

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



ΘΕΜΑ 1^ο 22

~~A.~~ Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών.

(8 μονάδες)

~~B.~~ Να δώσετε τον ορισμό, τότε δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

(3 μονάδες)

~~Γ.~~ Να απαντήσετε αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι σωστός ή λάθος:

i. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$.

(1 μονάδα)

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (3 μονάδες)

Δ. Να απαντήσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος:

i. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

ii. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της είναι: $\left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$.

iii. Μόνο οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις έχουν αντίστροφη συνάρτηση.

iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε η $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

v. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.

(2x5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2° 14

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[2, +\infty)$. Ισχύουν ότι: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1$

και για κάθε $x \geq 2$ $f^2(x) + 3 = x + 2f(x)$.

~~B1.~~ Να δείξετε ότι $f(3) = 2$.

(2 μονάδες)

~~B2.~~ Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$, $x \in [2, +\infty)$.

(6 μονάδες)

~~B3.~~

~~a)~~ Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(3 μονάδες)

~~b)~~ Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση: $f(x) = \ln a$, $0 < a < e$.

(4 μονάδες)

~~B4.~~ Έστω $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

~~a.~~ Να βρεθεί η $g \circ f$.

(4 μονάδες)

~~b.~~ Αν $\Phi = g \circ f$ να δείξετε ότι η Φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της Φ .

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3° 16

Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x^5 + 2x + 1, & x < 0 \\ 1 - x - \eta\mu x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

~~Γ1.~~ Να εξετάσετε τη συνέχεια της f .

(3 μονάδες)

~~Γ2.~~ Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(3 μονάδες)

~~Γ3.~~ Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

(4 μονάδες)

~~Γ4.~~ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις: $x_1 < 0 < x_2$.

(5 μονάδες)

Γ5. Αν x_2 είναι η θετική ρίζα του ερωτήματος Γ4, να αποδείξετε ότι: για κάθε $x \in (x_2, \frac{\pi}{2}]$ $-\frac{\pi^5}{32} - \pi + 1 \leq f(f(x)) < 1$.

(5 μονάδες)

Γ6. Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο 6

Δίνονται f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ισχύουν ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$, επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1$, και $\lim_{h \rightarrow 0} g(1+h) = 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

(5 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - g(x)| + x^3 g(x) - f(x)}{x-1}$.

(5 μονάδες)

Δ3. Αν $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $f(x)$.

(5 μονάδες)

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{\ln f(x)}{x-1} + \frac{\sin x}{x} = 0$ έχει μία ρίζα τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$.

(5 μονάδες)

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2) + \frac{1}{f(x^4)} > f(x^4) + \frac{1}{f(x^2)}$.

(5 μονάδες)

Καλή επιτυχία

Θεμα 1ο

A: Ορισμός κ' Αποδείξη

B: Ορισμός,

Γ: Ανταπαράδειξη.

Δ: i) $\wedge$ ii) $\wedge$ iii) $\wedge$ iv) $\leq$ v) $\wedge$

Θεμα 2ο

B₁: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1$

Θετω $g(x) = \frac{f(x)-2}{x-3}$

αρα $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$

$$g(x)(x-3) = f(x) - 2$$

$$\boxed{f(x) = g(x)(x-3) + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x)(x-3) + 2$$

f συνεχής.

$$\underline{f(3) = 2}$$

B₂:

$$f^2(x) - 2f(x) = x - 3$$

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 = x - 2$$

$$(f(x) - 1)^2 = \sqrt{x-2}^2$$

$$|f(x) - 1| = \sqrt{x-2}^{\oplus}$$

$$|f(x)^{\oplus}| = \sqrt{x-2}$$

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$f(x) - 1 = \sqrt{x-2}$$

P. 7.1 $f(x)$

$$f(x) = 0$$

$$|f(x)| = 0$$

$$\sqrt{x-2} = 0$$

$$x = 2$$

x	2
f(x)	1

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$$

$$f(3) = f(3) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 2.$$

$\beta_3: \textcircled{\alpha} \frac{D_f}{x \in [2, +\infty)}$

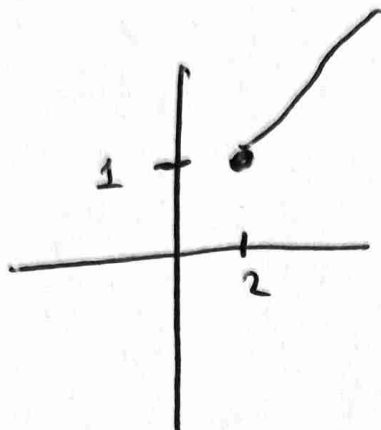
$\bullet \underline{x_1 < x_2} \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2}$

$1 + \sqrt{x_1 - 2} < 1 + \sqrt{x_2 - 2}$

$\underline{f(x_1) < f(x_2)}$

$\wedge f \nearrow$

x	2	$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$



$f(2) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\Sigma T_f = [1, +\infty)$

$\textcircled{B} f(x) = \ln a, \quad 0 < a < e$

Oran

$0 < e$
 $\ln a < \ln e$
 $\ln a < 1$

A Surcu!

$$B_4: \textcircled{a} (g \circ f)(x) = g(H(x)) = \frac{1}{1 + \sqrt{x-2}}$$

$$x \in D_f \quad \text{or} \quad H(x) \in D_g$$

$$x \geq 2$$

$$1 + \sqrt{x-2} \neq 0 \quad \text{now always.}$$

$$D_{g \circ f} = [2, +\infty).$$

$$\textcircled{B} \quad \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x_1-2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{x_2-2}}$$

$$1 + \sqrt{x_1-2} = 1 + \sqrt{x_2-2}$$

$$\sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2}$$

$$x_1 - 2 = x_2 - 2$$

$$\underline{x_1 = x_2}$$

$$\varphi \text{ is 1-1.}$$

$$y = \frac{1}{1 + \sqrt{x-2}} \quad \underline{\underline{y > 0}}$$

$$\sqrt{x-2} = \frac{1-y}{y} \quad \underline{\underline{y \neq 0}}$$

$$y(1 + \sqrt{x-2}) = 1$$

$$y + y\sqrt{x-2} = 1$$

$$y\sqrt{x-2} = 1 - y$$

$$\frac{1-y}{y} \geq 0$$

y	0	1
1-y	+	+
y	-	+
$\frac{1-y}{y}$	-	-

$$x-2 = \left(\frac{1-y}{y}\right)^2$$

$$x = \left(\frac{1-y}{y}\right)^2 + 2$$

$$\underline{\underline{y \in [0, 1]}}$$

$$\boxed{\varphi^{-1}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + 2}$$

$$x \in (0, 1]$$

$$\underline{\underline{1.20/}}$$

$$x \geq 2$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + 2 \geq 2$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

Θεωρ

$$f_1: \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

$$x^5 + 2x + 1 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$1 - x - \eta \sqrt{x} = 1$$

$$\underline{f(0) = 1}$$

αρα

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ συνεχώς σε } 0.$$

H $\neq$ συνεχής $(-\infty, 0)$ και $(0, \frac{\pi}{2}]$ με η.δ.ς

Αρα γάρφα συνεχής!

$\Gamma_2:$

$$x < 0$$

$$f(x) = x^5 + 2x + 1$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$
 - $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$
- $f(x_1) < f(x_2)$ $\} \oplus$

$f \uparrow$

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$
f(x)	$-\infty$	1	$-\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad x^5 + 2x + 1 = -\infty \quad x^5 = -\infty$$

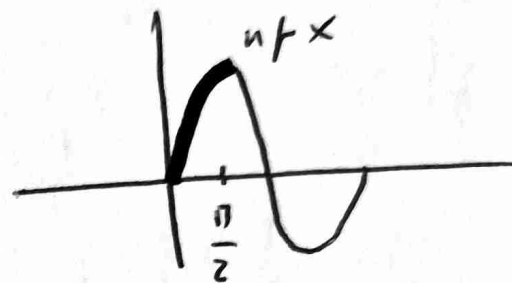
$$f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} - \eta \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 1 - x - \eta \sqrt{x}$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2$
 - $x_1 < x_2 \Rightarrow \eta \sqrt{x_1} < \eta \sqrt{x_2}$
 $- \eta \sqrt{x_1} > - \eta \sqrt{x_2}$
- $\oplus$



$f \downarrow$

$$\Sigma T_f = (-\infty, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{f3: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5+2x+1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5+2x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^4+2)}{x} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x-nrx-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x-nrx}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{x} - \frac{nrx}{x} = -1-1 = -2 \end{aligned}$$

T_0 opio Sw $\cup \text{maxu}$.

$$\begin{aligned} \text{f4: } &\frac{x < 0}{\cdot f \text{ swcxv}} \\ &\cdot f \nearrow \\ &\cdot \Sigma T_f = (-\infty, 1] \\ &\text{TO } 0 \in \Sigma T_f \\ &\text{apa } \exists! x_1 \text{ t.v.} \\ &f(x_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{0 \leq x \leq \frac{1}{2}}{\cdot f \text{ swcxv}} \\ &\cdot f \downarrow \\ &\cdot \Sigma T_f = [-\frac{1}{2}, 1] \\ &\text{TO } 0 \in \Sigma T_f \\ &\text{apa } \exists! x_2 \text{ t.v.} \\ &f(x_2) = 0 \end{aligned}$$

13:

$$x_2 < x \leq \frac{n}{2}$$

$f \downarrow$

$$f(x_2) > f(x) \geq f\left(\frac{n}{2}\right)$$

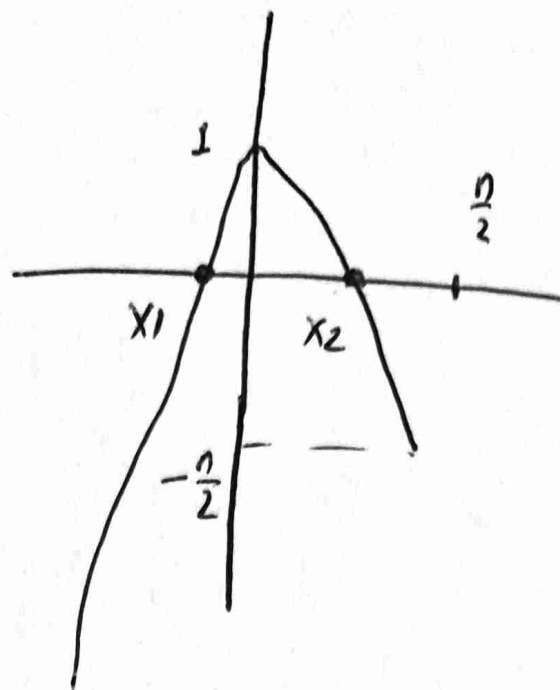
$$0 > f(x) \geq -\frac{n}{2}$$

f is concave operation

$$f(0) > f(f(x)) \geq f\left(-\frac{n}{2}\right)$$

$$1 > f(f(x)) \geq \left(-\frac{n}{2}\right)^s + 2\left(-\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$1 > f(f(x)) \geq -\frac{n^s}{32} - n + 1$$



16: $\forall \alpha > 1$ 0 p1?

$\forall \alpha = 1$ 1 p1?

$\forall -\frac{n}{2} \leq \alpha < 1$ 2 p1?

$\forall \alpha < -\frac{n}{2}$ 1 p1?

Δ : Αρκει $\forall \delta > 0 \quad h(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$.

Εστω οτι $\exists x_0 \text{ τ.υ. } h(x_0) = 0$

απο $h(x) = f(x) - g(x) \quad \text{τοτε}$

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$$

$$\underline{\underline{f(x_0) = g(x_0)}}$$

$$f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1$$

$$\underline{x = x_0}$$
$$f^2(x_0) - 2f(x_0)g(x_0) = 2x_0^2 + 1$$

$$f^2(x_0) - 2f(x_0)f(x_0) = 2x_0^2 + 1$$

$$f^2(x_0) - 2f^2(x_0) = 2x_0^2 + 1$$

$$-f^2(x_0) = 2x_0^2 + 1$$

Ατοω!

Αρα $\nexists x_0 \text{ τ.υ. } h(x_0) = 0$

απο $h(x) \neq 0$ και ομως

$$h(x) > 0 \quad \text{η} \quad h(x) < 0.$$

Β' τρωσις

$$f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1$$

$$f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) = g^2(x) + 2x^2 + 1$$

$$(f(x) - g(x))^2 = \sqrt{g^2(x) + 2x^2 + 1}^2$$

$$|f(x) - g(x)| = \sqrt{g^2(x) + 2x^2 + 1}^{\oplus}$$

$$|h(x)| = \sqrt{g^2(x) + 2x^2 + 1}$$

P, η h(x)

$$h(x) = 0$$

$$|h(x)| = 0$$

$$\sqrt{g^2(x) + 2x^2 + 1} = 0$$

Ατρωσις!

$h(x) \neq 0$ can occur

$h(x) > 0$ or $h(x) < 0$

$$\Delta_2: \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - g(x)| + x^3 g(x) - f(x)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|h(x)| + x^3 g(x) - f(x)}{x - 1} \quad (*)$$

Γνωρίζω από πριν ότι $h(x) \neq 0$ και συνεχ.

$$h(x) > 0 \quad \vee \quad h(x) < 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(1+h) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 \quad \text{g συνεχ.}$$

$$\underline{\underline{g(1) = 1}}$$

$$1+h=x$$

$$h \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 1$$

$$h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$h(1) = ?$$

$$f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1$$

$$\underline{\underline{x=1}}$$

$$\underline{\underline{h(x) > 0}}$$

$$f^2(1) - 2f(1)g(1) = 2 + 1$$

$$f^2(1) - 2f(1) = 3$$

$$f^2(1) - 2f(1) - 3 = 0$$

$$\underline{\underline{f(1) = 3}}$$

$$\cancel{f(1) = 1}$$

γιατί $f(x) > 0$

$$\underline{\underline{⑧}} \int_{x+1} \frac{h(x) + x^3 g(x) - h(x)}{x-1} =$$

$$= \int_{x+1} \frac{\cancel{h(x)} - g(x) + x^3 g(x) - \cancel{h(x)}}{x-1}$$

$$= \int_{x+1} \frac{g(x) (x^3 - 1)}{x-1} =$$

$$= \int_{x+1} \frac{g(x) \cancel{(x-1)} (x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = \int_{x+1} g(x) (x^2+x+1)$$

$$= g(1) \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$\Delta 3: f^2(x) - 2f(x)x^2 = 2x^2 + 1$$

$$f^2(x) - 2f(x)x^2 + x^4 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(f(x) - x^2)^2 = (x^2 + 1)^2$$

$$\left| \underbrace{f(x) - x^2}_{\varphi(x)} \right| = \left| x^2 + 1 \right|$$

$$|\varphi(x)| = x^2 + 1$$

$$\varphi(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

P, H $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = 0$$

$$|\varphi(x)| = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

Абсурд!

Ага $\varphi(x) \neq 0$ по условию

$$\varphi(x) > 0 \text{ и } \varphi(x) < 0$$

$$\varphi(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\varphi(1) = 1$$

$$\varphi(x) > 0$$

$$\Delta u: \frac{\ln f(x)}{x-1} + \frac{\sigma w x}{x} = 0$$

$$\underbrace{x \ln f(x) + (x-1) \sigma w x}_{t(x)} = 0$$

H $t(x)$ σwaxud ul n.σ.v σw (0,1)

$$t(0) = -1 < 0$$

$$t(1) = \ln f(1) = \ln 3 > 0$$

$t(0)t(1) < 0$ Bolzano $\exists \xi \in (0,1)$

$$\text{T.v } t(\xi) = 0$$

$$\frac{\ln f(\xi)}{\xi-1} + \frac{\sigma w \xi}{\xi} = 0$$



$$\Delta s: f(x^2) + \frac{1}{f(x^4)} > f(x^4) + \frac{1}{f(x^2)}$$

$$f(x^2) - \frac{1}{f(x^2)} > f(x^4) - \frac{1}{f(x^4)}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{1}{x} \quad x > 0}$$

$$f(x) > 0$$

$$\varphi(f(x^2)) > \varphi(f(x^4))$$

$\varphi \nearrow$

$$f(x^2) > f(x^4)$$

$$2x^4 + 1 > 2x^8 + 1$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

①

$\varphi \nearrow$

$$x^4 > x^8$$

$$x^8 - x^4 < 0$$

$$x^4(x^4 - 1) < 0$$

$$\overset{+}{x^4}(x^2 - 1)\overset{+}{(x^2 + 1)} < 0$$

$$x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$