ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-\alpha x^2+2x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν $P(1)=2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x)=x^2+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^3x+\sigma\upsilon\nu x=1-\frac{1}{2}\eta\mu^2x$, $x\in(0,2\pi)$.

(Μονάδες 7)

α $P(1)=2 \Rightarrow \cancel{2}-\alpha+2+\beta=\cancel{2}$

$\boxed{\beta-\alpha=-2}$

$P(2)=15 \Leftrightarrow 16-4\alpha+4+\beta=15$

$-4\alpha+\beta=15-20$

$-4\alpha+\beta=-5$

$\boxed{4\alpha-\beta=5}$

+

$3\alpha=3$

$\alpha=1$ $\beta=-1$

β i)

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2+2x-1 & x^2+1 \\ \hline -(2x^3+2x) & 2x-1 \\ \hline -x^2-1 & \\ -(-x^2-1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x^2+1)(2x-1)$

11) $P(x) = 0$

$(x^2+1)(2x-1) = 0$

$x = \frac{1}{2}$

(8) $συν^3 x + συν x = 1 - \frac{1}{2} ημ^2 x \qquad x \in [0, 2π]$

$2συν^3 x + 2συν x = 2 - ημ^2 x$

$2συν^3 x + 2συν x = 2 - (1 - συν^2 x)$

Θέτω $συν x = t$

$2t^3 + 2t = 2 - 1 + t^2$

$2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0.$

$t = \frac{1}{2}$

$συν x = \frac{1}{2}$

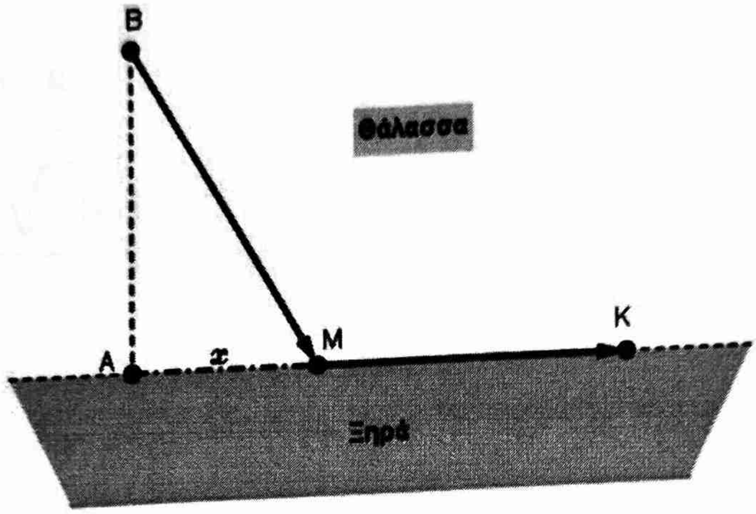
$συν x = συν \frac{π}{3}$

$x = 2κπ \pm \frac{π}{3}$

ΘΕΜΑ 4

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση $2\,km$ από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει $4\ km$ από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα $3\,km/h$ και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα $5km/h$.

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\ km$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}, \quad x \in [0,4].$$

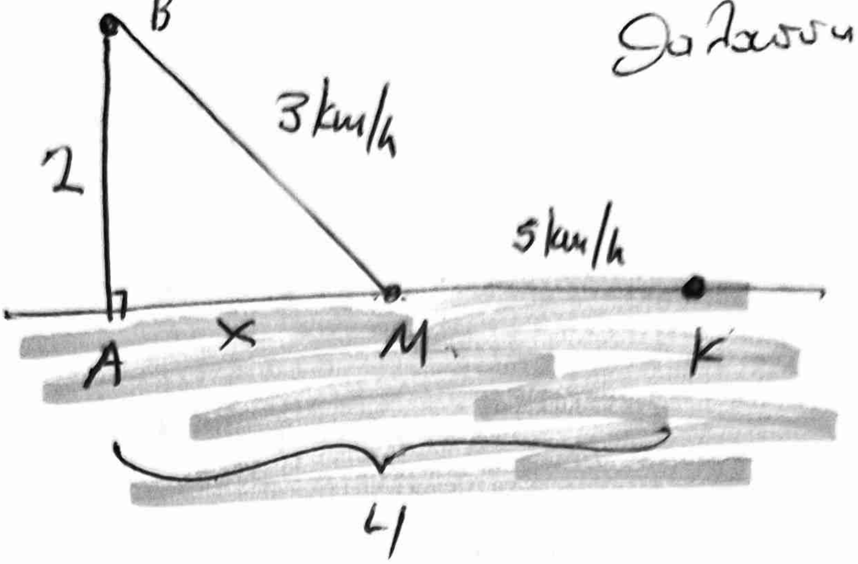
(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή – δρομέα να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

$v=\frac{s}{t}$

$t=\frac{s}{v}$



Ξηρά

(α) $BM^2 = 2^2 + x^2$

$BM^2 = 4 + x^2$

$\boxed{BM = \sqrt{4+x^2}}$

(β) $t_1 = \frac{BM}{3}$

$t_2 = \frac{MK}{5}$

$t_{ολ} = \frac{BM}{3} + \frac{MK}{5}$

$\boxed{t_{ολ} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}}$

(γ) $t = \frac{4}{3}$

$\frac{\sqrt{4+x^3}}{3} + \frac{4-x}{5} = \frac{4}{3}$

$5\sqrt{4+x^2} + 3(4-x) = 20$

$5\sqrt{4+x^2} + 12 - 3x = 20$

$5\sqrt{4+x^2} = 3x+8$

$3x+8 \geq 0$

$25(4+x^2) = (3x+8)^2$

$100+25x^2 = 9x^2+48x+64$

$16x^2-48x+36=0$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=60cm^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $2cm$ μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α)

i. **Να δείξετε ότι $y=\dfrac{120}{x}$.**

(Μονάδες 3)

ii. **Αφού εκφράσετε όλες τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου συναρτήσει του x, να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:**

$$x^3+x^2-3600=0.$$

(Μονάδες 7)

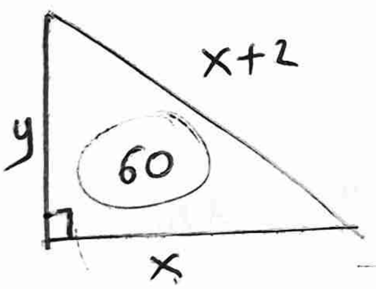
β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

α



i) $E=\dfrac{B\cdot υ}{2} \Leftrightarrow 60=\dfrac{x\cdot y}{2}$

$\boxed{\dfrac{120}{x}=y}$

ii). $y^2+x^2=(x+2)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{120}{x}\right)^2+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+4x+4$

$\Leftrightarrow \dfrac{14400}{x^2}=4x+4 \Rightarrow 14400=4x^3+4x^2$

$0=x^3+x^2-3600$

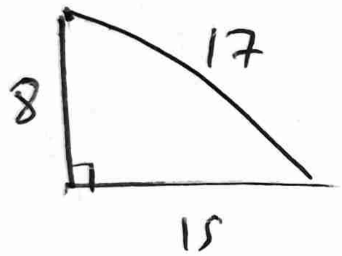
(β) $x^3+x^2-3600=0$

1	1	0	−3600	15
↓	15	240	3600	
1	16	240	0	

$(x-15)(x^2+16x+240)=0$

$\Delta<0$

$x=15$



(γ) Ένα και μοναδικό τρίγωνο

για $x=15$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=4,\beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x)=(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$.

(Μονάδες 9)

(α) $x^2-2x+1=(x-1)^2$

1	−2	−1	α	β	1
↓	1	−1	−2	α−2	
1	−1	−2	α−2	$\boxed{\beta+\alpha-2=0}$	

1	−1	−2	α−2	1
↓	1	0	−2	
1	0	−2	$\boxed{\alpha-4=0}$	

$\Rightarrow \alpha=4$

$\beta=-2$

(B) i) $P(x) : x^2+5$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - x^2 + 14x - 2 & x^2+5 \\
\hline
-(x^4 + 5x^2) & x^2 - 2x - 6 \\
\hline
-2x^3 - 6x^2 + 14x - 2 & \\
-(-2x^3 - 10x) & \\
\hline
-6x^2 + 14x - 2 & \\
-(-6x^2 - 30) & \\
\hline
14x + 28 &
\end{array}
$$

$$\boxed{P(x) = (x^2+5)(x^2-2x-6) + 14x + 28}$$

ii) $P(x) = 14(x+2)$.

$P(x) = 14x+28$

$$(x^2+5)(x^2-2x-6) + \cancel{14x} + \cancel{28} = \cancel{14x} + \cancel{28}$$

$$(x^2+5)(x^2-2x-6) = 0$$

$x^2+5=0$ ή $x^2-2x-6=0$

Αδύνατη $\quad x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

α)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 + \alpha x - 4 & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
-(x^4 - 3x^3 + 2x^2) & x^2 + 4x + 10 \\
4x^3 - 2x^2 + \alpha x - 4 & \\
-(4x^3 - 12x^2 + 8x) & \\
10x^2 + (\alpha - 8)x - 4 & \\
-(10x^2 - 30x + 20) & \\
(\alpha - 8 + 30)x - 24 & \\
(\alpha + 22)x - 24 &
\end{array}
$$

$(\alpha + 22)x - 24 \longrightarrow 24x - 24$

$\alpha + 22 = 24 \qquad \alpha = 2$

(B) i) $U = P(1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$

ii) $P(x) = 0$

$x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$

1	1	0	2	−4	1
↓	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

$(x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$

$x = 1$

$x^2(x+2) + 2(x+2) = 0$

$(x+2)(x^2+2) = 0$

$x = -2$

iii) $P(x) > 0$

x		-2		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
x^2+2	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

[redacted]

ⓐ $f(x) = x^4 + kx - 1$

$f(-x) = (-x)^4 + k(-x) - 1$ $\Big\}$ $=$

$\cancel{x^4} + kx - \cancel{1} = \cancel{x^4} - kx - \cancel{1}$

$2kx = 0$

$\underline{k = 0}$

ⓑ $\underline{f(x) = x^4 - 1}$

i) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^4 > x_2^4$

$x_1^4 - 1 > x_2^4 - 1$ $\quad f\downarrow$

$f(x_1) > f(x_2)$ $\quad (-\infty, 0]$

ii) νδο $f(x) \geq -1$

$x^4 - \cancel{1} \geq -\cancel{1}$

$x^4 \geq 0$ ✓

iii) $f(x) < 0 \Rightarrow x^4 - 1 < 0$

α' τρόπος

$x^4 - 1 < 0$

$(x^2-1)(x^2+1) < 0$

$+$

$x^2 - 1 < 0$

x	$-1 \quad 1$
x^2-1	$+ \quad - \quad +$

$x \in (-1, 1)$

β' τρόπος

$x^4 - 1 < 0$

$x^4 < 1$

$x^4 < 1^4$

$|x| < |1|$

$|x| < 1$

$-1 < x < 1$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=a, a \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a=0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $a=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $a \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $p \in [-2,2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-p$.

(Μονάδες 10)

α) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=a$

$2-x \geq 0$

$x \leq 2$

$x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

$x \in [-2, 2]$

β) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=0$

$\begin{cases} 2-x=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$

Αδύνατη.

AI Assistant

(γ) $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ αρτια.

$D_g=[-2,2]$ συμμετρικό.

$g(-x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=g(x)$

αρτια.

(δ) i) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{2-x}^2+2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}^2=(2\sqrt{2})^2$

$2-\cancel{x}+2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}+\cancel{x}+2=8$

$2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}=4$

$\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}=2$

$(2-x)(x+2)=4$

$\cancel{2x}+\cancel{4}-x^2-\cancel{2x}=\cancel{4}$

$-x^2=0$

$x=0$.

ii). Η εξισωση $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=a$

εχει ριζα το ρ

$$g(x) = \alpha$$

Ισχυει οτι $g(\rho) = \alpha$

ομως $g(\rho) = g(-\rho)$ αφου

$g(x)$ αρτια

αρα $g(-\rho) = \alpha$

Το $-\rho$ λυση!

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\frac{5}{x^2+1}\right)-2>0$.

(Μονάδες 11)

α

3	4	−5	−2	1
↓	3	7	2	
3	7	2	0	

$P(x)=(x-1)(3x^2+7x+2)$

$\Delta=49-24=25$

$x=\frac{-7\pm 5}{6}$: -2, $-\frac{1}{3}$

Ρίζες: $1, -2, -\frac{1}{3}$

β

x		-2		$-\frac{1}{3}$		1	
$x-1$	−		−		−	0	+
$3x^2+7x+2$	+	0	−	0	+		+
$P(x)$	−		+		−		+

$x\in\left(-2,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 09)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

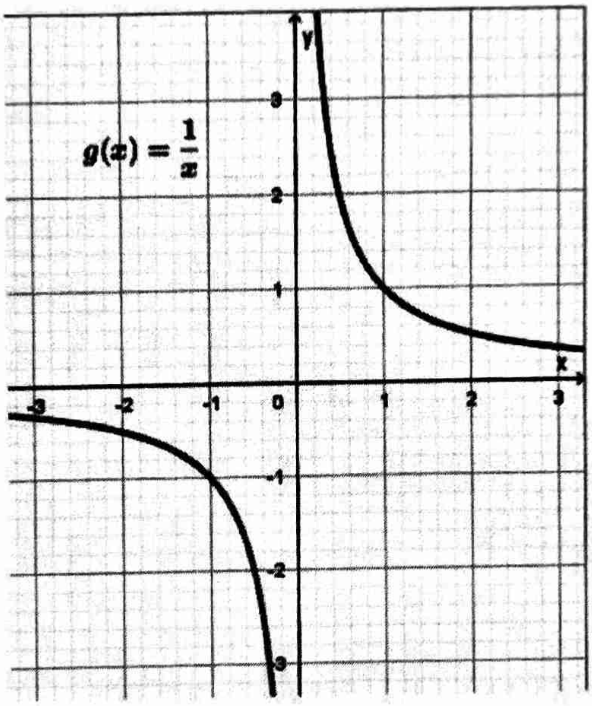
(Μονάδες 05)

γ)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 02)

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω,



να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 04)

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 1$.

(Μονάδες 05)

(α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

• $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 6 & -1 \\ \downarrow & -1 & 5 & -6 & \\ 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

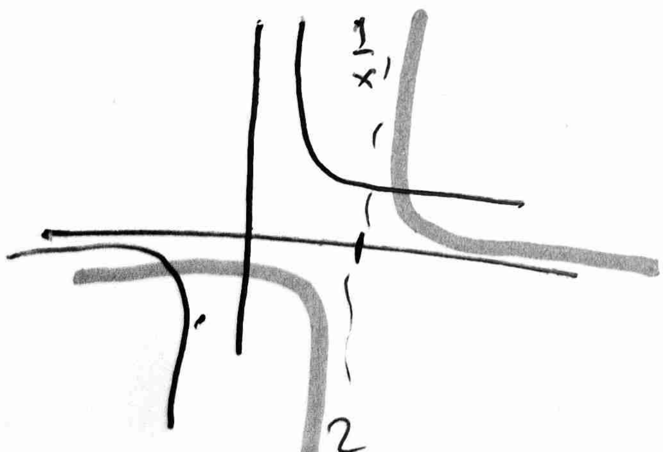
$(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x = -1$ $\quad$ $x = 2$ $\quad$ $x = 3$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$.

(β) · Αφου D_f δεν ειναι συμμετρικο δεν ειναι ουτε αρτια ουτε περιττη

(γ) i) $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)\cancel{(x-3)}} = \dfrac{1}{x-2}$



(δ) $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$

$\frac{1}{f(x)} = 1$ ή $\frac{1}{f(x)} = -1$

$f(x) = 1$ $\quad$ $f(x) = -1$

$\frac{1}{x-2} = 1$ $\quad$ $\frac{1}{x-2} = -1$

$1 = x-2$ $\quad$ $x-2 = -1$

$x = 3$ $\quad$ $x = 1$

γ) $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\frac{5}{x^2+1}\right)-2>0$

Θέτω $\frac{5}{x^2+1}=t$

$3t^3+4t^2-5t-2>0$

$t\in\left(-2,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

$-2<t<-\frac{1}{3}$ ή $t>1$

$-2<\frac{5}{x^2+1}<-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{5}{x^2+1}>1$

Αδύνατη

$5>x^2+1$

$4>x^2$

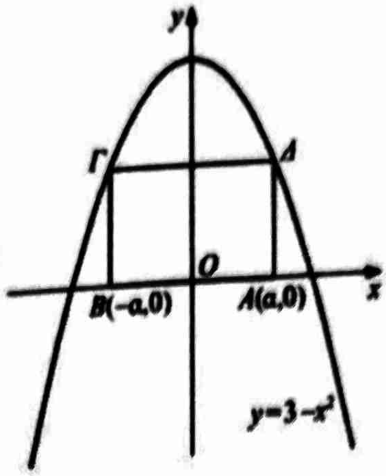
$x^2-4<0$

x	-2 $\quad$ 2
x^2-4	+ $\quad$ − $\quad$ +

$x\in(-2,2)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y=3-x^2$ και τα σημεία της Γ,Δ. Δίνεται ακόμα ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\alpha\in(0,\sqrt{3})$.



α) Αν Ε είναι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(0,\sqrt{3})$ είναι $E=f(\alpha)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 08)

ii. να βρεθεί το εμβαδό Ε στη θέση $\alpha=1$. (Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό Ε να πάρει τη μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 03) (α) i) $E = B \cdot U$

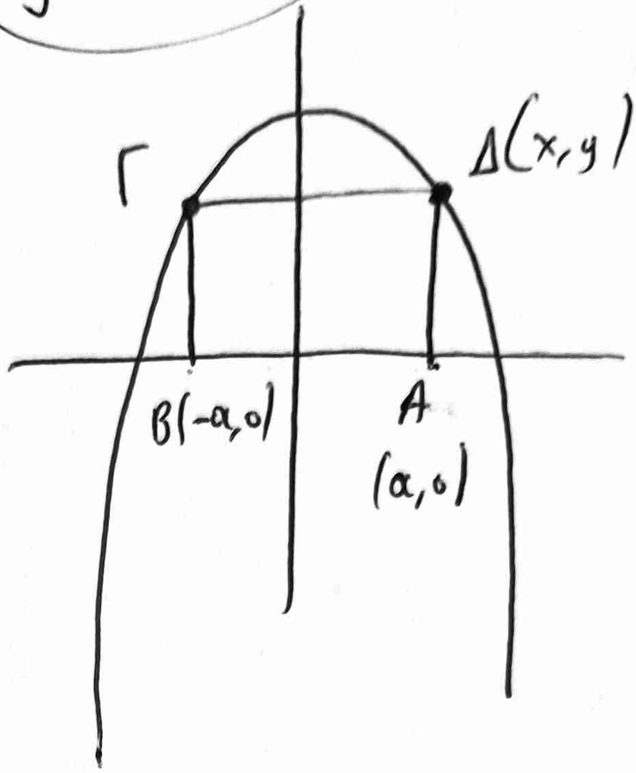
$E = 2\alpha \cdot y$

$E = 2\alpha(3-\alpha^2)$

$E = 6\alpha - 2\alpha^3$

$f(\alpha) = 6\alpha - 2\alpha^3$.

$y = 3-\alpha^2$



ii). $f(1) = 6-2 = 4$,

(β) Αρκει νδο $f(a) \leq 4$

$3-\alpha^2 \leq 4$

$0 < a^2 + 1$ ✓

(γ) Για $\alpha = 1$

το $E = 4$.

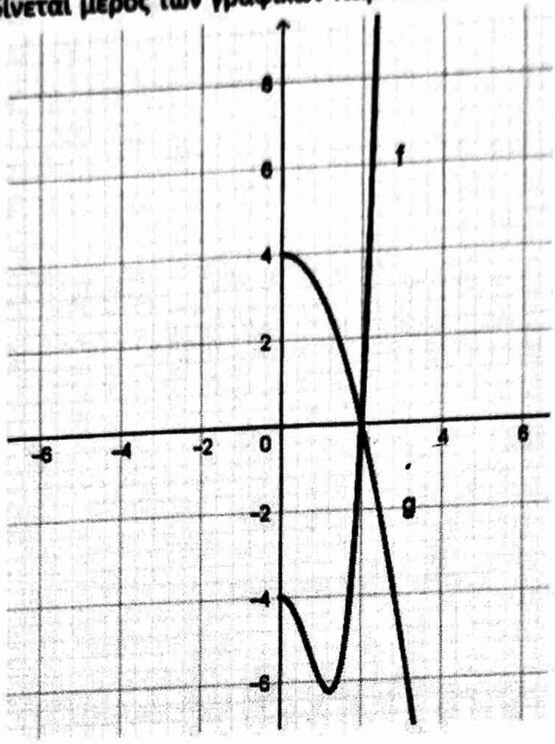
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

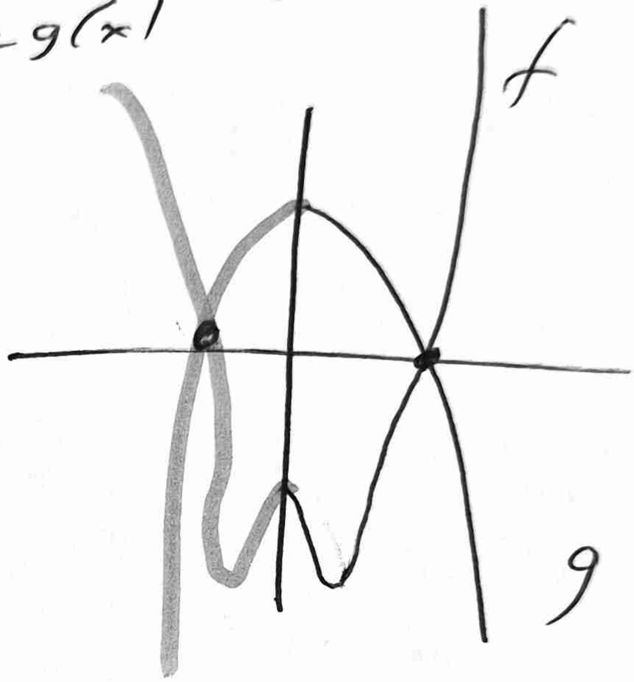
$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4$

$f(-x) = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$ ✓

$g(x) = -x^2 + 4$

$g(-x) = -(-x)^2 + 4$

$g(-x) = -x^2 + 4 = g(x)$ ✓



(B) i) $f(x) = g(x)$

$x = 2$

$x = -2$

ii). $f(x) < g(x)$

$x \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου P(x).

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο P(x) σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 5)

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης P(x)=0, να λύσετε την εξίσωση

$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$, για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

α) $P(1) = 1^4 + 6 \cdot 1^2 - 7 = 0$ ✓

β) $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7 = (x^2-1)(x^2+7)$

$\Delta = 36 + 28 = 64$

$x^2 = \frac{-6 \pm 8}{2}$ < 1, -7

$\boxed{P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+7)}$

(γ) i) $P(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+7) = 0$

$x = 1$ $\quad$ $x = -1$

ii) $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$

$t^4 + 6t^2 - 7 = 0$

$t = 1$

$2\eta\mu x - 1 = 1$

$2\eta\mu x = 2$

$\eta\mu x = 1$

$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2}$

$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$

$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$t = -1$

$2\eta\mu x - 1 = -1$

$2\eta\mu x = 0$

$\eta\mu x = 0$

$\eta\mu x = \eta\mu 0$

$x = 2\kappa\pi + 0$

$x = 2\kappa\pi + \pi - 0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

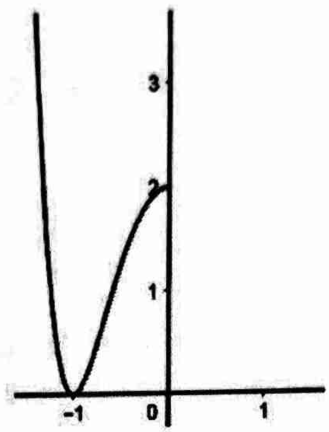
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

$f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$

ⓐ $f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2$

$= f(x)$

άρτια.

ⓑ $f(x) = 0$

$x^6 - 3x^2 + 2 = 0$

$x^2 = t$

$t^3 - 3t + 2 = 0$

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

$(t-1)(t^2 + t - 2) = 0$

$t = 1 \qquad t = -2 \qquad t = 1$

$x^2 = 1 \qquad x^2 = -2 \qquad x^2 = 1$

$x = 1 \qquad x = -1$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 09)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

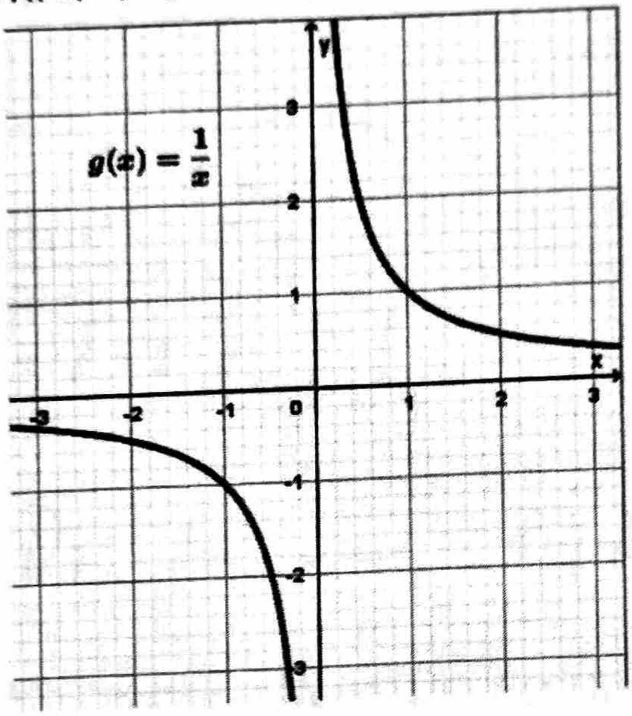
(Μονάδες 05)

γ)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 02)

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω,



να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 04)

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 1$.

(Μονάδες 05)

(α) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}$

• $x^3-4x^2+x+6=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 6 & -1 \\ \downarrow & -1 & 5 & -6 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x^2-5x+6)=0$

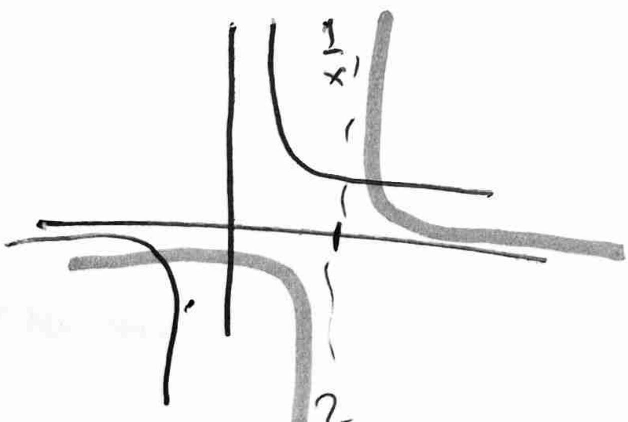
$x=-1$ $\quad$ $x=2$ $\quad$ $x=3$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$.

(β) · Αφού D_f δεν είναι συμμετρικό

δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή

(γ) i) $f(x) = \dfrac{(\cancel{x-3})(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x-2)(\cancel{x-3})} = \dfrac{1}{x-2}$



⑥ $$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 1$$

$$\frac{1}{f(x)} = 1 \quad \text{ili} \quad \frac{1}{f(x)} = -1$$

$$f(x) = 1 \qquad f(x) = -1$$

$$\frac{1}{x-2} = 1 \qquad \frac{1}{x-2} = -1$$

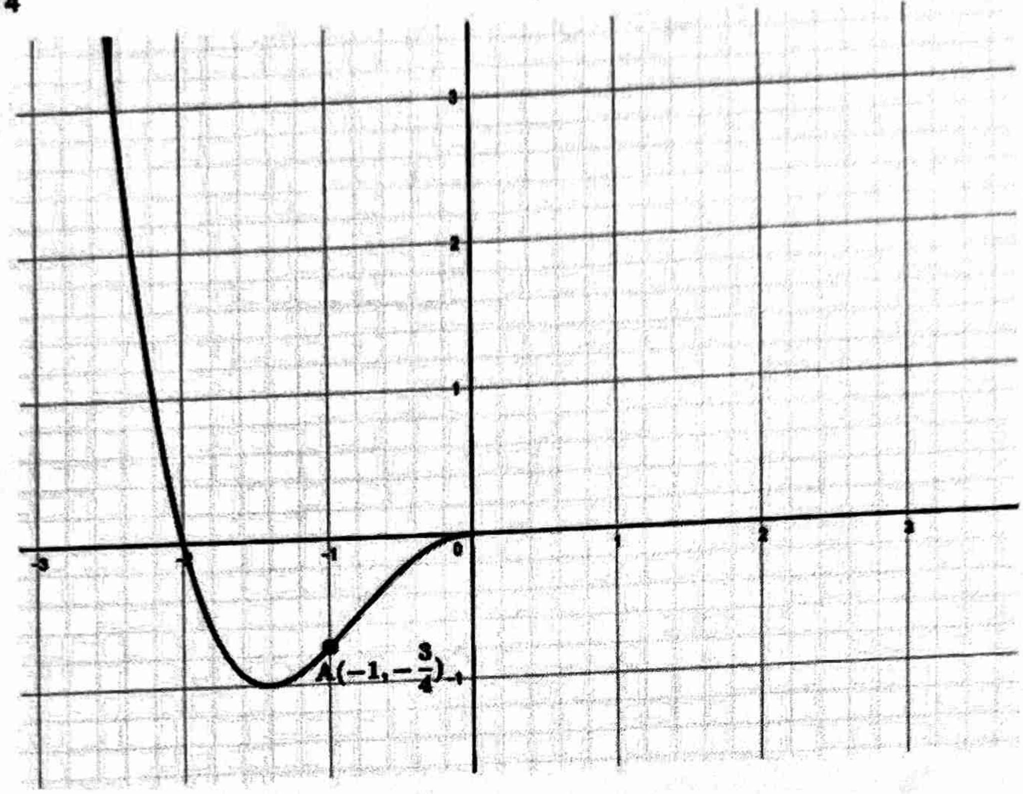
$$1 = x-2 \qquad x-2 = -1$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

1

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=-1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

ⓐ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2 \longrightarrow A\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$

$-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}(-1)^4 + \alpha(-1)^2$

$-\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \alpha \Rightarrow -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \alpha \Leftrightarrow a = -\frac{4}{4}$

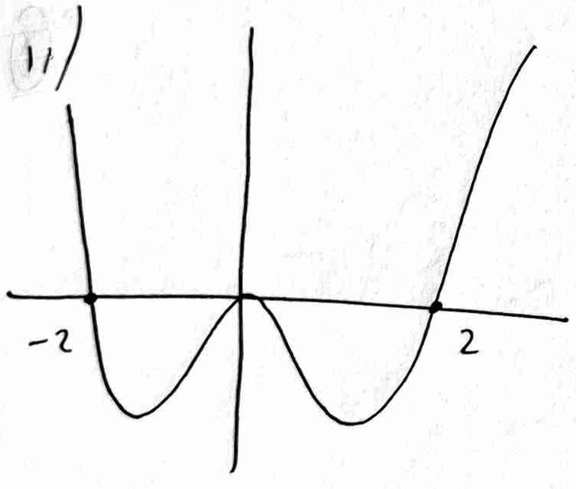
$a = -1$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2}$$

ⓑ i) $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - (-x)^2 =$

$= \frac{1}{4}x^4 - x^2 = f(x)$ αρτια.

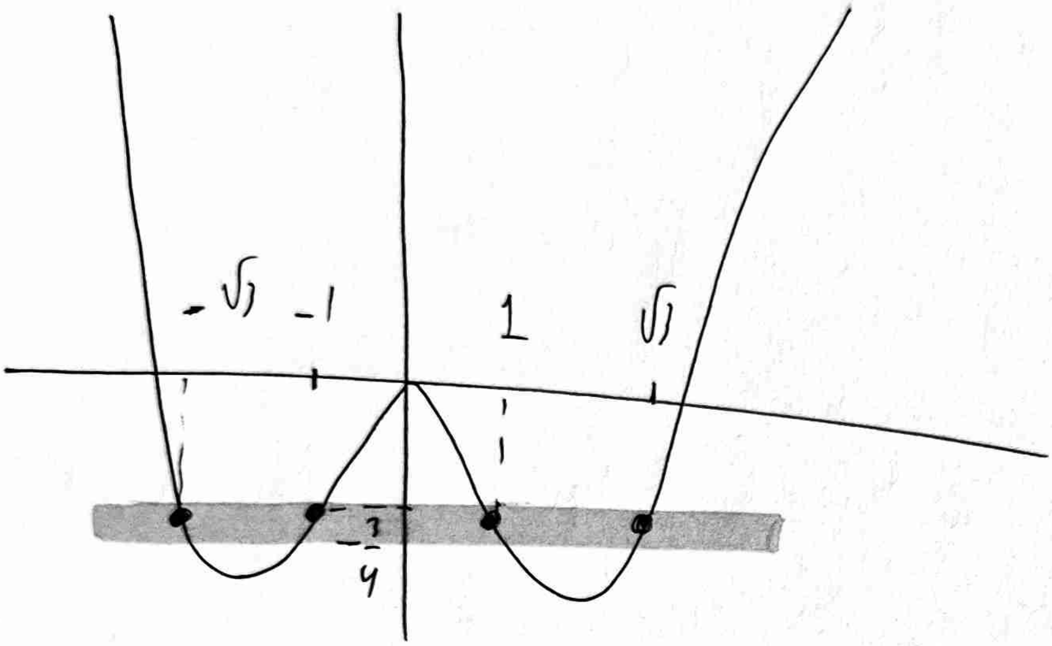
ii)



ⓒ $f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4 - (-\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4}9 - 3$

$f(-\sqrt{3}) = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{3}{4}$ ✓

Εξίσωση $f(x) = -\frac{3}{4}$



Η εξίσωση εχει λυσεις:

$-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 1, -1

2.

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

$g(x) = 3x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

(Μονάδες 4)

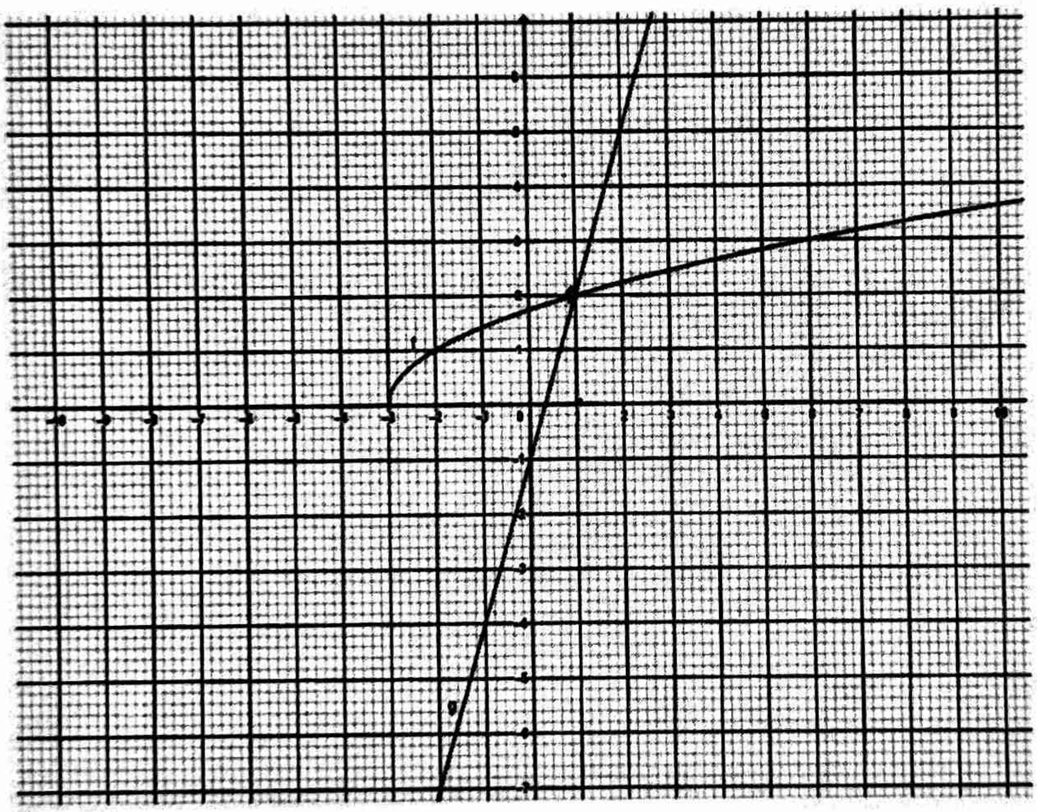
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$. **(Μονάδες 7)**

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος. **(Μονάδες 8)**



(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

npcnu $x+3 \geq 0$ $\quad D_f = [-3, +\infty)$

$x \geq -3$

$g(x) = 3x-1$

$D_g = R.$

(B) $f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x+3} = 3x-1$

$x+3 \geq 0$

$3x-1 \geq 0$

$\sqrt{x+3}^2 = (3x-1)^2$

$x+3 = 9x^2 - 6x + 1$

$9x^2 - 7x - 2 = 0$

$\Delta = 49 + 72 = 121$

$x = \frac{7 \pm 11}{18}$ $\quad$ 1 $\quad \cancel{-\frac{2}{9}}$

$\underline{x = 1}$

) $f(x) < g(x)$

i) $\forall x > 1$ η C_f κάτω C_g

ii)

$$\sqrt{x+3} < 3x-1$$

$x+3 \geq 0$ και $3x-1 > 0$

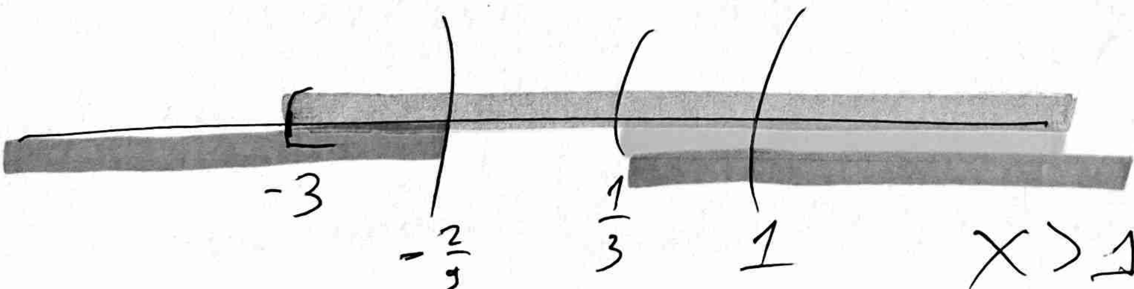
$x \geq -3$ $\quad$ $x > \frac{1}{3}$

$$\sqrt{x+3}^{\,2} < (3x-1)^2$$

$$9x^2 - 7x - 2 > 0$$

x		$-\frac{2}{9}$		
$9x^2-7x-2$	$+$		$-$	$+$

$x \in (-\infty, -\frac{2}{9}) \cup (1, +\infty)$.



$x > 1$.