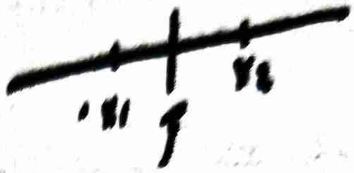
→ $x_1 > x_2$

όμοια.

3.18 Αν $f'(x)>0$ τότε $f \nearrow$

Απόδειξη

Έστω [redacted]



$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

όμως $f'(x)>0$

$f'(\xi)>0$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underset{\oplus}{x_2-x_1}}>0$$

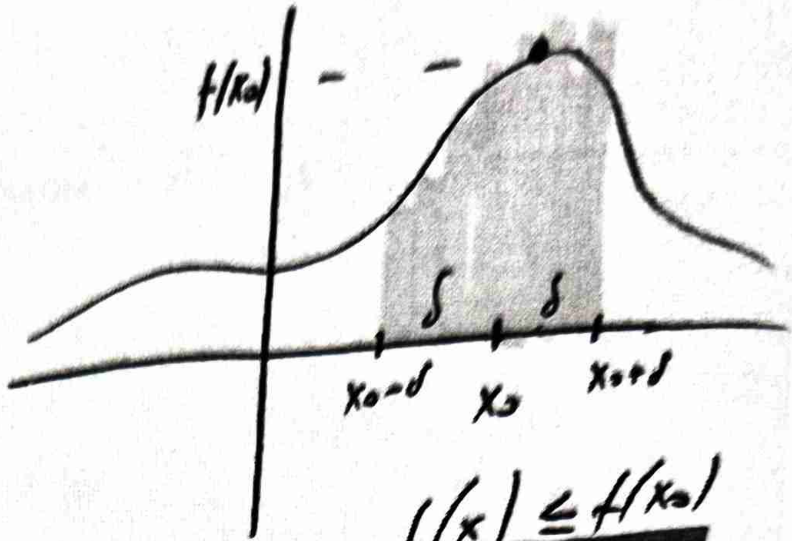
$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0$

$f(x_2)>f(x_1)$

$f \nearrow$

3.19 (Fermat)

$A(x_0, f(x_0))$ Τοπ. μέγιστο



$f(x) \leq f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Γνωρίζω ότι η f παραγωγίσιμη στο x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

$$f'(x_0) = 0 .$$

Ευρεση Τυπου

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ωστε $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$

Ψαχνω τυπο $f(x)$

Θετω $x+1 = t$

$x = t-1$ αρα $f(t) = t\, e^{-(t-1)}$

$f(t) = t\, e^{1-t}$

ή $\boxed{f(x) = x e^{1-x}}$

2. $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

- $f\left(\frac{x}{e}\right) \le \ln x \ ,\ x>0$
- $-f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \le \ln x,\ x>0$

Θετω $\frac{x}{e} = t \Rightarrow x = te$

$f(t) \le \ln(te)$

$f(t) \le \ln t + \ln e$

$f(t) \le \ln t + 1$

$f(x) \le \ln x + 1$

Θετω $\frac{1}{x} = t$

$x = \frac{1}{t}$

$-f(t) + 1 \le \ln \frac{1}{t}$

$-f(t) + 1 \le \ln 1 - \ln t$

$-f(t) + 1 \le -\ln t$

$f(t) - 1 \ge \ln t$

$f(x) \ge \ln x + 1$

$\boxed{f(x) = \ln x + 1}$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. $x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = ημx \quad \forall x \neq 0.$

Ψάχνω τύπο $f(x)$

Θέτω $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

$$\left(\frac{1}{t}\right)^2 f(t) = ημ\frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t^2} f(t) = ημ\frac{1}{t} \Rightarrow f(t) = t^2 ημ\frac{1}{t}$$

$$\boxed{f(x) = x^2 ημ\frac{1}{x} \quad x \neq 0}$$

$$f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=\!=} \lim_{x \to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(0) = 0}}$$

$$-1 \leq ημ\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 ημ\frac{1}{x} \leq x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 \\ &\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{Από Κ.Π.} \lim_{x \to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής $\quad f(0)=1$.

$$e^{2x}f^2(x)-2x^2e^xf(x)=2x^2+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ψάχνω τύπο $f(x)$

$$e^{2x}f^2(x)-2x^2e^xf(x)+x^4=x^4+2x^2+1$$

$$\left(e^xf(x)-x^2\right)^2=\left(x^2+1\right)^2$$

$$|\underbrace{e^xf(x)-x^2}_{h(x)}|=|x^2+1|$$

$$|h(x)|=x^2+1$$

Ρίζα $h(x)$

$h(x)=0$

$|h(x)|=0$

$x^2+1=0$

Άτοπο

$h(x)\neq 0$ και συνεχής

$h(x)>0$ ή $h(x)<0$

$h(0)=e^0f(0)-0^2=1$

$h(x)>0$

$h(x)=x^2+1$

$e^xf(x)-x^2=x^2+1$

$e^xf(x)=2x^2+1$

$$\boxed{f(x)=\frac{2x^2+1}{e^x}}$$

7. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη.

$f(4)=3$ και [redacted] $\forall x>0$

Νδο $g(x)=f(x)\sqrt{x}$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρεί τύπο $f(x)$

Λύση

→ $g'(x)=f'(x)\sqrt{x}+f(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$g'(x)=\frac{2\sqrt{x}\,f'(x)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{f(x)}{2\sqrt{x}}$$

$g'(x) =$ [redacted] $/\, 2\sqrt{x} = 0$

$g'(x)=0$ άρα $g(x)=c$

άρα $f(x)\sqrt{x}=c$

$\underline{x=4}$

$f(4)\sqrt{4}=c$

$3\cdot 2=c$

$\underline{\underline{c=6}}$

$$f(x)=\frac{6}{\sqrt{x}}$$

9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f(0)=0$ παρ/μη $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ αλλά συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x<-1 \\ 3x^2-1, & x>-1 \end{cases}$$

Βρε τυπο $f(x)$

$\underline{x<-1}$

$f'(x) = -2$

$f'(x) = (-2x)'$

$f(x) = -2x + c$

$\underline{x>-1}$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = (x^3 - x)'$

$f(x) = x^3 - x + c$

$\underline{x=0}$

$f(0) = c$

$\underline{\underline{c=0}}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c, & x<-1 \\ x^3 - x, & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2 + c \\ &\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2 + c &= 0 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x<-1 \\ x^3 - x, & x \geq -1 \end{cases}$$

10. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \quad \forall x>0$ και $f(4)=15$

Βρείτε την $f(x)$

<u>Λύση</u>

$f'(x) = (\sqrt{x} + 3x)'$

$f(x) = \sqrt{x} + 3x + c$

<u>$x=4$</u>

$f(4) = 2 + 12 + c$

$15 = 14 + c$

$c = 1$

$\boxed{f(x) = \sqrt{x} + 3x + 1}$

11. $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$f(x) f'(x) = \frac{1}{2}$, $x > 0$ $\quad f(1) = 1$

Βρείτε την $f(x)$

<u>Λύση</u>

$2 f(x) f'(x) = 1$

$\left(f^2(x)\right)' = (x)'$

$f^2(x) = x + c$

<u>$x = 1$</u>

$f^2(1) = 1 + c$

$1 = 1 + c$

$c = 0$

$f^2(x) = x$

$f^2(x) = \sqrt{x}^{\,2}$

$|f(x)| = |\sqrt{x}|$

$|f(x)| = \sqrt{x}$

P.Td $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$\sqrt{x} = 0$

$x = 0$

x		0	
$f(x)$		0	+

$f(1) = 1$

$|\overset{+}{f(x)}| = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x}$

SOS

$(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$

$(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$

$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

12. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

και $(x-1) f'(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $f(2) = 11$

Βρείτε τύπο $f(x)$

$$f'(x) = \frac{(2x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \quad , x \neq 1$$

$$f'(x) = 2x+5$$

$$f'(x) = (x^2+5x)'$$

$$f(x) = x^2 + 5x + c \quad ; \quad \text{ΟΧΙ!}$$

Είναι σπασμένο το διάστημα.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+5x+c_1, & x<1 \\ x^2+5x+c_2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(2) = 4+10+c_2$$

$$11 = 14 + c_2$$

$$c_2 = -3$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(x) = x^2+5x-3}}$

Άρα f συνεχής

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2+5x+c_1 = 6+c_1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 6-3 = 3$$

$\Leftrightarrow$ $6+c_1 = 3$

$c_1 = -3.$

13. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $\quad f(1)=\ln 3$

$$f'(x)=4x^3 e^{-f(x)}$$

Βρες τον $f(x)$

$$f'(x)=4x^3\frac{1}{e^{f(x)}}$$

$$f'(x)e^{f(x)}=4x^3$$

$$\left(e^{f(x)}\right)'=\left(x^4\right)'$$

$$e^{f(x)}=x^4+c$$

$\underline{x=1}$

$$e^{f(1)}=1+c$$

$$e^{\ln 3}=1+c$$

$$3=1+c$$

$$c=2$$

$$e^{f(x)}=x^4+2$$

$$\underline{f(x)=\ln(x^4+2)}$$

14. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παρ/μη $\underline{\underline{f(x) > 0}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e^2$ και $f'(x) = 2x f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Βρείτε τύπο $f(x)$

$f'(x) = 2x f(x)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x$

$\Big(\ln(f(x)) \Big)' = (x^2)'$

$\ln f(x) = x^2 + c$

$\underline{x = 1}$

$\ln f(1) = 1 + c$

$\ln e^2 = 1 + c$

$2 = 1 + c$

$c = 1$

$\ln f(x) = x^2 + 1$

$f(x) = e^{x^2+1}$

19. $2f(x) + 4x\,f'(x) + (x^2+9)f''(x) = 0$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = \frac{1}{9}$

Νδο $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορες παρ/μη.

$$\underbrace{(x^2+9)f(x) - x}_{g(x)} = 0$$

$$g'(x) = 2x\,f(x) + (x^2+9)f'(x) - 1$$

$$g''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + (x^2+9)f''(x)$$

$$g''(x) = 2f(x) + 4xf'(x) + (x^2+9)f''(x) = 0$$

$$g''(x) = 0$$

$$g'(x) = c$$

$$2f(x) + (x^2+9)f'(x) - 1 = c$$

$\underline{x=0}$

$$2f(0) + 9f'(0) - 1 = c$$

$$9\tfrac{1}{9} - 1 = c \qquad c = 0$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = c$$

$$(x^2+9)\,f(x) - x = c$$

$$\underline{x=0}$$

$$c=0$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9}$$

Το Θεωρημα του Fermat.

1. Εστω $f(x) = 2a\ln x - \frac{\beta}{x} + 3a$ η οποια παρουσιαζει ακροτατο στο 1 το 5. Βρες a, β.

Αφου η f παρουσιαζει ακροτατο στο 1

το 1 ειναι εσωτερικο του $(0, +\infty)$

και η f παρ/μη στο 1

τοτε $\underline{\underline{f'(1) = 0}}$. και $\underline{\underline{f(1) = 5}}$

$$f'(x) = 2a \cdot \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

$$f'(1) = \boxed{2a + \beta = 0}$$

$$f(1) = \boxed{-\beta + 3a = 5}$$

$(+)$ $\quad 5a = 5$

$a = 1$

$\beta = -2$.

2 Εστω οτι $f(x) = e^x - \alpha x$

και $f(x) \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Νδο $\alpha = 1$.

Απο ανισοτητα σε ισοτητα.

• $f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

Ακροτατο στο 0

Fermat

$f'(0) = 0$.

$f'(x) = e^x - \alpha$

$f'(0) = 1 - \alpha = 0$

$\alpha = 1$

Επίλυση Εξισώσεων.

1. Έστω $f(x) = x^2 + \ln x - 1$, $x > 0$

- Να λυθεί η εξίσωση $(x^2+1)^2 + \ln(x^2+1) = 1$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$

$f'(x) > 0$

$f \nearrow$

$(x^2+1)^2 + \ln(x^2+1) - 1 = 0$

$f(x^2+1) = 0$

$f(x^2+1) = f(1)$

f 1-1

$x^2+1 = 1$

$x^2 = 0$

$x = 0$

2 Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = 1 - \ln x$

$$\underbrace{x^2 - 1 + \ln x}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$f(x) = f(1)$

f 1-1

$\underline{\underline{x = 1}}$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ γιατί $x > 0$

$f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1,

3 Έστω $f' \nearrow$. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x), \quad x \geq 0$$

$g(x) = f(x+3) - f(x)$

$g(|\eta\mu x|) = g(x)$

g 1-1

$|\eta\mu x| = x$

$|\eta\mu x| = |x|$

$\underline{x = 0}$

γιατί $|\eta\mu x| \leq |x|$

το "=" $x = 0$.

$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow$

• $x < x + 3 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x+3)$

$f'(x+3) - f'(x) > 0$

4 Έστω $f(x)=e^{-x}+x-1$.

Να λυθεί η εξίσωση $f(e^{x-1}-1)+f(x^5)=f(x^3)$

στο $(0,+\infty)$.

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$\to f'(x)=0 \Rightarrow -e^{-x}+1=0$

$e^{-x}=1$

$\boxed{x=0}$

x		0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f'(1)=-\frac{1}{e}+1$

Στο $(0,+\infty)$ η $f \nearrow$

$f(e^{x-1}-1)+f(x^5)-f(x^3)=0$

προφανής ρίζα: $x=1$.

• $x>1$

$\to x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow e^{x-1}>e^0 \Rightarrow e^{x-1}>1 \Rightarrow e^{x-1}-1>0$

$f(e^{x-1}-1)>0$

$\to x^3<x^5 \Rightarrow f(x^3)<f(x^5) \Rightarrow f(x^5)-f(x^3)>0$ $(+)$

$f(e^{x-1}-1)+f(x^5)-f(x^3)>0$.

- $x<1$

$\rightarrow x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow e^{x-1}<e^{0} \Rightarrow e^{x-1}<1$

$$e^{x-1}-1<0$$

$$f(e^{x-1}-1)<f(0)$$

$$f(e^{x-1}-1)<0$$

$+$

$\rightarrow x^5<x^3 \Rightarrow f(x^5)<f(x^3) \Rightarrow f(x^5)-f(x^3)<0$

$$\boxed{f(e^{x-1}-1)+f(x^5)-f(x^3)<0}$$

Άρα μοναδική ρίζα $x=1$.

5. $2x\,\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = \pi$ $\quad\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\underbrace{2x\,\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x - \pi}_{f(x)} = 0$$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ldots = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots = 0$

προφανεις ριζες $x=-\frac{\pi}{2}$ $\quad x=\frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = 2\cancel{\eta\mu x} + 2x\,\sigma\upsilon\nu x - 2\cancel{\eta\mu x}$$

$$f'(x) = 2x\,\sigma\upsilon\nu x$$
$(+)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Εχω δυο διαστηματα μονοτονιας αρα η $f(x)$ εχει το πολυ δυο ριζες.
Εχω βρει ηδη δυο, αρα εχει δυο.

6 $x^2 = 2^x$ στο $(0, +\infty)$

προφανείς ρίζες $x=2$, $x=4$

$\ln x^2 = \ln 2^x$

$2\ln x = x\ln 2$

$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{\ln 2}{2}$

$$\boxed{g(x) = \frac{\ln x}{x}}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$\to g'(x)=0 \to 1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$

$x = e$

x		e	
g'	$+$		$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

Η $g(x)$ έχει 2 διαστήματα μονοτονίας

άρα η εξίσωση $g(x) = \frac{\ln 2}{2}$ έχει το πολύ 2 ρίζες

έχω βρει ήδη 2 ρίζες άρα τέλος

7. $x \ln x = 2x - e$

$$\underbrace{x \ln x - 2x + e}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Στο $x = e$
έχω ελάχιστο

$\underline{\underline{x = e}}$

$f'(x) = \ln x + 1 - 2$

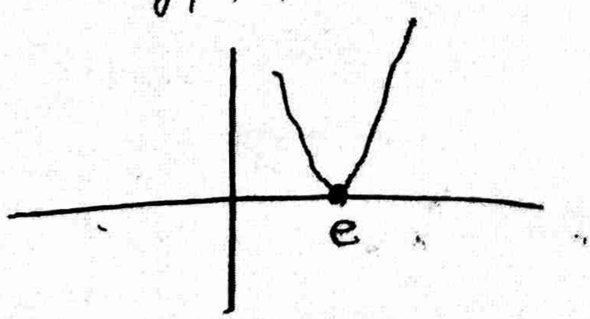
$f'(x) = \ln x - 1$

$\rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = e}}$

x		e	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geq f(e)$

$f(x) \geq 0$



8 $x^2+4x+5 = 5e^x$

$$\frac{x^2+4x+5}{e^x} = 5$$

$$\underbrace{(x^2+4x+5)e^{-x} - 5}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(x) = f(0)$$

f 8 1-1

$$\underline{\underline{x=0}}$$

$$f'(x) = (2x+4)e^{-x} - (x^2+4x+5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x+4-x^2-4x-5)\,e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2-2x-1)\,e^{-x}$$

$$f'(x) = -(x^2+2x+1)\,e^{-x}$$

$$\boxed{f'(x) = -(x+1)^2\,e^{-x}} \leq 0$$

$f\downarrow$

17

Απόδειξη ανισοτήτων.

1. Νδο $e^x \geq 1-\sqrt{x}$ $\quad \forall x \geq 0$

$$\underbrace{e^x - 1 + \sqrt{x}}_{f(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

$f \nearrow$

Άρα Αν $x \geq 0 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0)$

$$f(x) \geq 0$$

$$e^x - 1 + \sqrt{x} \geq 0$$

$$e^x \geq 1 - \sqrt{x}$$

2 Νδο $e^x \geq x+1$. $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$\rightarrow e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

x		0	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(x) \geq f(0)$$

$$f(x) \geq 0$$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq x + 1$$

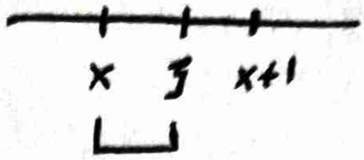
Ανισότητες

ΘΜΤ

3 Έστω $f' \nearrow$

i) Ν.δ.ο. $f'(x) + f(x) < f(x+1)$

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

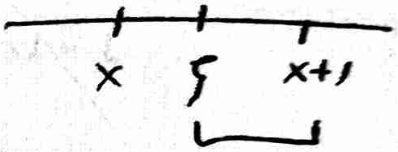


$$x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x)$$

$$\boxed{f'(x) + f(x) < f(x+1)}$$

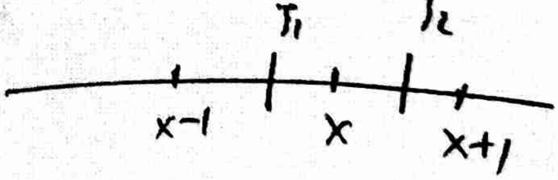
ii) Ν.δ.ο. $f(x+1) - f'(x+1) < f(x)$



$$\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1)$$

$$\boxed{f(x+1) - f(x) < f'(x+1)}$$

iii) Ν.δ.ο. $2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$



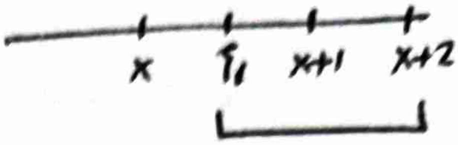
$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x-(x-1)} = f(x) - f(x-1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+1) - f(x)$$

$$2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$$

iv). Νδο $f(x+1) < f'(x+2) + f(x)$



$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

$$\xi_1 < x+2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(x+2)$$

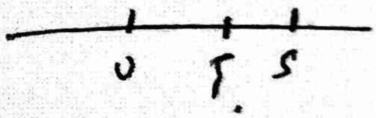
$$f(x+1) - f(x) < f'(x+2)$$

$$\boxed{f(x+1) < f'(x+2) + f(x)}$$

v) Έστω ότι $2 \leq f'(x) \leq 4$ και

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(0) = 1$

Νδο $11 \leq f(5) \leq 21$.



$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(0)}{5-0} = \frac{f(5) - 1}{5}$$

όμως $2 \leq f'(x) \leq 4$

$$2 \leq f'(\xi) \leq 4$$

$$2 \leq \frac{f(5) - 1}{5} \leq 4$$

$$10 \leq f(5) - 1 \leq 20 \Rightarrow \underline{\underline{11 \leq f(5) \leq 21}}$$

4. $f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x>0$

Νδο $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$

Μονοτονία

$$f'(x) = \frac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-4}{x^2} < 0 \qquad f \downarrow$$

$e < \pi$

$f \downarrow$

$f(e) > f(\pi)$

$$\frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{e} < \frac{4-\pi^2}{4-e^2}$$

5. Εστω $f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 + 13x - 21$

Να βρεθει η κυρτοτητα της συναρτησης νδο $f(x) \geq 9x - 15 \ \forall x > 0$

$f'(x) = 6e^x + 3x^2 - 6x + 13$

$f''(x) = 6e^x + 6x - 6 = 6(e^x + x - 1)$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = 6e^x + 6 > 0$

x		0	
f'''	+		+
f''	↗ −	0	+ ↗
f	∩		∪

$x < 0 \Rightarrow f''(x) < f''(0) \Rightarrow f''(x) < 0$

$x > 0 \Rightarrow f''(x) > f''(0) \Rightarrow f''(x) > 0$

εφαπτομενη στο 0

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - (-15) = 19x$

$\boxed{y = 19x - 15}$

$\forall x > 0$

η f κυρτη

αρα $f(x) \geq 19x - 15$

5. Έστω $f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 + 13x - 21$

Να βρεθεί η κυρτότητα του

στην συνάρτηση νδο $f(x) \geq 19x - 15 \quad \forall x > 0$

$$f'(x) = 6e^x + 3x^2 - 6x + 13$$

$$f''(x) = 6e^x + 6x - 6 = 6(e^x + x - 1) \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 6e^x + 6 > 0$$

x		0	
f'''	+		+
f''	$\nearrow$ −	0	+ $\nearrow$
f	$\cap$		$\cup$

$x < 0 \Rightarrow f''(x) < f''(0) \Rightarrow f''(x) < 0$

$x > 0 \Rightarrow f''(x) > f''(0) \Rightarrow f''(x) > 0$

εφαπτόμενη στο 0

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-15) = 19x$$

$$\boxed{y = 19x - 15}$$

$\forall x > 0$

η f κυρτή

άρα $f(x) \geq 19x - 15$

Μελετη χαραξη

Να μελετηθει πληρως η συναρτηση και να γινει η γραφικη της παρασταση.
Τελος να βρεθει το πληθος ριζων της εξισωσης $f(x)=\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}.$$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+5)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-5}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

Λυνω την εξισωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0$

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \boxed{x=3} \quad \boxed{x=-1}$$

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$

Η $f(x)$ γν. αυξουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[3,+\infty)$.

Η $f(x)$ γν. φθινουσα στο $[-3, 1)$.

Το σημειο $A(-1,-4)$ ειναι τοπικο μεγιστο.

Το σημειο $B(3,4)$ ειναι τοπικο ελαχιστο.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)\,2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{2x^2} + \cancel{4x} + 6}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

x		1	
$f''(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	∩	‖	∪

Η $f(x)$ κοιλη στο $(-\infty, 1)$

Η $f(x)$ κυρτη στο $(1, +\infty)$.

Δεν εχει σημεια καμπης.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+5}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x^2-2x+5)\frac{1}{x-1} = 4\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+5}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x^2-2x+5)\frac{1}{x-1} = 4(+\infty) = +\infty$$

Η ευθεια $\varepsilon: x=1$ ειναι κατακορυφη ασυμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+5}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+5}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^2-x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+5}{x-1}-x\right) =$$

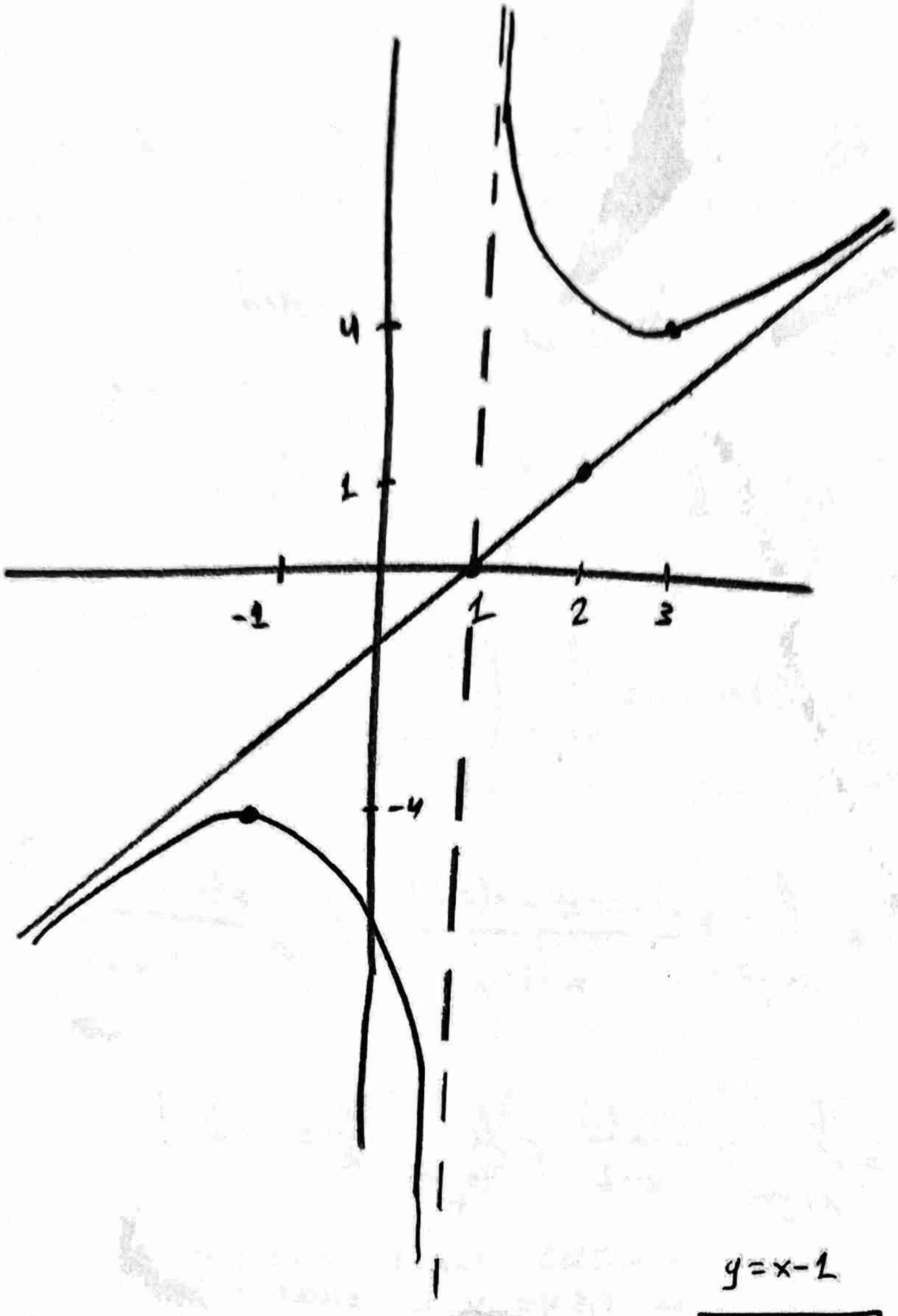
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+5-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+5-x^2+x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x+5}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x} = -1.$$

Η ευθεία εξ. $y = x-1$ είναι πλάγια

ασύμπτωτη στο $\pm\infty$

Γραφική παράσταση της $f(x)$.



$y = x - 1$

x	1	2
y	0	1

Η εξισωση $f(x)=\lambda$, για τις διαφορες τιμες του λ εχει το ακολουθο πληθος ριζων.

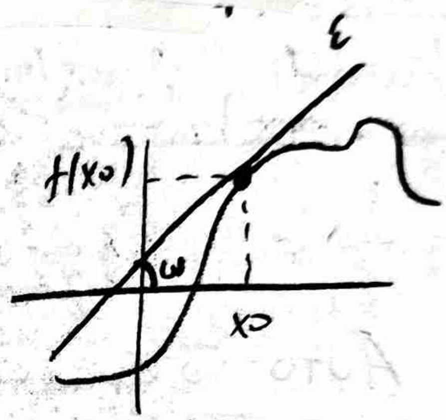
1. Αν $\lambda < -4$ εχει δυο λυσεις.
2. Αν $\lambda = -4$ εχει μια λυση.
3. Αν $\lambda = 4$ εχει μια λυση
4. Αν $\lambda > 4$ εχει δυο λυσεις.

Το συνολο τιμων της $f(x)$ ειναι

$$\Sigma T_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty).$$

Εφαπτομενη

$\boxed{\text{εφαπτομενη στο } x_0 \in \mathbb{R}}$



$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

1. $f'(x_0)$: κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης
2. Αν $f'(x_0) > 0$ η ε σχηματίζει οξεία γωνία με $x'x$
3. Αν $f'(x_0) < 0$ η ε σχηματίζει αμβλεία γωνία με $x'x$
4. $f'(x_0) = εφ\,\hat{\omega}$
5. $f'(x_0) = 0 \iff \varepsilon \parallel x'x$

$\boxed{\text{Προσοχη}}$

Αν η $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$ ειναι εφαπτομενη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ τοτε

$$\begin{cases} f'(x_0)=\alpha \\ f(x_0)=\alpha x_0+\beta \end{cases}$$

<u>π.χ</u>

Η ευθεια $\varepsilon: y=2x-4$ εφαπτεται της C_f στο $A(-2, f(-2))$

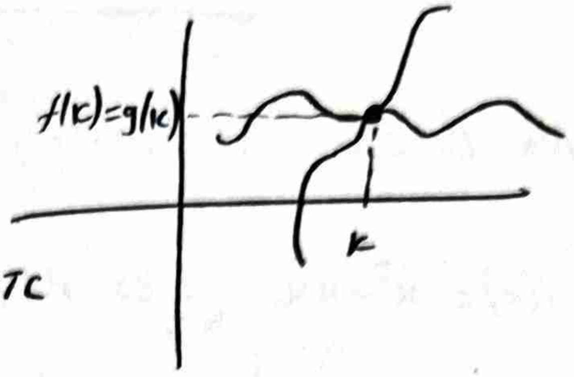
Αυτο σημαινει οτι

$$\boxed{f'(-2)=2}$$

$$f(-2)=2(-2)-4=-4-4=-8$$

$$\boxed{f(-2)=-8}$$

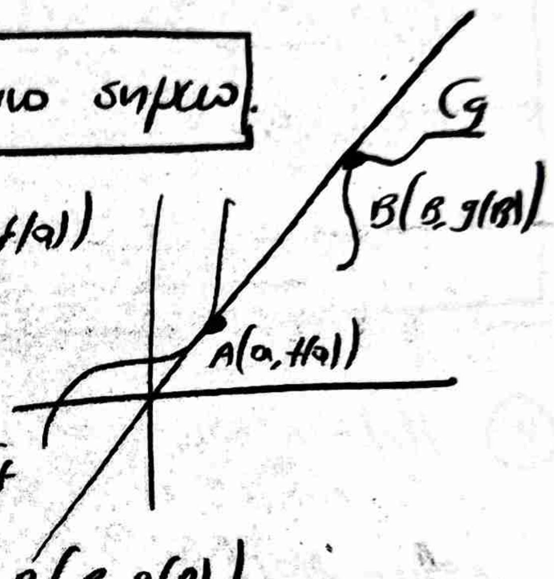
κοινη εφαπτομενη σε κοινο σημειο



Για να υπαρχει κοινη εφαπτομενη σε κοινο σημειο πρεπει να υπαρχει $κ \in R$ ωστε

$$\begin{cases} f(κ)=g(κ) \\ f'(κ)=g'(κ) \end{cases}$$

κοινη εφαπτομενη σε μη κοινο σημειο.



Η εφαπτομενη της C_f στο $A(α, f(α))$

$ε: y - f(α) = f'(α)(x-α)$

$y = f'(α)x + f(α) - αf'(α)$

Η εφαπτομενη της C_g στο $B(β, g(β))$

$ε: y - g(β) = g'(β)(x-β)$

$y = g'(β)x + g(β) - βg'(β)$

Προκειται για την ιδια εφαπτομενη ομως.

Αρα $\begin{cases} f'(α)=g'(β) \\ f(α)-αf'(α) = g(β)-βg'(β). \end{cases}$

1 Να βρεθει η εφαπτομενη της C_f στο M

ⓐ $f(x) = x^2 - 4x$ στο $M(3, f(3))$

$\varepsilon : y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-(-3) = 2(x-3)$

$y+3 = 2x-6$

$$\boxed{\varepsilon : y = 2x-9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 = 9-12 = -3 \\ \bullet\ f'(x) = 2x-4 \\ \bullet\ f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 6-4 = 2 \end{array}}$$

ⓑ $f(x) = x^3 - 1$ στο $M(0, f(0))$

$\varepsilon : y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-(-1) = 0(x-0)$

$$\boxed{\varepsilon : y = -1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 1 = -1 \\ f'(x) = 3x^2 \\ f'(0) = 0 \end{array}}$$

οριζοντια εφαπτομενη.

γ) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \leq 1 \\ 2x^2+1, & x > 1 \end{cases}$ στο $M(1, f(1))$

$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$

$\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+2}{1} = 4$

$\cdot \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2+1-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-2}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 4$.

άρα $f'(1) = 4$

Συνεπώς $y - 3 = 4(x-1)$

$y - 3 = 4x - 4$

$\boxed{\varepsilon: y = 4x - 1}$

2 Δινεται η συναρτηση $f(x) = -x^2+3x$

Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης

(α) η οποια εχει συντελεστη διευθυνσης 5.

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ σημειο επαφης

$$\varepsilon: y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa)$$

πρεπει $f'(\kappa) = 5 \Leftrightarrow -2\kappa+3 = 5 \Leftrightarrow -2\kappa = 2$

$\kappa = -1$

$\boxed{f'(x) = -2x+3}$

Αρα $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$

$y + 4 = 5(x+1)$

$\boxed{\varepsilon: y = 5x+1}$

(β) η οποια ειναι παραλληλη στην ευθεια

$J: y = x+5$.

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ σημειο επαφης

$$\varepsilon: y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa).$$

αφου $\varepsilon \parallel \eta$ $\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta$ $\Leftrightarrow f'(\kappa) = 1$.

$-2\kappa + 3 = 1$

$-2\kappa = -2$

$\kappa = 1$,

$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$y - 2 = 1 \cdot (x-1)$

$\boxed{\varepsilon: y = x+1}$

(β) η οποια ειναι καθετη στην ευθεια

$\eta: x - 3y + 12 = 0$.

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ σημειο επαφης.

$\varepsilon: y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa)$

Αφου $\varepsilon \perp \eta$ $\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1$ $\Leftrightarrow f'(\kappa) \cdot \left(\frac{-1}{-3}\right) = -1$

$f'(\kappa) \cdot \frac{1}{3} = -1$ $\Leftrightarrow f'(\kappa) = -3$. $\Leftrightarrow -2\kappa + 3 = -3$

$-2\kappa = -6$

$\kappa = 3$

$\varepsilon: y - f(3) = f'(3)(x-3)$

$y - 0 = -3(x-3)$ $\boxed{\varepsilon: y = -3x+9}$

(δ) η οποια ειναι παραλληλη στον $x'x$.

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ το σημειο επαφης

$\varepsilon: y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa)$.

Πρεπει $f'(\kappa)=0 \Leftrightarrow -2\kappa+3=0 \Leftrightarrow 3=2\kappa$

$\kappa=\frac{3}{2}$.

αρα $\varepsilon: y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})$

$y - \frac{9}{4} = 0(x-\frac{3}{2})$

$\boxed{\varepsilon: y = \frac{9}{4}}$

(ε) η οποια σχηματιζει $135°$ με τον $x'x$

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ το σημειο επαφης

$\varepsilon: y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa)$.

Πρεπει $f'(\kappa) = \varepsilon\varphi 135 \Leftrightarrow -2\kappa+3=-1$

$\Leftrightarrow -2\kappa=-4 \Leftrightarrow \kappa=2$

$\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y - 2 = -1(x-2) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon: y=-x+4}$

3 Δινεται $f(x) = x^2+6x$. Να βρεθει η εφαπτομενη η οποια διερχεται (αγεται) απο το σημειο $A(-3,-10)$.

Εστω $M(\kappa, f(\kappa))$ το σημειο επαφης

$$\varepsilon: y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa) \longrightarrow A(-3,-10)$$

$$-10 - f(\kappa) = f'(\kappa)(-3-\kappa)$$

$$-10 - (\kappa^2+6\kappa) = (2\kappa+6)(-3-\kappa)$$

$$-10-\kappa^2-\cancel{6\kappa} = -\cancel{6\kappa} - 2\kappa^2 - 18 - 6\kappa$$

$$\kappa^2 + 6\kappa + 8 = 0 \qquad \kappa=-2 \qquad \kappa=-4$$

$$\varepsilon_1: y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$$

$$y + 8 = 2(x+2) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1: y = 2x-4}$$

$$\varepsilon_2: y - f(-4) = f'(-4)(x+4)$$

$$y + 8 = -2(x+4) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2: y = -2x-16}$$

4 Δινεται η συναρτηση $f(x)=x^3+ax^2+\beta x+3$

Η ευθεια $\varepsilon: y=10x-9$ εφαπτεται της C_f

στο σημειο της $M(2, f(2))$

(α) Να βρεθουν τα a, β.

Ισχυει οτι $\begin{cases} f'(2)=10 \\ f(2)=10\cdot 2-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2)=10 \\ f(2)=11 \end{cases}$

$f'(x)=3x^2+2ax+\beta$

αρα $f'(2)=12+4a+\beta=10 \Leftrightarrow \boxed{4a+\beta=-2}$

επισης $8+4a+2\beta+3=11$

$4a+2\beta=0 \Leftrightarrow \boxed{2a+\beta=0}$

$$\begin{cases} 4a+\beta=-2 \\ 2a+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+\beta=-2 \\ -2a-\beta=0 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} 2a=-2 \\ \boxed{a=-1} \\ \boxed{\beta=2} \end{array}$$

$$\boxed{f(x)=x^3-x^2+2x+3}$$

(B) Νδο η εφ $y=3x+2$ εφαπτεται της C_f

Αρκει νδο $\exists\, \kappa \in \mathbb{R}$ τ.ω $\begin{cases} f'(\kappa)=3 \\ f(\kappa)=3\kappa+2 \end{cases}$

εφοσον $f(x)=x^3-x^2+2x+3$

$f'(x)=3x^2-2x+2$

Αρα $\begin{cases} 3\kappa^2-2\kappa+2=3 \\ \kappa^3-\kappa^2+2\kappa+3=3\kappa+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa^2-2\kappa-1=0 \\ \kappa^3-\kappa^2-\kappa+1=0 \end{cases}$

- $3\kappa^2-2\kappa-1=0$

$\Delta=4+12=16$

$\kappa=\dfrac{2\pm4}{6}$ → 1, $-\dfrac{1}{3}$

$\kappa=1$ $\quad$ $\kappa=-\dfrac{1}{3}$

- $\kappa^3-\kappa^2-\kappa+1=0$

$\kappa^2(\kappa-1)-(\kappa-1)=0$

$(\kappa-1)(\kappa^2-1)=0$

$\kappa=1$ $\quad$ $\kappa=1$ $\quad$ $\kappa=-1$

Παρατηρω οτι για $\kappa=1$ επαληθευεται το συστημα εξισωσεων. Αυτο σημαινει οτι η ε1 εφαπτεται της C_f στο $A(1, f(1))$.

5 Δινεται $f(x) = x^2 + \lambda x + 2$ και $\varepsilon: y = -x + \lambda$

Να βρεις τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ωστε η ε να εφαπτεται

της C_f

Πρεπει να υπαρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ωστε $\begin{cases} f'(\kappa) = -1 \\ f(\kappa) = -\kappa + \lambda \end{cases}$

$f'(x) = 2x + \lambda$

αρα $\begin{cases} 2\kappa + \lambda = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1 - 2\kappa} \\ \kappa^2 + \lambda\kappa + 2 = -\kappa + \lambda \end{cases}$

$\kappa^2 - (1 + 2\kappa)\kappa + 2 = -\kappa - 1 - 2\kappa$

$\kappa^2 - \kappa - 2\kappa^2 + 2 = -3\kappa - 1$

$-\kappa^2 - \kappa + 2 = -3\kappa - 1$

$-\kappa^2 + 2\kappa + 3 = 0$

$\kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$

$\boxed{\kappa = 3}$ $\quad$ $\boxed{\kappa = -1}$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

$\boxed{\lambda = -7}$ $\quad$ $\boxed{\lambda = 1}$.

6 Δινονται οι συναρτησεις

- $f(x) = a\ln x + Bx^2$
- $g(x) = x^2 + 2Bx + a$

Βρει τα $a, B \in R$ ωστε C_f, C_g να εχουν κοινη εφαπτομενη στο κοινο τους σημειο με τετμημενη $x_0 = 1$.

Απαιτω $\begin{cases} f'(1) = g'(1) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \cancel{2B} = 2 + \cancel{2B} \Rightarrow \boxed{a=2} \\ B = 1 + 2B + a \end{cases}$

$B = 1 + 2B + 2$

$\boxed{-3 = B}$

$f'(x) = \frac{a}{x} + 2Bx$

$g'(x) = 2x + 2B$

7. Δινονται οι συναρτησεις

- $f(x) = x^2-3x+4$
- $g(x) = x^2+x+4$

(α) ΝΔΟ C_f, C_g στο κοινο τους σημειο δεν εχουν κοινη εφαπτομενη

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-3x+4=x^2+x+4 \Leftrightarrow -3x=x$

$4x=0$

$x=0$

Αρκει νδο $f'(0)\neq g'(0)$

$$\boxed{\begin{gathered} f'(x)=2x-3 \\ g'(x)=2x+1 \end{gathered}}$$

Αρα $f'(0)=-3$

$g'(0)=1$.

(β) Να βρεθουν οι κοινες εφαπτομενες των C_f, C_g

Αρκει να βρεθουν α, β ωστε

$$\begin{cases} f'(\alpha)=g'(\beta) \\ f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)= g(\beta)-\beta g'(\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-3=2\beta+1 \\ \alpha^2-3\alpha+4-2\alpha^2+3\alpha=\beta^2+\beta+4-2\beta^2-\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta=2 \\ -\alpha^2+4=-\beta^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=2 \\ \alpha^2-\beta^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\alpha=2+\beta} \\ (2+\beta)^2-\beta^2=0 \end{cases}$$

$$4+4\beta+\beta^2-\beta^2=0$$

$$\boxed{\beta=-1}$$

$$\boxed{\alpha=1}$$

Συνεπως $A(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδη $A(1,2)$.

και η κοινη εφαπτομενη ειναι

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-2=-(x-1)$$

$$\boxed{y=-x+3}$$

κλαδωτη

Δινεται $f(x)=\begin{cases} x^2e^x, & x\le 0 \\ x^2-2x, & x>0 \end{cases}$

1. Ειναι συνεχης στο 0;

2. Ειναι συνεχης στο R;

3. Να εξετασετε αν ικανοποιουνται οι προυποθεσεις

    i) του Bolzano στο $[-1,1]$

    ii) του ΘΕΤ στο $[-1,1]$

    iii) του ΘΜΕΤ στο $[-1,1]$.

4. Ειναι παρ/μη στο 0;

5. Ειναι παραγωγισιμη στο R;

6. Να εξετασετε αν ικανοποιουνται οι προυποθεσεις

    i) του Rolle στο $[-1,1]$

    ii) του ΘΜΤ στο $[-1,1]$.

    iii) του Rolle στο $[0,2]$

    iv) του ΘΜΤ στο $[0,3]$

7. Να βρεθει σημειο $M(\xi, f(\xi))$, $\xi \in (0,3)$ ωστε η εφαπτομενη της C_f στο M να ειναι παραλληλη στην ευθεια AB οπου $A(0, f(0))$ και $B(3, f(3))$.

8. Κρισιμα σημεια.

9. Μονοτονια - ακροτατα.

10. Συνολο τιμων.

11. Νδο η εξισωση $e^3 f(x) = 4$ εχει ακριβως 2 αρνητικες και 1 θετικη ριζα.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x \le 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$$

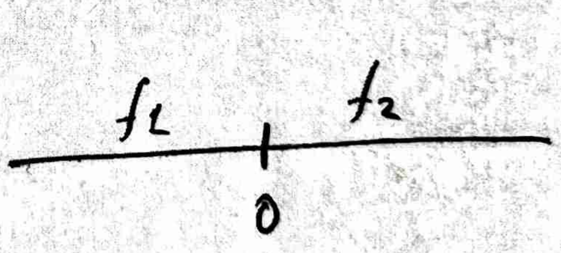
1. Είναι συνεχής στο 0;

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} x^2 e^x = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$f(0) = 0$ άρα αφού $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

η f συνεχής στο 0!

2. Η f συνεχής



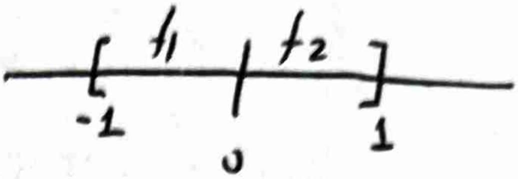
στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ως π.σ.σ. και αφού η f συνεχής στο 0

τότε f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. i) Bolzano στο $[-1,1]$

Αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $[-1,1]$



Επίσης $f(-1) = (-1)^2 e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$

$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 < 0$

Άρα $f(-1)f(1) = -\frac{1}{e} < 0$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Bolzano στο $[-1,1]$

ii). ΘΕΤ στο $[-1,1]$

- Η f συνεχής στο $[-1,1]$

$f(-1) \neq f(1)$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ΘΕΤ

iii) ΘΜΕΤ στο $[-1,1]$

Η f συνεχής στο $[-1,1]$ άρα ικανοποιείται το ΘΜΕΤ στο $[-1,1]$;

4. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2e^x - 0}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2e^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-2x-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x-2)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x-2 = -2$

Η f <u>όχι</u> παρ/μη στο 0.

5. Η f παρ/μη στο

$(-\infty,0)$ και $[0,+\infty)$ ως π.π.σ

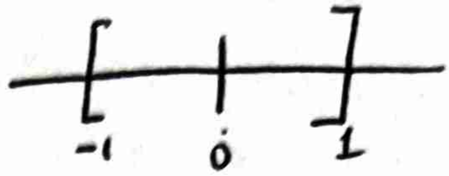
όμως <u>δεν</u> είναι παρ/μη στο 0

άρα <u>δεν</u> είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$.

6. i) Rolle $[-1,1]$

H f συνεχής $[-1,1]$

Αφού η f δεν είναι



παρ/μη στο 0 δεν είναι

παρ/μη στο $[-1,1]$

άρα δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις

του Rolle στο $[-1,1]$

ii). ΘΜΤ $[-1,1]$

Αφού η f δεν είναι παρ/μη στο 0

δεν είναι ούτε στο $[-1,1]$ άρα

δεν ισχύει το ΘΜΤ.

iii) Rolle στο $[0,2]$

H f συνεχής $[0,2]$

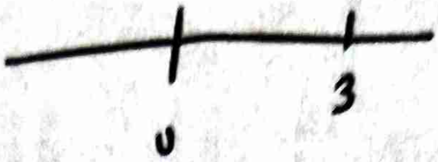
H f παρ/μη στο $(0,2)$ ως π.π.σ

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(2)=0 \end{array}\right\} f(0)=f(2)$$ άρα ισχύει ο Rolle

στο $[0,2]$.

iv). ΘΜΤ στο $[0,3]$

Η f συνεχής στο $[0,3]$



Η f παρ/μη στο $(0,3)$

ω/ π.π.σ

Άρα ισχύει το ΘΜΤ στο $[0,3]$

7. $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \parallel \varepsilon_{AB}$

$A(0, f(0))$

Πρέπει $f'(\xi) = \lambda_{AB}$ $\qquad B(3, f(3))$

$$f'(\xi) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$\forall x \in (0,3)$

$f(x) = x^2 - 2x$

$$f'(\xi) = \frac{3 - 0}{3}$$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(\xi) = 1.$

$2\xi - 2 = 1$

$2\xi = 3$

$\xi = \frac{3}{2}$ $\qquad M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

8. Αφού η f <u>δεν</u> είναι παρ/μη στο 0

Το 0 είναι κρίσιμο σημείο.

<u>$x<0$</u>

$f_1(x) = x^2 e^x$

$f_1'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

$f_1'(x) = e^x(2x+x^2)$

$\longrightarrow f_1'(x) = 0$

$e^x(2x+x^2) = 0$

$e^x = 0$ ή $2x+x^2 = 0$

Άτοπο

$x(2+x) = 0$

$\cancel{x=0}$ $\quad$ $x=-2$

Κ.Σ

<u>$x>0$</u>

$f_2(x) = x^2-2x$

$f_2'(x) = 2x-2$

$\longrightarrow f_2'(x) = 0$

$2x-2=0$

$2x=2$

$x=1$

Κ.Σ.

9.

x		-2		0		1	
f_1'	$+$	0	$-$	0	$\cancel{+}$		$\cancel{+}$
f_2'	$\cancel{+}$		$\cancel{+}$		$-$	0	$+$
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$A\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ Τ.Μ

$B(1,-1)$ Τ.Ε.

10.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2e^x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^x}} =$$

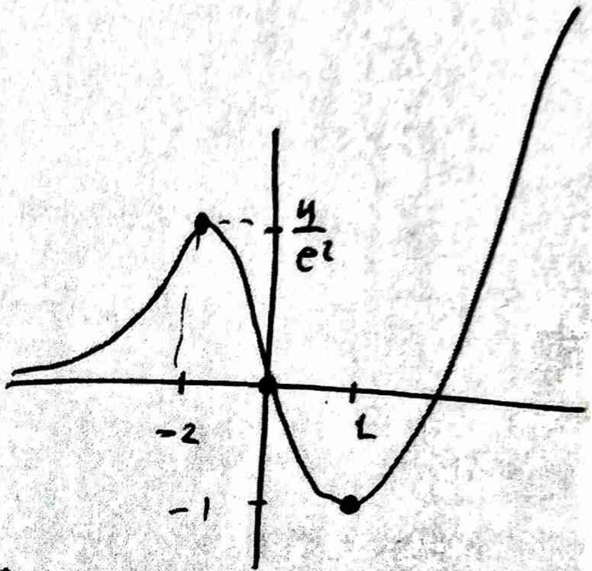
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

$f(-2) = \frac{4}{e^2}$

$f(1) = -1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 2x$$

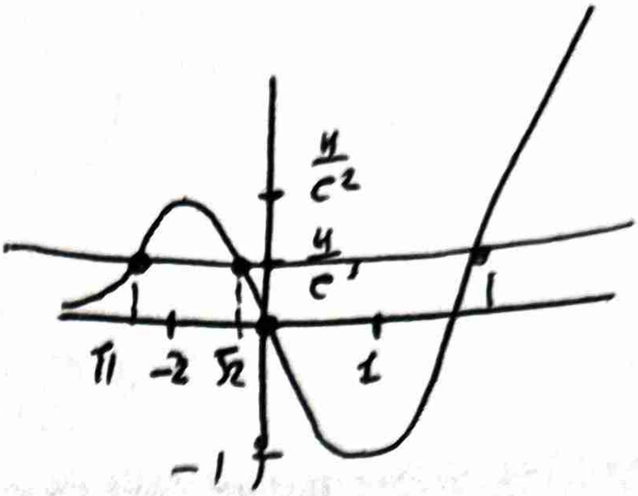
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$



$\Sigma T_f = [-1, +\infty)$.

11. $e^3 f(x) = 4$

$$f(x) = \frac{4}{e^3}$$



$x < -2$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $ΣΤ_f = \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$

Το $\frac{4}{e^3} \in ΣΤ_f$

άρα $\exists!\ ξ_1 < 0$

τ.ω $f(ξ_1) = \frac{4}{e^3}$

$-2 \leq x \leq 1$

- f συνεχής
- $f \searrow$
- $ΣΤ_f = \left[-1, \frac{4}{e^2}\right]$

Το $\frac{4}{e^3} \in ΣΤ_f$

άρα $\exists!\ ξ_2$

τ.ω $f(ξ_2) = \frac{4}{e^3}$

$ξ_2 < 0$

γιατί $f \searrow$

$f(ξ_2) > f(0)$

$\frac{4}{e^3} > 0$ ✓

$x > 1$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $ΣΤ_f = [-1, +\infty)$

Το $\frac{4}{e^3} \in ΣΤ_f$

άρα $\exists!\ ξ_3 > 0$

τ.ω $f(ξ_3) = \frac{4}{e^3}$

Σύνθεση

Έστω $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\frac{1}{x}$

$D_f=[1,+\infty)$ $\qquad$ $D_g=\mathbb{R}^*$.

Να βρεθούν οι $f\circ g$ και $g\circ f$.

Λύση

- $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{\frac{1}{x}-1}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$.

$x\neq 0$ $\qquad$ $\frac{1}{x}\geq 1$

$\frac{1}{x}-1\geq 0$

$\frac{1-x}{x}\geq 0$.

x		0		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-x}{x}$	$-$		$+$		$-$

$x\in(0,1]$

$D_{f\circ g}=(0,1]$

- $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$x\in D_f$ και $f(x)\in D_g$

$x\geq 1$ $\qquad$ $\sqrt{x-1}\neq 0$

$x-1\neq 0$

$x\neq 1$

$D_{g\circ f}=(1,+\infty)$.

Εστω οτι θελω νδο μια συναρτηση ειναι 1-1.

(α) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$

Εστω $f(x_1) = f(x_2)$

$$\ln\left(\frac{x_1-2}{x_1-1}\right) = \ln\left(\frac{x_2-2}{x_2-1}\right)$$

$$\frac{x_1-2}{x_1-1} = \frac{x_2-2}{x_2-1}$$

$$(x_1-2)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2-2)$$

$$\cancel{x_1x_2} - x_1 - 2x_2 + \cancel{2} = \cancel{x_1x_2} - 2x_1 - x_2 + \cancel{2}$$

$$-x_1 = -x_2$$

$$x_1 = x_2$$

f 1-1

(β) $f(x) = e^x + x - 1$

$f'(x) = e^x + 1 > 0$

$f \nearrow$ αρα f 1-1.

Αντιστροφη

Νδο η $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \neq 0$

αντιστρεφεται και να βρω

την αντιστροφη $f^{-1}(x)$.

Λυση

Εστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}+1}{e^{x_1}-1} = \dfrac{e^{x_2}+1}{e^{x_2}-1}$

$$(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1) = (e^{x_2}+1)(e^{x_1}-1)$$

$$\cancel{e^{x_1}e^{x_2}} - e^{x_1} + e^{x_2} \cancel{-1} = \cancel{e^{x_2}e^{x_1}} - e^{x_2} + e^{x_1} \cancel{-1}$$

$$2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$x_1 = x_2$ αρα f 1-1

αρα αντιστρ.

$f(x) = y$

$$y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

1o checkpoint

$y(e^x-1) = e^x+1$

$ye^x - y = e^x + 1$

$ye^x - e^x = 1+y$

$e^x(y-1) = 1+y$

$$e^x = \frac{1+y}{1-y}$$

2o checkpoint

πρεπει $y \neq 1$

$$x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

3o checkpoint

$$\frac{1+y}{1-y} > 0$$

$y \in (-1,1)$

y		-1	1
$1+y$	$-$	$+$	$+$
$1-y$	$+$	$+$	$-$
$\frac{1+y}{1-y}$	$-$	$+$	$-$

Τελος 4o checkpoint

Αφου $x \neq 0$

$$\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} \neq 1 \Rightarrow$$

$\cancel{1}+y \neq \cancel{1}-y \Rightarrow 2y \neq 0$

$y \neq 0$

Τελικα

$D_{f^{-1}} = (-1,0) \cup (0,1)$.

Επιλυση Βασικων οριων.

(α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-1}{x^2+4} = \dfrac{8-8-1}{8} = -\dfrac{1}{8}.$

(β) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-4x}{2x} = \dfrac{12-8}{4} = 1$

(γ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-1}{x^2-4} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-1}{x+2} \cdot \dfrac{1}{x-2}$

x	2
$x-2$	$-\ 0\ +$

$= \dfrac{-1}{4} \cdot \infty$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-2x^2-1}{x+2} \cdot \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}(-\infty) = +\infty$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-2x^2-1}{x+2} \cdot \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}(+\infty) = -\infty$

(δ) Το οριο δεν υπαρχει,

(δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-1} \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x \, \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1} =$

$= 1\cdot(-\infty) = -\infty$.

αφού $\sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$

(ε) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-2x^2+4x-1}{x^4-2x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^4} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

(ζ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}^{\,2}-3^2}{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$

$= \dfrac{4}{6}$.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+4} + x \right) =$

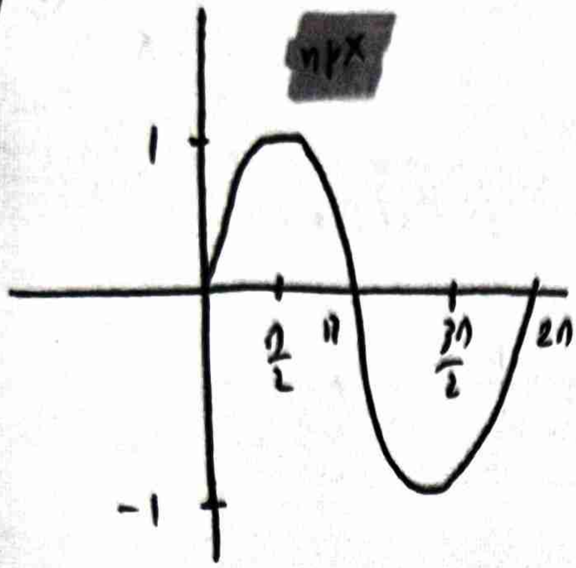
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4} + x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4} - x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4} - x}$$

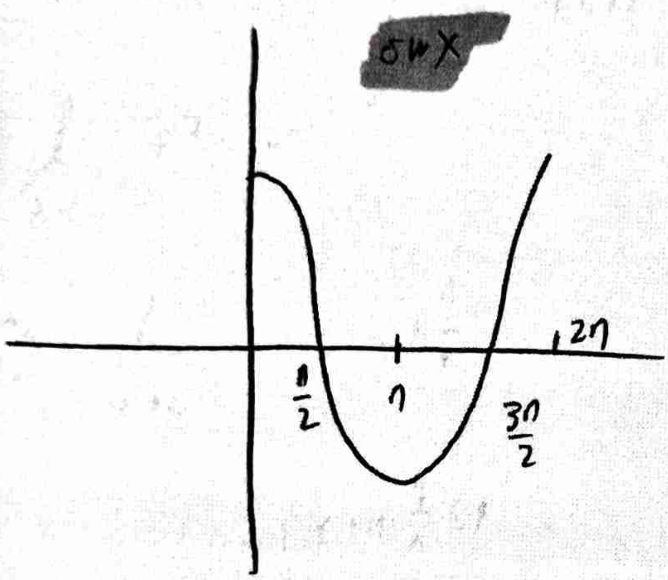
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x^2+2x+4}}^{\cancel{2}} - x^2}{\sqrt{x^2+2x+4} - x} = \lim_{x \to -\infty} \boxed{\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4} - x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2 + \frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} - x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(2 + \frac{4}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - \cancel{x}} =$$

$$= \frac{2}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1$$


1
-1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

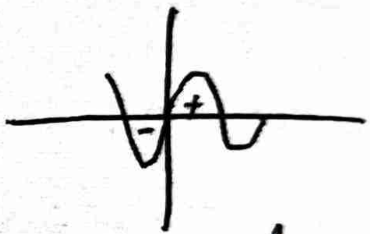

2π
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

(θ) $\lim_{x \to 0} x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} = 0$.

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \leq x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 \\ &\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{Από K.Π} \lim_{x \to 0} x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} = 0$$



Δεν γνωρίζω το πρόσημο του ημx κοντά στο 0

(ι) $\lim_{x \to 0} \eta\mu x \, \eta\mu \frac{1}{x}$

$$-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left|\eta\mu \frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$|\eta\mu x| \left|\eta\mu \frac{1}{x}\right| \leq |\eta\mu x|$$

$$\left|\eta\mu x \, \eta\mu \frac{1}{x}\right| \leq |\eta\mu x|$$

$$-|\eta\mu x| \leq \eta\mu x \, \eta\mu \frac{1}{x} \leq |\eta\mu x|$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} -|\eta\mu x| = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} |\eta\mu x| = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Άρα Κ.Π.} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} \eta\mu x \, \eta\mu\dfrac{1}{x} = 0 .\end{array}$$

(κ) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + \ln x}{x^2+x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + \frac{1}{x}}{2x+1}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{x^2}}{2} = +\infty$$

(λ) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\ln(x+1) - x\,\sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x+1} - \left(\sigma\upsilon\nu x + x(-\eta\mu x)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x+1} - \sigma\upsilon\nu x + x\,\eta\mu x}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{-\frac{1}{(x+1)^2} + \eta\mu x + \eta\mu x + x\,\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{-1}$$

$$= -1 .$$

(P) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$

$0 \cdot \infty$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} -x = 0$$

(V) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - \ln x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \dfrac{\ln x}{e^x}\right)$

$$= +\infty(1-0) = +\infty.$$

$+\infty - \infty$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0.$$

(5) $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\ln x}} =$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = e^{(-\infty)^2} = e^{+\infty} = +\infty.$

Βοηθητική Συνάρτηση

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = 4$.

- Να βρεθεί το $f(1)$ και $f'(1)$.

Λύση

Αφού $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = 4$

Θέτω $g(x) = \frac{f(x)-x^2}{x-1}$ άρα $\lim_{x\to 1} g(x) = 4$

$$g(x)(x-1) = f(x) - x^2$$

$$\boxed{g(x)(x-1) + x^2 = f(x)}$$

Παίρνω όρια

$$\lim_{x\to 1} g(x)(x-1) + x^2 = \lim_{x\to 1} f(x)$$

$$4\cdot(1-1)+1^2 = \lim_{x\to 1} f(x)$$

$$1 = \lim_{x\to 1} f(x)$$

και αφού η f συνεχής $f(1)=1$.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)(x-1)+x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(g(x) + x+1\right) = 4+2 = 6$$

$$f'(1) = 6.$$

Σχολιο

Ισοδυναμα η ασκηση αντι να
ζητασει το $f(1)$ και $f'(1)$
θα μπορουσε να ζητησει την
εφαπτομενη στο 1.

Μονοτονια

Το πιο σημαντικο Ζητουμενο της Γ' Λυκειου ειναι η μονοτονια μιας συναρτησης.

α) $f(x) = e^x + x^3 + x \quad , x \in R.$

$f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0$ αρα $f \nearrow$

β) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad , x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ αρα $f \searrow$

γ) $f(x) = \eta\mu x - x$

$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$ αρα $f \searrow$

γιατι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

$-2 \leq \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$

δ) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \quad , x \in R$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{2} 2x - 1$

$f'(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ αρα $f \nearrow$

• $e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

ε) $f(x) = 2x\ln x - x^2 \quad , x > 0$

$f'(x) = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} - 2x$

$f'(x) = 2\ln x + 2 - 2x$

$f'(x) = 2(\ln x + 1 - x) \leq 0$ αρα $f \downarrow$

• $\ln x \leq x - 1$

$\ln x - x + 1 \leq 0$

Σε ολα τα παραπανω

σεναριο η $f'(x)$ εχει

σταθερο προσημο

αρκει φυσικα παντα

να το κοιταμε αυτο.

(ζ) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$f'(x) = 3(x^2 - 4x - 5)$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad x = 5$

x		-1		5	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Η f γν. αύξουσα $(-\infty, -1]$ και $[5, +\infty)$

Η f γν. φθίνουσα $[-1, 5]$

Το $A(-1, f(-1))$ Τ.Μ

Το $B(5, f(5))$ Τ.Ε.

(η) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}, \quad x \neq 0$

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+4) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$ ή $x = -2$

x		-2		0		2	
x^2-4	$+$		$-$		$-$		$+$
x^2	$+$		$+$		$+$		$+$
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

θ) $f(x) = e^x(x^2-4x+5)$

$f'(x) = e^x(x^2-4x+5) + e^x(2x-4)$

$f'(x) = e^x(x^2-4x+5+2x-4)$

$f'(x) = e^x(x^2-2x+1)$

$f'(x) = e^x(x-1)^2 \geq 0$

$f \nearrow$

Αυτες ηταν περιπτωσει πολυ βασικων μονοτονιων οπου η $f'(x)$ εχει ριζα.

(i) $f(x) = e^x + x^2 - x, \quad x \in R$.

$f'(x) = e^x + 2x - 1$

Η $f'(x)$ δεν είναι θετική, δεν είναι αρνητική

Η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν λύνεται.

Άρα παρατηρώ ρίζα την $f'(x)$ και πάω στην $f''(x)$.

$f'(x) = e^x + 2x - 1$ $\qquad$ $f'(0)=0$

$f''(x) = e^x + 2 > 0$

x		0	
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$x<0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$

$x>0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$

(κ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$, $x\in(0,2)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-2)-\ln x}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x\ln x}{x(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-2-x\ln x}{x(x-2)^2}$$

Ο παρονομαστης ειναι θετικος

Το προσημο της $f'(x)$ εξαρταται

μονο απο τον αριθμητη.

$\varphi(x)=x-2-x\ln x$

$\varphi'(x)=1-\ln x-1$

$\varphi'(x)=-\ln x$

→ $\varphi'(x)=0 \Rightarrow -\ln x=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$

x	0 1 2	
φ'	+ 0	−
φ	↗ −	− ↘
$x(x-2)^2$	+	+
f'	−	−
f	↘	↘

$\varphi(x)\le\varphi(1) \Rightarrow \varphi(x)\le -1$

Μεγαλη σημασια στη

μονοτονια κλαδωτης συναρτησης

(1) $f(x) = \begin{cases} x e^{x-1} - 1, & x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) = 0$ και $f(1) = 0$

Συνεχης στο 1.

$\underline{x < 1}$

$f_1(x) = x e^{x-1} - 1$

$f_1'(x) = e^{x-1}(x+1)$

$\rightarrow f_1'(x) = 0$

$\underline{x = -1}$

$\underline{x > 1}$

$f_2(x) = x \ln x$

$f_2'(x) = \ln x + 1$

$\rightarrow f_2'(x) = 0$

$\underline{x = \frac{1}{e}}$

x	-1	$\frac{1}{e}$	1	
f_1'	$-$ 0 $+$	$+$ 0		///////////
f_2'	/////	/////	/////	$+$
f'	$-$	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Σχολιο

Σε καθε μονοτονια που καταληγει σε ενα απο τα δυο παρακατω σχεδιο τονιζουμε την ανισοτητα.

x	x_0	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

$f(x) \leq f(x_0)$

x	x_0	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x) \geq f(x_0)$.

Σημαντικά γνώσεις

Βασικά ανισότητα.

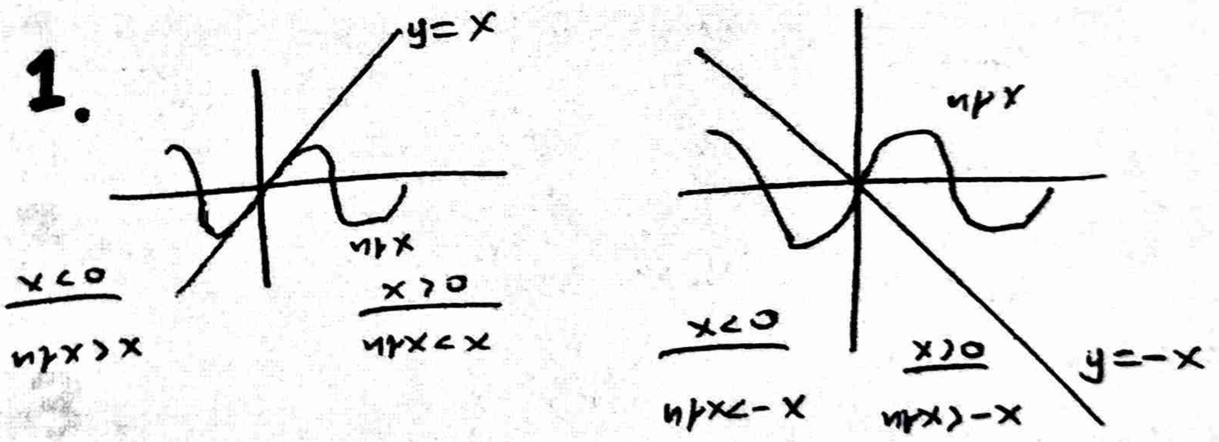
1. $e^x \geq x+1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Το "=" για $x=0$

2. $\ln x \leq x-1$ $\forall x > 0$ Το "=" για $x=1$

3. $|\eta\mu x| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Το "=" για $x=0$

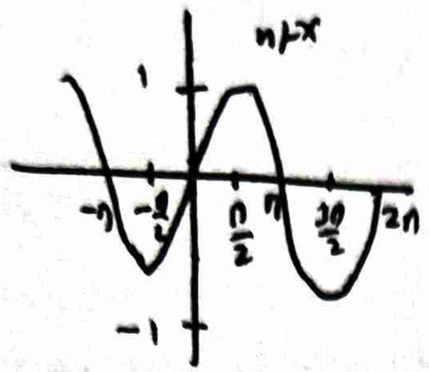
Σημαντικά πληροφορίες.

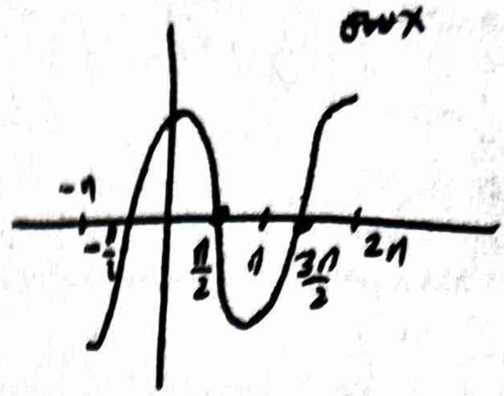
1.



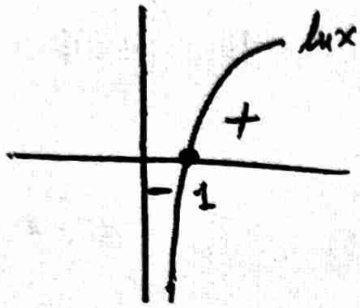
$$\boxed{\begin{gathered}\eta\mu x = x \\ \Leftrightarrow \\ x=0.\end{gathered}}$$

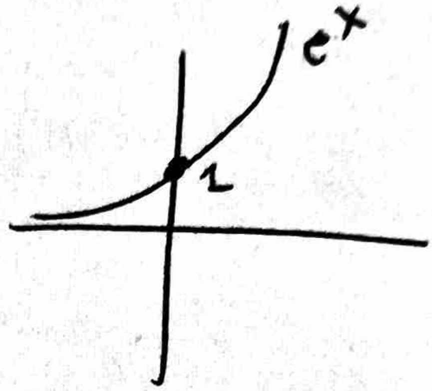
2.





3.





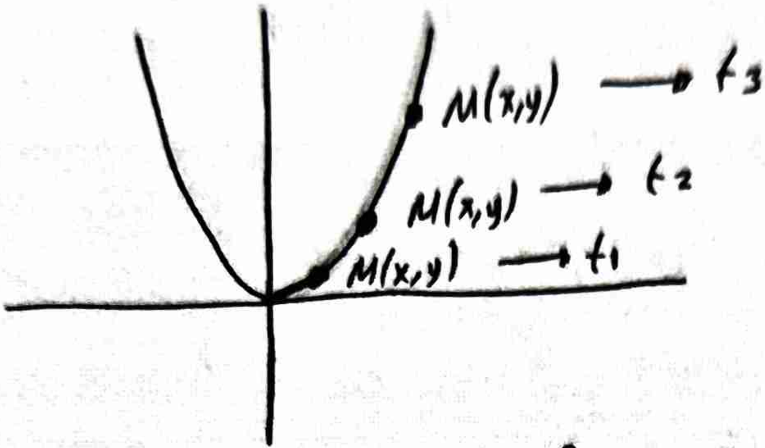
4. Μια ανισοτητα που χρησιμοποιουμε

συνεχως ειναι:

- αν $x>0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$
- αν $x<0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$.

Ρυθμος Μεταβολης

$f(x) = x^2 \quad , x > 0$

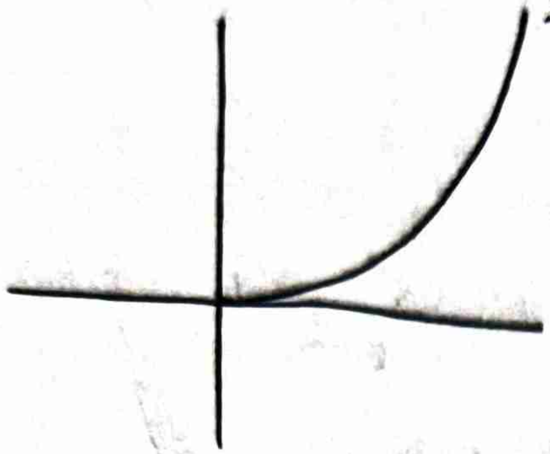


Η τετμημενη του υλικου σημειου Μ και η τεταγμενη του αλλου συναρτηση του χρονου αρα $x = x(t) \quad , y = g(t)$.

Φυσικα η τετμημενη και η τεταγμενη μεταβαλλονται με ενα ρυθμο.

Ο ρυθμος με τον οποιο μεταβαλλεται ενα μεγεθος ειναι μετρησιμος και λεγεται ρυθμος μεταβολης. και ειναι η παραγωγος συναρτηση.

$y=x^2$, $x>0$



Η τετμημενη του υλικου σημειου Μ αυξανεται κατα 1.

Τη χρονικη στιγμη t_1 το σημειο Μ διερχεται απο το σημειο $A(2,4)$

Να βρεθει τη χρονικη στιγμη t_1 ο ρυθμος μεταβολης.

Δεδομενα

$x'(t)=1$

$x(t_1)=2$

$y(t_1)=4$.

1. Της τεταγμενης του Μ

Γνωριζω οτι $y = x^2$

$$y(t) = x^2(t)$$

SOS

Η παραγωγιση στο ρυθμο μεταβολης γινεται ως προς t

$$y'(t) = 2x(t)\, x'(t)$$

είναι ο ρυθμως μεταβολης της τεταγμενης του Μ την τυχαια χρονικη στιγμη t

Για $t = t_1$

$$y'(t_1) = 2x(t_1)\, x'(t_1)$$

$$y'(t_1) = 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\boxed{y'(t_1) = 4}$$

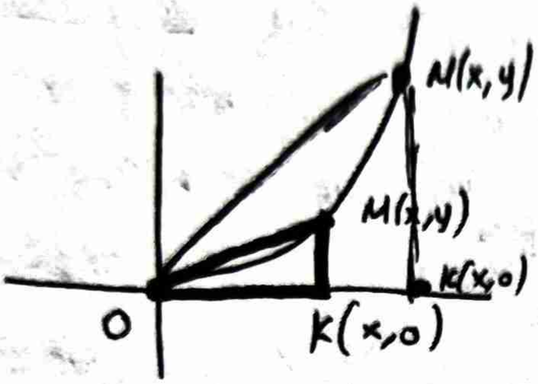
Σχολιο

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left[(\ln x)^2\right]' = 2\ln x\,(\ln x)' = 2\ln x \,\frac{1}{x}$$

$$\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)\, f'(x)$$

2. Του εμβαδου του τριγωνου ΜΟΚ οπου Ο η αρχη των αξονων και Κ η προβολη του Μ στον $x'x$.



Σχολιο

Οποιαδηποτε χρονικη στιγμη t το υλικο σημειο Μ με τα σημεια Ο, Κ σχηματιζει ορθογωνιο τριγωνο το οποιο εχει ενα εμβαδον που ο ρυθμος με τον οποιο αλλαζει ειναι μετρησιμος.

$$E = \frac{B \cdot U}{2}$$

$$E = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\, x(t)\, y(t)$$

Το εμβαδον του τριγωνου την τυχαια χρονικη στιγμη t

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left[x'(t)\, y(t) + x(t)\, y'(t)\right]$$

ο ρυθμος μεταβολης του εμβαδου την τυχαια χρονικη στιγμη.

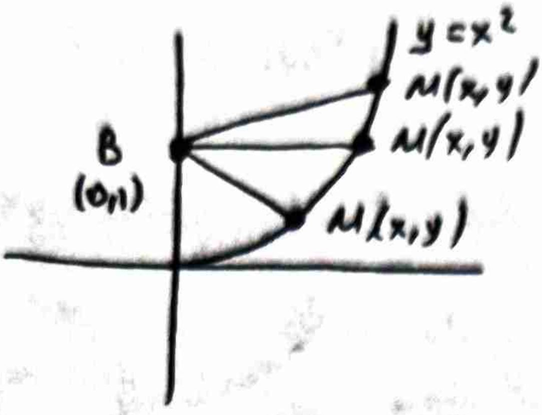
$\underline{t = t_1}$: $E'(t_1) = \frac{1}{2}\left[x'(t_1)\, y(t_1) + x(t_1)\, y'(t_1)\right]$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2}\left[1 \cdot 4 + 2 \cdot 4\right] = 6 \Leftrightarrow \boxed{E'(t_1) = 6}$$

3. Της αποστασης του Μ απο το $B(0,1)$

Σχολιο

Η αποσταση του Μ απο το Β αλλαζει με τον ρυθμο ο οποιος ειναι μετρησιμος.



$$d(M,B)=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$$

$$d(M,B)=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$d(t)=\sqrt{x^2(t)+(y(t)-1)^2}$$ Η αποσταση του Μ απο το Β την τυχαια χρονικη στιγμη t

$$d'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+2(y(t)-1)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+(y(t)-1)^2}}$$

$t=t_1$

$$d'(t_1)=\frac{x(t_1)x'(t_1)+(y(t_1)-1)y'(t_1)}{\sqrt{x^2(t_1)+(y(t_1)-1)^2}}$$

Σχολιο

$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d'(t_1)=\frac{2\cdot 1+(4-1)4}{\sqrt{4+9}}$$

$$\boxed{d'(t_1)=\frac{14}{\sqrt{13}}}$$

Επεταχυνση

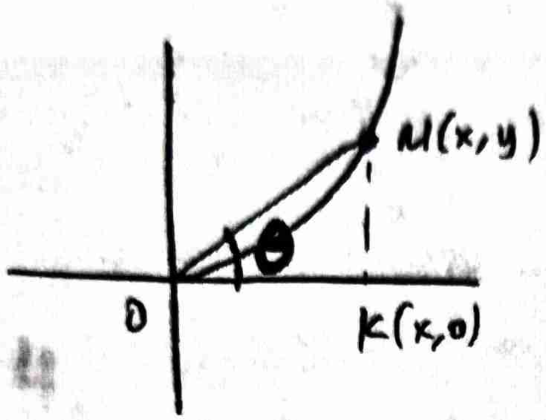
$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}$$

$$d'(t) = \frac{\left[x^2(t) + (y(t)-1)^2\right]'}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)\,x'(t) + 2(y(t)-1)\cdot(y(t)-1)'}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)\,x'(t) + 2(y(t)-1)\,y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}.$$

4. Της γωνίας $\theta = M\hat{O}K$ όπου Ο η αρχή των αξόνων και Κ η προβολή του Μ στον $x'x$.



Σχόλιο

Η γωνία $M\hat{O}K$ αλλάζει συνεχώς και κάθε χρονική στιγμή. και εξαρτάται πλήρως από τη θέση του Μ.

$$εφ\hat{\theta} = \frac{MK}{OK}$$

$$εφ\hat{\theta} = \frac{y}{x}$$

$$εφ\,\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

$$\frac{1}{συν^2\theta(t)}\,\theta'(t) = \frac{y'(t)\,x(t) - y(t)\,x'(t)}{x^2(t)}$$

$$\boxed{\theta'(t) = \frac{y'(t)\,x(t) - y(t)\,x'(t)}{x^2(t)}\,συν^2\theta(t)}$$

αυτό ψάχνω
που είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας.

Γνωριζω απο τη β' λυκειου οτι

$$\text{συν}^2 x = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 x}$$

αρα $$\text{συν}^2 \theta(t) = \frac{1}{1+\text{εφ}^2\theta(t)}$$

$$\text{συν}^2 \theta(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}$$

$$\text{συν}^2 \theta(t) = \frac{1}{1+\frac{y^2(t)}{x^2(t)}}$$

Αρα σκοψιζω λεγονται οτι.

$$\theta'(t) = \frac{y'(t)\,x(t) - y(t)\,x'(t)}{x^2(t)} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2(t)}{x^2(t)}}$$

$\underline{t = t_1}$

$$\theta'(t_1) = \frac{4\cdot 2 - 4\cdot 1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{16}{4}}$$

$$\Rightarrow \theta'(t_1) = 1\cdot\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\theta'(t_1) = \frac{1}{5}}.$$

7. Ας υποθέσουμε τώρα ότι

$x'(t) > 0$.

Να εξετασθεί αν υπάρχει σημείο στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης να είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.

$$\boxed{y'(t) = 2x'(t)}$$

όμως $y(t) = x^2(t)$

$y'(t) = 2x(t)\, x'(t)$

$\cancel{2x'(t)} = 2x(t)\cancel{x'(t)}$

αφού $x'(t)>0$

$\cancel{2} = \cancel{2}x(t)$

$x(t)=1 \quad y(t)=1$

$A(1,1)$

Εφαρμογή

1. Δινεται $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2-2x, & x > 0 \end{cases}$

ⓐ Να βρεθει η μονοτονια της $f(x)$

· $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ αρα η $f(x)$ συνεχης στο 0.

$x<0$

$f_1(x) = x^3$

$f_1'(x) = 3x^2 \geq 0$

$x>0$

$f_2(x) = x^2-2x$

$f_2'(x) = 2x-2$

$\boxed{x=1}$

x		0		1	
f_1'	+		//////		//////
f_2'	//////		−	0	+
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗

ⓑ Να λυθει η ανισωση $f(-3x) < f(-x^2)$ στο $(0,+\infty)$

Αν $x>0 \Rightarrow -3x<0$

Αν $x>0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow -x^2<0$

Αρα $f(-3x) < f(-x^2)$

$-3x < -x^2$

$x^2-3x<0$

$x \in (0,3)$.

① Να λυθεί η ανίσωση $f(e^{-x}) < f(\frac{1}{2})$ στο $(0,1)$

Αν $0 < x < 1 \Rightarrow 0 > -x > -1 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} > \frac{1}{e}$

άρα $f(e^{-x}) < f(\frac{1}{2})$

$e^{-x} > \frac{1}{2}$

$-x > \ln\frac{1}{2}$

$-x > -\ln 2$

$x < \ln 2$

2 Δινεται $f(x)=e^x+x^2$

ⓐ Να λυθει η εξισωση $f'(f(x)-x)=2+e$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=e^x+2x \\ f''(x)=e^x+2>0 \\ f \text{ κυρτη} \iff f' \nearrow \end{array}}$$

$f'(f(x)-x)=f'(1)$

f' 1-1

$f(x)-x=1$

$f(x)=x+1$

Μοναδικη λυση

$x=0$

Η εφαπτομενη στο $A(0,f(0))$

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$y-1=1(x-0)$

$y=x+1$

$\boxed{\text{Αφου } f \text{ κυρτη} \Rightarrow f(x)\geq x+1}$

ⓑ Να λυθει η εξισωση $e^{ημx}=ημx+συν^2x$

$e^{ημx}=ημx+1-ημ^2x$

Θετω $ημx=t$

$e^t=t+1-t^2 \iff e^t+t^2=t+1 \iff f(t)=t+1$

$t=0$

$ημx=0$

$ημx=ημ0$

$x=2κπ$

ή $x=2κπ+π$

⑧ Να λυθεί η ανίσωση $e^x(x^2+x-1)>-1$

$x^2+x-1>-\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow x^2+x-1>-e^{-x}$

$e^{-x}+x^2>-x+1 \Leftrightarrow f(-x)>-x+1$

θέτω $-x=t$

$f(t)>t+1$

$t\neq 0 \Leftrightarrow -x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

⑧ Να λυθεί η ανίσωση $\frac{e^{x-1}-3x}{x^2+1}+1>0$

$e^{x-1}-3x+x^2+1>0$

$e^{x-1}+x^2-2x+1>x \Leftrightarrow e^{x-1}+(x-1)^2>x$

[θέτω $x-1=t \Leftrightarrow x=t+1$]

$e^t+t^2>t+1$

$f(t)>t+1$

$t\neq 0$

$x-1\neq 0$

$\boxed{x\neq 0}$

3

Δινεται η $f(x) = e^x - e \cdot \ln x$

ⓐ Να βρεθει το συνολο τιμων της $f(x)$

$D_f = (0, +\infty)$

x	0	1	$+\infty$
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$
f	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$ $+\infty$

$f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$ $\quad f'(1) = 0$

$f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq e.$

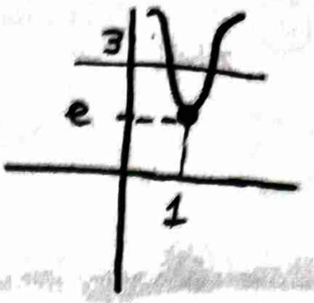
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^x - e\ln x) = +\infty$
- $f(1) = e$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - e\ln x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{e\ln x}{e^x}\right) = +\infty$

$\to \lim_{x \to +\infty} \frac{e\ln x}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e}{x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{xe^x} = 0$

Αρα $ΣΤ_f = [e, +\infty)$.

(B) Νδο η εξισωση $f(f(x)-2)=e$ εχει ακριβως δυο ριζες

Γνωριζω απο πριν οτι το $A(1,e)$ ειναι ολικο ελαχιστο της $f(x)$



Αρα $f(f(x)-2)=e$

$\Leftrightarrow$

$f(x)-2=1$

$f(x)=3$

$x\in(0,1)$

- f συνεχης
- $f \searrow$
- $\Sigma T_f=[e,+\infty)$
- Το $3\in \Sigma T_f$

αρα $\exists\, \kappa_1<1$ τ.ω $f(\kappa_1)=3$ μοναδικος.

$x\in(1,+\infty)$

- f συνεχης
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f=[e,+\infty)$
- $3\in \Sigma T_f$

αρα $\exists\, \kappa_2>1$ τ.ω $f(\kappa_2)=3$ μοναδικος

4

Δίνεται $f(x)=e^x$. Νδο από το $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ διέρχονται ακριβώς δύο εφαπτόμενες

Η τυχαία εφαπτόμενη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \longrightarrow A\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2}-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)$

$\frac{1}{2}-e^{x_0}=-e^{x_0}x_0$

Αρκεί νδο η εξίσωση $xe^x-e^x+\frac{1}{2}=0$

έχει ακριβώς δύο ρίζες.

$\boxed{\varphi(x)=xe^x-e^x+\frac{1}{2}}$ $D_\varphi=\mathbb{R}$.

x		0	
φ'	$-$	0	$+$
φ	$\frac{1}{2}$ ↘	$-\frac{1}{2}$	↗ $+\infty$

$\varphi(x)\geq\varphi(0)$

$\varphi(x)\geq-\frac{1}{2}$.

$\varphi'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

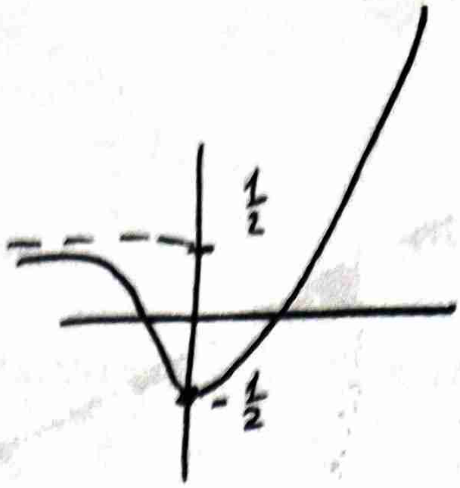
$\rightarrow \varphi'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x+\frac{1}{2}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{e^{-x}}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$



$x \in (-\infty, 0]$

- $\varphi \downarrow$
- φ συνεχής
- $\Sigma T_\varphi = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Το $0 \in \Sigma T_\varphi$ άρα

$\exists\, \xi_1$ μοναδικό τ.ω.

$\varphi(\xi_1) = 0$

$x \in [0, +\infty)$

- $\varphi \uparrow$
- φ συνεχής.
- $\Sigma T_\varphi = [-\frac{1}{2}, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_\varphi$ άρα

$\exists\, \xi_2$ μοναδικό

τ.ω. $\varphi(\xi_2) = 0$.

5

Δινεται $f(x) = e^x - e\ln x$

(α) Νδο η εξισωση $f(f(x)-2) = e$ εχει ακριβως δυο ριζες

Λοιπον, $f(f(x)-2) = f(1)$

$D_f = (0,+\infty)$

$f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$ $\quad f'(1) = 0$

$f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$

x		1	
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
f	$+\infty \searrow$	e	$\nearrow +\infty$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq e$

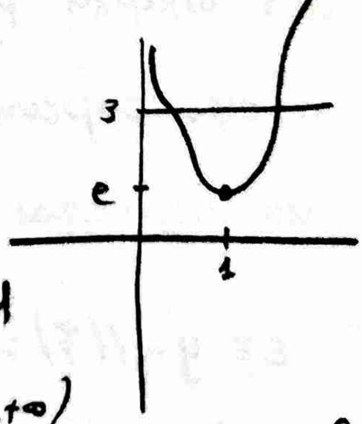
Αρα αφου εχουμε ολικο ελαχιστο το $A(1,e)$

Η εξισωση γινεται $f(x) - 2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 3$

. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - e\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - e\frac{\ln x}{e^x}\right) = +\infty$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = 0$



$x \in (0,1]$

. f συνεχης

. $f \downarrow$

. $ΣΤ_f = [e,+\infty)$

το $3 \in ΣΤ_f$ αρα $\exists \xi_1$ τ.ω $f(\xi_1) = 3$ μοναδικο

$x \in (1,+\infty)$

. f συνεχης

. $f \nearrow$

. $ΣΤ_f = (e,+\infty)$

το $3 \in ΣΤ_f$ αρα $\exists \xi_2$ μοναδικο τ.ω $f(\xi_2) = 3$

(B) Αν x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτ. α

i) νδο υπαρχει μοναδικο $x_0 \in (1, x_2)$ τ.ω

$f'(x_0) + f(x_0) = 3$

Γνωριζω οτι
$f(x_1) = 3$
$0 < x_1 < 1$

$f(x_2) = 3$
$x_2 > 1$

$f'(x) + f(x) = 3$

$f'(x) + f(x) - 3 = 0$

$\boxed{\varphi(x) = f'(x) + f(x) - 3}$

$\varphi(1) = f'(1) + f(1) - 3 = 0 + e - 3 < 0$

$\varphi(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 3 = f'(x_2) + 3 - 3 = f'(x_2) > 0$

αφου $x_2 > 1$
οπου $f'(x) > 0$

Bolzano $\exists\, x_0 \in (1, x_2)$ τ.ω

$\varphi(x_0) = 0$

$f'(x_0) + f(x_0) = 3.$

$\varphi'(x) = f''(x) + f'(x)$
(+) (+)

$\varphi \nearrow$

ii) νδο υπαρχει μοναδικο $\xi \in (x_1, 1)$ τ.ω

η εφαπτομενη ε της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$

να διερχεται απο το $A(0, 3)$.

$\varepsilon: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \longrightarrow A(0,3)$

$3 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi)$

Αρκει νδο $\exists \xi \in (x_1, 1)$ μοναδικο τ.ω

$$3 - f(\xi) = -\xi f''(\xi)$$

$3 - f(x) = -x f''(x) \iff x f''(x) + 3 - f(x) = 0$

$$\boxed{g(x) = x f''(x) + 3 - f(x)}$$

$g(x_1) = x_1 f''(x_1) + 3 - f(x_1) = x_1 f''(x_1) + 3 - 3 =$
$= \underset{\oplus}{x_1} \underset{\ominus}{f''(x_1)} < 0$

$g(1) = f''(1) + 3 - f(1) = 0 + 3 - e = 3 - e > 0$

Bolzano $\exists \xi \in (x_1, 1)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

$$3 - f(\xi) = -\xi f''(\xi).$$

6

Δινονται οι συναρτησεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x^2$

Νδο C_f, C_g εχουν ακριβως δυο κοινες εφαπτομενες.

$f'(x)=\frac{1}{x}$ και $g'(x)=2x$

Η εφαπτομενη της C_f στο $A(a,f(a))$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Η εφαπτομενη της C_g στο $B(B,g(B))$

$$y-g(B)=g'(B)(x-B)$$

Εφοσον υπαρχει κοινη εφαπτομενη πρεπει.

$$\begin{cases} f'(a)=g'(B) \Leftrightarrow \frac{1}{a}=2B \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{1}{2B}} \\ f(a)-af'(a)=g(B)-Bg'(B) \end{cases}$$

$$\ln a - a\frac{1}{a} = B^2 - B\cdot 2B$$

$$\ln a - 1 = -B^2$$

$$\ln\left(\frac{1}{2B}\right)-1=-B^2 \Leftrightarrow B^2+\ln 1-\ln 2B-1=0$$

$$B^2-\ln 2B-1=0$$

Αρκει νδο η εξισωση $x^2-\ln 2x-1=0$ εχει ακριβως δυο λυσεις.

$D_\varphi=(0,+\infty)$

$\varphi(x)=x^2-\ln 2x-1$

$\varphi'(x)=2x-\frac{1}{2x}=\frac{4x^2-1}{2x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x}$

$\rightarrow \varphi'(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi(x)\geq\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

$\varphi(x)\geq\frac{1}{4}-1$

$\varphi(x)\geq-\frac{3}{4}$

$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-\ln 2x-1)=$

$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{\ln 2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

$\rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}}{2x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0$

$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$

- $\varphi \downarrow$
- φ συνεχης
- $\Sigma T\varphi \; \left[-\frac{3}{4},+\infty\right)$

Το $0\in\Sigma T\varphi$ αρα

$\exists\, \beta_1$ μοναδικο τ.ω $\varphi(\beta_1)=0$

$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

- $\varphi \uparrow$
- φ συνεχης
- $\Sigma T\varphi=\left[-\frac{3}{4},+\infty\right)$

Το $0\in\Sigma T\varphi$ αρα

$\exists\, \beta_2$ μοναδικο τ.ω $\varphi(\beta_2)=0$.

7. Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγισιμη με $f(0)=1$ και

• $f(x) \geq 2e^x - x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(α) Νδο η εφαπτομενη της C_f στο $A(0, f(0))$ ειναι παραλληλη στην ευθεια $\varepsilon: y = x$

Αρκει νδο $f'(0)=1$.

Ισχυει οτι $f(x) \geq 2e^x - x - 1 \Leftrightarrow f(x) - 2e^x + x + 1 \geq 0$

$$\boxed{g(x) = f(x) - 2e^x + x + 1}$$

$g(x) \geq 0$

$g(x) \geq g(0)$

Η $g(x)$ εχει ελαχιστο στο 0 αρα απο Fermat $g'(0)=0$

$g'(x) = f'(x) - 2e^x + 1$

$g'(0) = f'(0) - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f'(0) = 1}}$

(β) Να υπολογιστει το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$f(x) \geq 2e^x - x - 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) \geq \lim_{x \to +\infty} (2e^x - x - 1)$$

$$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} (2e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} x\left[2\frac{e^x}{x} - 1\right] = +\infty(+\infty - 1) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Αρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geq +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

8

Δινεται συναρτηση $f(x) = 2e^{x} + x^{2}$

ⓐ Νδο η $f(x)$ παρουσιαζει μοναδικο ακροτατο

στο x_0

1η αποδειξη.

$f'(x) = 2e^{x} + 2x$

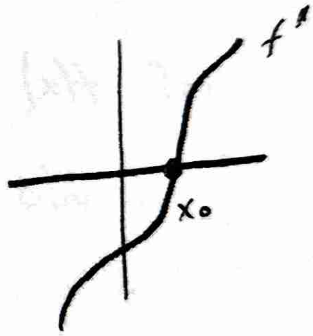
$f''(x) = 2e^{x} + 2 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f''	+	
f'	$-\infty \nearrow$	$+\infty$
f		

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[2e^{x} + 2x\right] = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2e^{x} + 2x\right] = +\infty$

$\Big\}$ $\Sigma T_{f'} = \mathbb{R}$.



<u>Συμπερασμα</u>

• f' συνεχης
• $f' \nearrow$
• $\Sigma T_{f'} = \mathbb{R}$
• $0 \in \Sigma T_{f'}$
• $\exists\, x_0 \in D_{f'}$ τ.ω $f'(x_0) = 0$

και λογω μονοτονιας

το x_0 μοναδικο.

x		x_0	
f''	+		+
f'	$\nearrow$ −	0	+ $\nearrow$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$A(x_0, f(x_0))$ ολικο ελαχιστο.

9

Δινεται $f(x) = e^x + \ln x$

Νδο η $f(x)$ εχει μοναδικο σημειο καμπης

το $A(x_0, f(x_0))$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
f'''	$+$
f''	$-\infty \nearrow +\infty$
f'	
f	

$D_f = (0, +\infty)$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$

$f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = e^x - \frac{-2x}{x^4} = e^x + \frac{2}{x^3} > 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

Συμπερασμα

- f'' συνεχης
- f'' $\nearrow$
- $ΣΤ_{f''} = \mathbb{R}$

Το $0 \in ΣΤ_{f''}$ αρα $\exists\, x_0 \in D_{f''}$

τ.ω $f''(x_0) = 0$

Το x_0 μοναδικο λογω μονοτονιας.

x		x_0	
f'''	$+$		$+$
f''	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
f	$\cap$		$\cup$

Το $A(x_0, f(x_0))$ μοναδικό σημείο καμπής.

10.

Δινεται $f(x) = 6e^{x} - x^{3} - 4x^{2}$

Νδο η $f(x)$ εχει ακριβως δυο σημεια καμπης

x		0	
f'''	$-$	0	$+$
f''	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$
f			

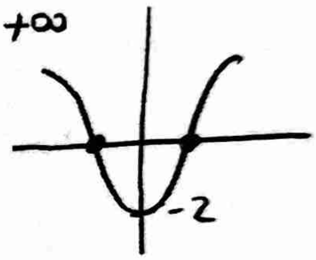
$f'(x) = 6e^{x} - 3x^{2} - 8x$

$f''(x) = 6e^{x} - 6x - 8$

$f'''(x) = 6e^{x} - 6$

$\rightarrow 6e^{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

f''



• $\lim\limits_{x \to -\infty} f''(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(6e^{x} - 6x - 8\right) = +\infty$

• $f''(0) = -2$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(6e^{x} - 6x - 8\right) = +\infty - 8 = +\infty$

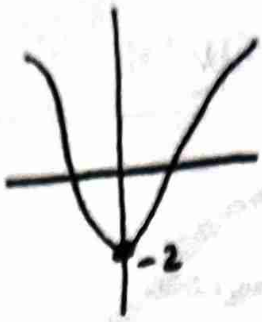
$\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(6e^{x} - 6x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 6x\left(\frac{e^{x}}{x} - 1\right) = +\infty(+\infty - 1) = +\infty$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{1} = +\infty$

$x \in (-\infty, 0]$

- f'' συνεχής
- f'' ↓
- $ΣΤ_{f''} = [-2, +\infty)$
- Το $0 \in ΣΤ_{f''}$ άρα

$\exists \xi_1 \in (-\infty, 0)$ τ.ω $f''(\xi_1) = 0$



$x \in [0, +\infty)$

- f'' συνεχής
- f'' ↑
- $ΣΤ_{f''} = [-2, +\infty)$
- Το $0 \in ΣΤ_{f''}$ άρα

$\exists \xi_2 \in (0, +\infty)$ τ.ω

$f''(\xi_2) = 0$.

x		ξ_1		0		ξ_2	
$f'''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	↘ $+$	0	↘ $-$		↗ $-$	0	$+$ ↗
$f(x)$	∪		∩		∩		∪

Τα σημεία $A(\xi_1, f(\xi_1))$

$B(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι

σημεία καμπής.